

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ КАЗЕННОЕ ВОЕННОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
АКАДЕМИЯ ФЕДЕРАЛЬНОЙ СЛУЖБЫ ОХРАНЫ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

На правах рукописи

ФОКИН АЛЕКСАНДР БОРИСОВИЧ

**ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ
СЕТЕЙ НА ОСНОВЕ ИНВЕРСИЙ ИХ СОСТОЯНИЙ**

Специальность 2.2.15 – Системы, сети и устройства телекоммуникаций

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, доцент
Батенков Кирилл Александрович

Орел – 2023

Оглавление

| | |
|--|----|
| Введение..... | 5 |
| 1. Механизмы отказоустойчивости телекоммуникационных сетей как основа структурной надежности сети..... | 13 |
| 1.1. Методы защитного переключения и динамического восстановления | 14 |
| 1.1.1. Механизмы отказоустойчивости, применяемые на сетях с синхронной цифровой иерархией (SDH) | 16 |
| 1.1.2. Механизмы отказоустойчивости, применяемые в оптических транспортных сетях (OTN)..... | 20 |
| 1.1.3. Механизмы отказоустойчивости, применяемые в сетях с технологией многопротокольной коммутацией по меткам (MPLS)..... | 24 |
| 1.1.4. Механизмы отказоустойчивости, применяемые в IP сетях | 26 |
| 1.1.5. Механизмы отказоустойчивости, применяемые в сетях Ethernet..... | 28 |
| 1.2. Готовность услуги как одна из метрик при выборе оператора..... | 32 |
| 1.3. Соглашение об уровне обслуживания..... | 33 |
| 1.4. Анализ методов расчета показателей надежности сложноразветвленных систем | 35 |
| 1.5. Постановка научной задачи диссертационного исследования..... | 38 |
| 1.6. Выводы по первому разделу..... | 40 |
| 2. Процедуры формирования множества различных состояний сложноразветвленных телекоммуникационных сетей | 41 |
| 2.1. Случайная графовая модель телекоммуникационной сети | 41 |
| 2.1.1. Меры связности..... | 43 |
| 2.2. Формирование множества путей для двухполюсного графа сети..... | 44 |
| 2.3. Формирование множества деревьев для всеполюсного графа сети..... | 49 |
| 2.4. Формирование множества многополюсных деревьев для многополюсного графа сети | 54 |
| 2.5. Формирование множества минимальных двухполюсных сечений для двухполюсного графа сети..... | 58 |

| | |
|--|-----|
| 2.6. Формирование множества минимальных всеполюсных сечений для всеполюсного графа сети..... | 62 |
| 2.7. Формирование множества минимальных многополюсных сечений для многополюсного графа сети..... | 67 |
| 2.8. Пример формирования матриц зависимых событий на основе путей и двухполюсных сечений для мостикового графа..... | 70 |
| 2.9. Выводы по второму разделу..... | 71 |
| 3. Методы расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети на основе многопеременных инверсий отрицаний пересечений событий связности или несвязности графа | 77 |
| 3.1. Общий подход к расчету вероятности связности на основе инверсий состояний сети..... | 73 |
| 3.1.1. Процедура приведения двух событий несвязности к объединению независимых событий | 75 |
| 3.1.2. Процедура приведения трех событий несвязности к объединению независимых событий..... | 76 |
| 3.1.3. Рекурсивная процедура приведения нескольких событий несвязности к объединению независимых событий | 78 |
| 3.2. Модификация подхода к расчету вероятности связности с использованием сечений..... | 82 |
| 3.3. Матричное представление операций и выражений для событий связности (несвязности) деревьев и сечений..... | 86 |
| 3.4. Матричные формы операций поглощения и расщепления..... | 88 |
| 3.5. Матричная форма приведения нескольких событий несвязности к объединению независимых событий..... | 91 |
| 3.6. Переход от матрицы независимых событий к вероятностной функции.... | 101 |
| 3.7. Оценка вычислительной сложности предложенного метода расчета вероятности связности (несвязности) телекоммуникационной сети с методом двудольных графов..... | 104 |

| | |
|--|-----|
| 3.8. Пример анализа вероятности связности для мостикового графа матриц зависимых и независимых событий на основе путей и двухполюсных сечений.... | 106 |
| 3.9. Выводы по третьему разделу..... | 108 |
| 4. Метод расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети, поддерживающей механизмы обеспечения отказоустойчивости на примере магистральной сети юга России | 110 |
| 4.1. Надежность узлов и линий связи..... | 110 |
| 4.2. Метод расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети, поддерживающей механизмы обеспечения отказоустойчивости..... | 113 |
| 4.3. Анализ надежности телекоммуникационной сети на примере кабельной структуры магистральной сети юга России..... | 121 |
| 4.4. Выводы по четвертому разделу..... | 129 |
| Заключение..... | 131 |
| Список сокращений и условных обозначений | 134 |
| Список литературы..... | 137 |
| Приложение. Акты о внедрении и использовании результатов диссертационной работы..... | 152 |

Введение

Актуальность темы исследования. Современный мировой рынок информационных и телекоммуникационных услуг остается одним из наиболее динамично развивающихся секторов мировой экономики. Этот сектор характеризуется процессами модернизации и строительством новых телекоммуникационных систем, всеобщим распространением Интернета, ростом числа мобильных пользователей и другими направлениями развития. Эти изменения требуют применения высокоскоростных и надежных телекоммуникационных сетей [15,26,70,71,72,75]. Современные телекоммуникационные сети имеют большие размеры и сложную инфраструктуру, что делает их более уязвимыми к разному роду отказов, которые могут привести к серьезным последствиям. В результате, оператор должен решить одну из основных проблем сети это обеспечение ее высокой надежностью, так как от надежности телекоммуникационной сети зависит качество предоставляемого сервиса [44]. Проблемы анализа надежности не ограничиваются только телекоммуникациями, они также актуальны и для других систем, компоненты которых могут выйти из строя, например, энергетические, транспортные и механические системы, программное обеспечение, интегральные цепи и другие. Общим признаком этих систем является способность представления их в виде графа, описывающего взаимосвязи между компонентами. При этом сети должны строиться так, чтобы между любой парой узлов существовало несколько путей передачи информации, что обеспечивает высокую вероятность наличия хотя бы одного рабочего пути. В идеале пути должны быть независимыми, или допускать между любыми взаимодействующими парами узлов наличие не менее одного непересекающегося множества путей, содержащих общие ребра.

В современных телекоммуникационных сетях доступность взаимодействующих пользователей всегда должна быть постоянной. Доступность сети во многом зависит от ее надежности, которая должна поддерживаться на высоком уровне в не зависимости от используемых на сетях технологий: SDH/SONET, OTN, MPLS, IP и другие. Высокая надежность на сетях связи достигается, в том числе, и механизмами отказоустойчивости, особенности которых необходимо учитывать. Оператор должен иметь возможность оперативно, за приемлемые временные рамки, рассчитать надежность своей сети при изменении ее топологии, состава и др.

Главной сложностью является оценка надежности телекоммуникационной сети и определение количественных показателей характеристик сети, относительно которых оператор может обеспечить гарантированное качество предоставляемых услуг. В работе анализ надежности телекоммуникационной сети проведен на основе показателя коэффициента готовности, который входит в базовую структуру соглашения об уровне обслуживания (Service Level Agreement, SLA).

Определение показателей надежности в сложноразветвленных сетях является трудно вычисляемой задачей [7], и существующими методами получить за приемлемое время точные значения данных параметров оказывается не всегда возможным. Кроме того, известные методы применимы не для всех мер связности сети и не учитывают механизмы обеспечения отказоустойчивости.

Таким образом, совершенствование существующих и разработка специализированных методов расчета надежности телекоммуникационной сети в рамках заданного типа связности, позволяющих снизить трудоемкость расчетов, а также учитывать применяемые механизмы обеспечения отказоустойчивости, является актуальной задачей.

Степень разработанности темы. Существующий методологический аппарат математического моделирования телекоммуникационных сетей, представленный в работах Б. Я. Дудника, Б. П. Филина, С. Я. Ясинского, В. А. Нетеса, Е. А. Кучерявого [23,32, 45,82,98] и др., ориентирован, прежде всего, на исследование услуг для полносвязных структур или структур типа «точка-точка». В результате

наиболее востребованные в настоящее время услуги для многосвязных структур, исследуются с серьезными ограничениями в части возможных точек тяготения циркулирующего трафика.

Теория графов, разработанная в трудах Р. Erdos, A. Rényi, А. М. Райгородского [67,68,99,123,124] и др., рассматривает произвольные свойства случайных графов и не учитывает особенности функционирования телекоммуникационных сетей, определяющие события связности результирующих графов в рамках заданного типа связности.

Методы формирования множеств простейших подграфов, представленные в работах S. K. Chaturvedi, K. K. Aggarwal, S. H. Ahmad, R. A. Mishra, Г. Ш. Цициашвили [100,105,106,107,120,140,141] и др., используют хорошо известные способы полного перебора, которые зачастую приводят к существенным временным и вычислительным затратам при исследовании сложноразветвленных сетей.

Существующие методы расчета надежности телекоммуникационных сетей, разработанные в трудах Б. Я. Дудника, Б. П. Филина, И. А. Рябинина, S. K. Chaturvedi, W. Pino, T. Gomes, R. A. Koopij [74,82,120,149] и др., имеют строгое математическое обоснование в форме последовательности процедур и даже реализованы на ЭВМ, но не учитывают особенности методов резервирования телекоммуникационных сетей.

Таким образом, проблема оценки надежности телекоммуникационных сетей актуальна с позиции разработки более эффективных процедур формирования множеств простейших подграфов и методов расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности), с учетом различных типов связности сети и применяемых механизмов обеспечения отказоустойчивости.

Объект исследования – структурная надежность телекоммуникационной сети, поддерживающей механизмы обеспечения отказоустойчивости.

Предмет исследования – методы оценки вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети на основе простейших подграфов (путь, дерево, сечение).

Целью диссертационного исследования является разработка методов расчета надежности телекоммуникационной сети с различными типами точек

тяготения и поддержкой механизмов обеспечения отказоустойчивости, использующих процедуры формирования множеств простейших подграфов, на основе метода многопеременной инверсии обратных событий связности и несвязности эквивалентных графов.

Решаемые задачи. Для достижения цели в диссертации были решены следующие научные задачи:

1. Проведен анализ механизмов обеспечения отказоустойчивости, поддерживаемых современными телекоммуникационными сетями, и существующих аналитических методов расчета вероятности связности (коэффициента готовности).

2. Разработаны процедуры формирования множеств простейших подграфов телекоммуникационной сети для:

– двухполюсной связности в виде путей на основе алгоритма поиска в ширину и отбора соответствий по стокам;

– всеполюсной связности в виде остовых деревьев путем анализа декартовых произведений вершинных сечений на связность результирующих графов и проверки уникальности ребер;

– многополюсной связности в виде многополюсных деревьев на основе проверки листьев графа на принадлежность к множеству полюсов;

– двухполюсной связности в виде двухполюсных минимальных сечений на основе проверки сочетаний вершинных сечений на безызбыточность;

– всеполюсной связности в виде всеполюсных минимальных сечений путем анализа декартовых произведений вершинных сечений, включающих исток и сток, а также проверку их на уникальность;

– многополюсной связности в виде многополюсных минимальных сечений на основе отбора сечений, содержащих только полюсные вершины.

3. Разработаны методы расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети на основе многопеременных инверсий [128]:

– отрицания пересечения событий связности графа, формируемых на основе множеств подграфов путей, остовых деревьев или многополюсных деревьев;

– отрицания пересечения событий несвязности графа, формируемых на основе множеств подграфов минимальных двухполюсных, всеполюсных или многополюсных сечений.

4. Разработан метод расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети, поддерживающей механизмы обеспечения отказоустойчивости: защитного переключения (protection) и восстановления (restoration), гарантирующий наличие от одного до нескольких маршрутов передачи между заданными источником и стоком.

5. Проведен анализ надежности телекоммуникационной сети, основой которой является магистральная кабельная сеть юга России, поддерживающая механизмы обеспечения отказоустойчивости.

Научная новизна

1. Разработаны процедуры формирования множеств простейших подграфов телекоммуникационной сети для двух-, все- и многополюсной связностей в виде путей, остовых деревьев, многополюсных деревьев, минимальных сечений, отличающихся от известных отбором альтернатив с соответствующим стоком, перебором декартовых произведений вершинных сечений с учетом неповторяемости ребер, проверками принадлежности листьев подграфов только множеству полюсов, уникальности ребер и контроля добавляемого всеполюсного сечения на уникальность.

2. Разработана рекурсивная процедура приведения нескольких событий несвязности к объединению независимых событий, позволяющая в отличие от известных на основе метода многопеременных инверсий отрицания пересечения событий связности графа получать простые формы перехода логических функций к замещению, используемые для расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети.

3. Разработаны методы расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети на основе многопеременных инверсий отрицаний пересечений событий связности или несвязности графа для различных типов связности сети.

4. Разработан метод расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети, в отличие от известных учитывающий реализованные механизмы обеспечения отказоустойчивости с различными архитектурами, защищаемыми участками и требуемым количеством маршрутов.

Теоретическая и практическая значимость работы. Теоретическая значимость работы состоит в совершенствовании процедур формирования множеств простейших подграфов для произвольной связности графа телекоммуникационной сети, а также в развитии методов построения форм перехода логических функций к замещению на основе многопеременных инверсий отрицания пересечения событий связности (несвязности) графа.

Практическая значимость работы заключается в доведении разработанных процедур и методов до программной реализации, позволяющей проводить расчет вероятностей связности (коэффициентов готовности) достаточно разветвленной телекоммуникационной сети произвольной структуры и полюсности, использующей механизмы обеспечения отказоустойчивости.

Использование и внедрение результатов работы. Результаты диссертационной работы были использованы и внедрены:

1. В расчетах ООО «Ассоциация специалистов по безопасности» при определении структурной надежности проектируемых сетей.
2. В учебный процесс кафедры «Информационная безопасность» ФГБОУ ВО «ОГУ имени И. С. Тургенева».

Методология и методы исследования. Для решения задач диссертационного исследования применялись методы теорий надежности, вероятностей, графов, булевых функций, множеств, алгебры логики и планирования эксперимента.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Процедуры, формирующие множество простейших подграфов телекоммуникационной сети для двух-, все- и многополюсной связностей в виде путей, остовых деревьев, многополюсных деревьев, минимальных сечений, позволяющие образовывать логические функции связности или несвязности

телекоммуникационной сети. Для сложноразветвленной телекоммуникационной сети выигрыш во времени вычисления в среднем по проведенным экспериментам достигает величины до 1,8 раза большей относительно известных методов.

2. Методы расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети на основе многопеременных инверсий отрицаний пересечений событий связности или несвязности графа предоставляют возможность анализа структурной надежности сети. Число анализируемых элементарных конструкций (подграфов) в ходе процесса редукции исходного графа уменьшается относительно известных методов в два раза при значительном количестве вершин (для более, чем восемнадцати вершин погрешность менее 0,1%).

3. Метод расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети, поддерживающей механизмы обеспечения отказоустойчивости, позволяет проводить анализ надежности различных архитектур, защищаемых участков и требуемого количества маршрутов, что позволяет учесть эффекты дублирования элементов в различных маршрутах и, как следствие, снять ограничение о независимости путей передачи информации в сложноразветвленных сетях.

Личный вклад. Результаты диссертационной работы получены автором самостоятельно, из публикаций с соавторами в диссертацию включены только личные результаты автора.

Степень достоверности и апробация результатов.

Обоснованность и достоверность полученных результатов подтверждается адекватным применением известных методов исследования, соответствующих предметной области, и корректностью методик численного моделирования. Основные результаты докладывались и обсуждались на Международной научно-практической конференции «ИСТ-2020» (г. Нижний Новгород), Международной научно-технической и научно-методической конференции «АПИНО-2020» (г. Санкт-Петербург), Международном научно-техническом форуме «СТНО-2020», «СТНО-2022» (г. Рязань), Всероссийской научно-практической конференции «НПК-2022» (г. Киров).

Публикации. Основные положения диссертации опубликованы в 11 работах, 6 из них – в ведущих рецензируемых научно-технических журналах, входящих в перечень ВАК [87,92] 4 из которых проиндексированы в базе данных Scopus [83,84,88,97], 5 работ опубликованы в материалах международных, всероссийских и отраслевых конференций [85,90,94,95,96]. Получен 1 патент на изобретение [93] и 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [89].

Соответствие паспорту специальности. Результаты исследования соответствуют паспорту научной специальности 2.2.15. «Системы, сети и устройства телекоммуникаций» по пункту 1:

- разработка, и совершенствование методов исследования, моделирования и проектирования сетей, систем и устройств телекоммуникаций.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы и приложения. Основная часть изложена на 154 страницах машинописного текста, содержит 31 рисунок и 9 таблиц. Список литературы состоит из 156 источников. Приложение содержит 2 акта о внедрении и использовании результатов диссертационной работы.

1. Механизмы отказоустойчивости телекоммуникационных сетей как основа структурной надежности сети

В настоящее время телекоммуникационное сообщество активно эксплуатирует сети следующего поколения и участвует в построении сетей будущего, которые должны обеспечивать один из базовых аспектов развития национальной программы «Цифровая экономика Российской Федерации» [65] – информационную инфраструктуру [48]. Телекоммуникационные сети, построенные по различным сетевым технологиям, предоставляют разнообразные услуги конечным пользователям с возможностью обеспечения различного типа тяготения циркулирующего трафика, определяемого такими видами связности как: двухполюсной, многополюсной и всеполюсной. Важнейшим требованием телекоммуникационной сети является обеспечение непрерывности доступа абонентов ко всем ресурсам с требуемым качеством, при выходе из строя оборудования (узлов, линий) сетей связи, что требует обеспечения задач в области анализа надежности сети и ее отказоустойчивости. Проблема анализа надежности, будет оставаться одним из главных аспектов при проектировании и модернизации любых систем [5,41,142,143]. В свою очередь надежность телекоммуникационной сети напрямую зависит и от применяемых механизмов обеспечения отказоустойчивости.

В работе рассмотрено влияние характеристик телекоммуникационной сети на ее итоговую надежность с позиции показателя надежности – коэффициента готовности.

1.1. Методы защитного переключения и динамического восстановления

Современные телекоммуникационные сети используют оптоволоконные линии связи с методом спектрального разделения каналов (Wavelength Division Multiplexing, WDM) по которым обеспечивается передача данных на высоких скоростях с большой пропускной способностью [11]. Что делает такие сети чувствительными даже к кратковременным перебоям связи, а это может привести к большим потерям данных и как следствие, нанести серьезный экономический и репутационный ущерб операторам связи. Таким образом, задача обеспечения высокой надежности телекоммуникационной сети остается актуальной для операторов [144].

Под отказом согласно [21] понимается событие, заключающееся в нарушении работоспособного состояния объекта, а на сетях связи под отказом будем понимать перерыв в предоставлении услуги связи пользователю [18]. Следовательно, отказы в сети влияют на качество обслуживания (Quality of Service, QoS), которое определяется двумя ключевыми показателями: временем восстановления соединения и объем потерянных данных [55]. Количество потерянной информации зависит от времени восстановления сети и скорости передачи данных. Таким образом, зная вероятности отказов на участках сети, можно оценить его воздействие на трафик. В свою очередь время восстановления соединения зависит от применяемых механизмов обеспечения отказоустойчивости, позволяющие сохранять работоспособность сети после отказа одного или нескольких составляющих компонентов системы [20].

В современных телекоммуникационных сетях активно применяют два базовых механизма, которые обеспечивают отказоустойчивость сети, описанные в Рекомендациях МСЭ-Т G.805 и MEF 32 – это методы защитного переключения (protection) или еще их называют в литературе как методы резервирования и методы динамического восстановления (restoration) или методы реконфигурации [49,76, 102,103,151]. Данные методы обеспечивают связность пользователей и являются основой структурной надежности при отказе ресурсов (линия связи, путь целиком или узел).

Методы защитного переключения повышают надежность системы за счет включения дополнительных резервных элементов и функциональных решений. В результате отказа основного пути передаваемый трафик перенаправляется на предварительно подготовленный запасной путь, созданный благодаря резервным элементам. Полный отказ системы происходит только после того, как основной и все резервные элементы выйдут из строя. Команда на переключение формируется на основе статусных сигналов, получаемых от оборудования. Методы защитного переключения могут применяться к разным моделям защиты сети, как для архитектур защитного переключения по схемам: $1 + 1$, $1:n$, $(1:1)^n$, $m:n$, так и для разновидностей защищаемых участков элементов сети: узел, маршрут, сегмент, линия, кольцо и р-цикл [154].

Преимуществом методов защитного переключения является быстрое время восстановления соединения, что позволяет минимизировать потери передаваемых данных, а главным недостатком необходимость использование дополнительных избыточных сетевых ресурсов сети. Описание методов можно найти в [31,103,154].

Методы динамического восстановления вычисляют маршрут обхода, в момент отказа, применяя существующие работоспособные ресурсы. Это позволяет сэкономить на простое незадействованных резервов, которые в обычном режиме (до момента наступления отказа) могут быть использованы для низкоприоритетного трафика. Сеть восстанавливается за счет ресурсов центральной системы управления.

К преимуществам этих методов относят более экономичное использование сетевых ресурсов, в частности, пропускной способности и более эффективное восстановление сети в случае нескольких отказавших элементов в сравнении с методами защитного переключения. Основными недостатками этих методов являются относительно большой ресурс времени, необходимый для восстановления связи, что может привести к большим потерям данных и возможный риск нестабильности работы сети при частых самоустраняющихся

сбоях [119]. Описание и анализы методов динамического восстановления представлены в [10,64,125,154].

Приведенные механизмы обеспечения отказоустойчивости применяются в телекоммуникационных сетях, независимо от используемой технологии: SDH/SONET, OTN, MPLS, IP и другие [76,154].

1.1.1. Механизмы отказоустойчивости, применяемые на сетях с синхронной цифровой иерархией (SDH)

В телекоммуникационных сетях, работающих на основе синхронной цифровой иерархии (Synchronous Digital Hierarchy, SDH) для обеспечения отказоустойчивости применяют как методы динамического восстановления, так и методы защитного переключения, представленные в рекомендациях МСЭ-Т G.803, G.783 и других документах.

Методы, стратегия которых основана на защитном переключении, используют протокол автоматической защиты переключением (Automatic Protection Switching, APS). Они предполагают наличие заранее установленных резервных ресурсов, еще до наступления отказа, защищающих определенный набор рабочих. Тем самым обеспечивается восстановление работоспособного состояния сети за достаточно незначительный промежуток времени (десятки миллисекунд) при отказе какого-либо элемента сети — линии связи, порта, карты мультиплексора либо мультиплексора в целом. Сети, поддерживающие данную стратегию, названы самовосстанавливающимися. Переключение с рабочих ресурсов на резервные происходит без какого-либо прямого участия системы управления сетью (Network Management System, NMS). Сети SDH защищают трафик данных на уровне линейного тракта (отдельных блоков, портов) или соединений. Методы защиты переключением обеспечиваются схемами защиты: $1 + 1$, $1:n$, $(1:1)^n$, $m:n$.

К механизмам автоматической защиты переключением относят: защитное переключение оборудования (Equipment Protection Switching, EPS), защита карт (Card

Protection, CP), защита мультиплексной секции (Multiplex Section Protection, MSP) и защита сетевого соединения (Sub-Network Connection Protection, SNCP) [154].

Механизм защитного переключения оборудования (EPS), обеспечивает защиту модулей и компонентов оборудования SDH сети и работает в основном на линейных топологиях по схемам защиты: $1 + 1$ или $(1:1)^n$.

Механизм защиты карт (CP) обеспечивает защиту трибутарных и агрегатных карт мультиплексора, позволяя мультиплексорам продолжать работу при отказе карт. На линейных топологиях SDH сетей используют схемы защиты: $1 + 1$, $1:n$ и $(1:1)^n$.

Механизм защиты мультиплексной секции (MSP) включает защиту портов и соединительных линий между смежными мультиплексорами. Этот способ обладает более избирательным характером по сравнению с механизмом защиты карт. При линейной защите MSP делится на однонаправленную и двунаправленную защиту. В случае отказа (ошибка сигнала, отказ порта и др.) при однонаправленной защите решение о переключении принимает приемный мультиплексор, переключаясь на защитный канал. При этом прием и передача ведутся по разным портам. При отказе рабочего канала в двунаправленной защите выполняется полное переключение на защитные порты обоих мультиплексоров. Механизм защиты мультиплексной секции (MSP) обеспечивает защиту всех, проходящих через защищаемую мультиплексную секцию, соединений. На линейных топологиях используются схемы защиты: $1 + 1$, $1:n$ и $m:n$. Также механизм применяется и в кольцевых топологиях сетей SDH. Выделяют следующие основные методы защиты в кольцевых структурах: кольцо общей защиты секции мультиплексирования (Multiplex Section – Shared Protection Ring, MS–SP Ring) и кольцо выделенной защиты секции мультиплексирования (Multiplex Section – Dedicated Protection Ring, MS–DP Ring). Данные методы схожи в том, что в узлах, граничащих с отказавшей секцией они переключают трафик на противоположное направление (прямое и обратное). А отличаются тем, что в кольце MS–SP Ring доступная пропускная способность в прямом направлении

и обратном делится на две равные части: 50% отводится под рабочую пропускную способность, и остальные 50% под резервную для защиты рабочей. В MS–DP Ring 100% рабочей пропускной способности передается в прямом направлении и 100% емкости резервирования в противоположном направлении. Таким образом, метод MS–SP Ring имеет возможность повторного использования ресурсов для неперекрывающихся соединений, тем самым используя более высокую эффективность пропускной способности по сравнению с MS–DP Ring [154]. Основываясь на этих методах защиты, был разработан метод сегментного резервирования с автоматическим переключением на общий резерв, известный как механизм резервирования на базе р-циклов (p-cycle, preconfigured protection cycle), обеспечивающий до 30% меньшего объема ресурсов пропускной способности [27].

Механизм защиты сетевых соединений (SNCP) обеспечивает защиту тракта или соединения. При повреждении основного канала происходит быстрое переключение пользовательского соединения на альтернативный. Механизм применяется в кольцевых и ячеистых топологиях сетей SDH и дополняет защиту мультиплексной секции MSP [56]. В настоящее время SNCP работает только в однонаправленном режиме по схеме 1 + 1. Механизм SNCP тратит меньше времени на процессы восстановления связи. С точки зрения эффективности емкости, кольцо SNCP работает также, как кольцо MS-DP: каждому соединению назначается емкость (один временной интервал в каждом направлении) вдоль всего кольца, это предотвращает повторное использование ресурсов, как в кольцах MS-SP.

Для обеспечения отказоустойчивости сети, состоящей из нескольких колец, в которой трафик пересекает более чем одно кольцо, применяются следующие варианты схем защиты: схема соединения «виртуального кольца» (Virtual Ring, VR) и схема «падения и продолжения» (Drop and Continue, D&C). Схема взаимосвязи VR является глобальной техникой защиты, тогда как схема D&C локальной [154].

Согласно рекомендации МСЭ-Т G.841/842 для защиты трафика при использовании методов защитного переключения установлены требования нормативов на время переключения линейного тракта не более 50 мс и соединения не более 200 мс. Методы защитного переключения в сетях SDH

защищают только от единичных отказов и не являются оптимальными с точки зрения использования эффективности пропускной способности, однако считаются эталонными по скорости времени восстановления связи.

Применение методов динамического восстановления в сетях SDH обеспечивают установление соединения в момент отказа (канала, узла или пути) по рассчитанному или установленному альтернативному пути, при этом использование резервных мощностей осуществляется более эффективно по сравнению с предыдущим методом. Однако при этом значительно замедляется цикл восстановления связи (до нескольких минут), во многом зависящий от структуры сети. Различают два основных подхода к установке соединений по альтернативному маршруту в момент отказа.

В первом подходе весь процесс восстановления связи централизован в центральной системе управления сетью (NMS). Управление, как правило, организовано так, чтобы обеспечить высокую надежность восстановления соединения, а не ее скорость. При этом вычисление (альтернативных) маршрутов, по которым необходимо настроить соединения в момент отказа, может быть выполнено либо заранее (для ускорения процесса восстановления), либо в момент отказа.

Во втором подходе для восстановления используется распределенный набор протоколов (протокол распределенной маршрутизации) который может нести ответственность за сигнал о создании соединений по альтернативным путям при отказе. При таком распределенном подходе пути также могут быть вычислены предварительно или в режиме реального времени.

Оба подхода метода динамического восстановления в сетях SDH, позволяют вычислять альтернативные маршруты и некоторые рабочие маршруты во время отказа на основе фактического состояния сети даже при множественных отказах.

В стратегии динамического восстановления, как правило, восстановление пути является более эффективным, чем восстановление канала или узла, поскольку его глобальный характер позволяет распределять альтернативные маршруты по всей сети и находить более оптимальные маршруты. В некоторых сетях выбор восстановления пути вместо восстановления канала или узла, может

сэкономить до 10% объема емкости пропускной способности, необходимой в сети, а выбор восстановления пути вместо выделенной защиты пути (например, SNCP) может привести к экономии емкости до 30% [154].

Анализируя стратегии защитного переключения и динамического восстановления в сетях SDH видно, что недостатком стратегий, основанных на предварительно вычисленных альтернативных путях, является то, что такие пути могут быть рассчитаны только для ограниченного числа ожидаемых сценариев отказов сети. Тогда, как стратегии, которые могут вычислять альтернативные маршруты во время отказа, являются гораздо более гибкими, так как могут учитывать фактическое состояние сети, даже в случае неожиданных отказов, но тратят гораздо больше времени на восстановление связи.

1.1.2. Механизмы отказоустойчивости, применяемые в оптических транспортных сетях (OTN)

В оптических транспортных сетях (Optical Transport Network, OTN) механизмы отказоустойчивости, построенные на стратегии защитного переключения линейной защиты, представлены в рекомендациях МСЭ-Т G. 873.1, а на кольцевых топологиях в рекомендациях МСЭ-Т G. 873.2 и описаны в [108,116,154].

Схемы защитного переключения на сети OTN используют технологию двойного ввода и селективного приема. При этом применяются схемы защиты: 1+1, 1:1 ($m:n$). Схемы защиты обеспечиваются на уровне оптической секции мультиплексирования (Optical Multiplex Section, OMS) и уровне оптических каналов (Optical Channel, OCh). На уровне OMS весь пучок мультиплексированных оптических каналов (одно волокно) защищается как единое целое, тогда как при использовании схемы защиты на уровне OCh каждый оптический канал защищается отдельно.

На уровне оптической секции мультиплексирования (уровень OMS) методы защитного переключения применяются на линейных и кольцевых топологиях.

На линейных топологиях для защиты:

- 1-волоконной секции мультиплексирования (прием и передача в одном волокне) по схемам $1 + 1$ или $(1:1)^n$, $m: n$
- 2-волоконной секции мультиплексирования (прием и передача в двух отдельных волокнах одного оптического кабеля) по схемам $1 + 1$ или $(1:1)^n$, $m: n$.

На кольцевых сетях для защиты:

- однонаправленной секции с кольцом выделенной защиты оптической мультиплексной секции (Optical Multiplex Section Dedicated Protection Ring, OMS-DP Ring), где одно волокно предназначено для рабочего трафика, а другое противоположащее зарезервировано для защитного, организованные по схемам $1 + 1$ или $(1:1)^n$;
- двунаправленной секции с кольцом общей защиты оптической мультиплексной секции (Optical Multiplexed Section Shared Protection Ring, OMS-SP Ring), где половина длин волн зарезервирована как рабочие каналы, а другая половина – как защитные каналы, организуются по схемам $1: n$ или $m: n$.

На уровне оптических каналов (уровень OCh) методы защитного переключения обеспечиваются в линейных и кольцевых топологиях.

На линейных топологиях:

- с использованием транспондеров (рабочий и резервный с каждой стороны канала) и резервного оптического канала (разнесенного с рабочим каналом);
- с использованием оптического разветвителя на передаче и селектора на приеме для сигналов рабочего и резервного путей.

На кольцевой топологии для:

- защиты оптических каналов с выделенной защитой (OCh-Dedicated Path Protection Ring, OCh-DP Ring) по схемам $1 + 1$ или $(1:1)^n$ и с общей защитой (OCh-Shared Protection Ring, OCh-SP Ring) по схеме $1: n$ или $m: n$.

Схемы резервирования в оптических кольцевых сетях OTN очень похожи на схемы в кольцевых сетях SDH/SONET (таблица 1.1).

Схема кольца общей защиты оптического канала (OCh-SP Ring) является единственной кольцевой схемой защиты на уровне оптической сети, которая не

имеет аналогов на уровне SDH. Она реализована в виде двухволоконного кольца. В каждом волокне половина длин волн зарезервирована для рабочего трафика, а другая для защитного трафика. Рабочие каналы в одном волокне защищены защитными каналами в другом волокне. Таким образом, обеспечивается эффективность использования пропускной способности благодаря совместному использованию резервной емкости несколькими рабочими соединениями по непересекающимся маршрутам. Время переключения для перевода с рабочего на резервные каналы или пути в стратегии защитного переключения в оптических транспортных сетях не превышает 50 мс.

Таблица 1.1 – Сравнение схем для кольцевых сетей SDH и OTN

| SDH | OTN | Характеристики |
|------------|-------------|--|
| MS-DP Ring | OMS-DP Ring | Выделенная защита, локальная схема резервирования, выполняемая мультиплексорами ввода-вывода, прилегающими к месту отказа |
| MS-SP Ring | OMS-SP Ring | Общая защита, локальная схема резервирования, выполняемая мультиплексорами ввода-вывода, прилегающими к месту отказа |
| SNCP | OCh-DP Ring | Выделенная защита, схема сквозного восстановления, выполняемая мультиплексорами ввода-вывода, на которых трафик входит/выходит из кольца |
| | OCh-SP Ring | Общая защита, схема сквозного восстановления, выполняемая мультиплексорами ввода-вывода, на которых трафик входит/выходит из кольца |

С внедрением оптической плоскости управления в сетях OTN методы, построенные на стратегии динамического восстановления, становятся реальным вариантом обеспечения устойчивости сетей от возможных возникающих отказов. Данные методы, лучше с точки зрения использования эффективности емкости по сравнению со схемами защитного переключения, но реализация этих схем довольно сложна и требует сложных алгоритмов. Время восстановления связи составляет от сотен миллисекунд до десятков минут.

Предусмотрено несколько вариантов схем методов динамического восстановления в оптической сети. Схема на основе восстановления канала оптической мультиплексной секции (работа на уровне OMS) и схема на основе

пути (работа на уровне блока данных оптического канала – Optical Channel Data Unit, ODU). Восстановление канала обычно требует большей емкости, чем восстановление пути, из-за часто неоптимальных маршрутов. При этом резервные маршруты можно использовать как заранее рассчитанные, так и вычисляемые после обнаружения отказа. Преимущество вычисляемых резервных маршрутов заключается в реагировании на неожиданные отказы, чего нельзя сказать о заранее запланированном резервировании.

Обзор основных типовых схем динамического восстановления и их сравнение с механизмов защитного переключения, применяемых в оптических транспортных сетях, описаны в [122] и представлены в таблице 1.2.

Таблица 1.2 – Сравнение схем динамического восстановления (restoration) и защитного переключения (protection)

| | Резервный маршрут | Назначение длин волн на резервном маршруте | Переключение на резервный маршрут |
|--|-----------------------|--|-----------------------------------|
| Методы | Вычисления | | |
| Динамического восстановления (Restoration) | Заранее запланировано | Заранее запланировано | После отказа |
| | Заранее запланировано | Динамический | После отказа |
| | Динамический | Динамический | После отказа |
| Защитного переключения (Protection) | Заранее запланировано | Заранее запланировано | До отказа |

В сетях *OTN*, оба метода можно использоваться одновременно. Для этого, необходимо разделить передающий трафик на различные классы с различными требованиями. Одним из видов трафика может быть высокоприоритетный, который должен быть восстановлен быстро. Другим типом может быть низкоприоритетный трафик, для которого время восстановления не так критично. Последний тип трафика может быть восстановлен с помощью, механизмов restoration, а первый тип трафика с помощью механизма protection с использованием схемы защиты 1 + 1.

1.1.3. Механизмы отказоустойчивости, применяемые в сетях с технологией многопротокольной коммутацией по меткам (MPLS)

В сетях, с технологией многопротокольной коммутации по меткам (Multi-Protocol Label Switching, MPLS), осуществляется передача данных с установкой соединения [38] и дополнительные возможности по управлению трафика (Traffic Engineering, TE): балансировка нагрузки и быстрая перемаршрутизация [138,139]. Механизмы защитного переключения в MPLS-TE реализуются на уровнях защиты узла, линии и пути, в соответствии с рекомендациями МСЭ-Т G.808.1/8131.

Механизмы защитного переключения на уровнях защиты линии и узла относятся к методам локальной защиты (Local Protection), они основаны на технологиях быстрой перемаршрутизации (Fast ReRoute, FRR) и получили название протоколов MPLS-TE FRR [121,133]. Технология быстрой перемаршрутизации основана на введение избыточности в маршрутные решения. MPLS FRR базируется на протоколе резервирования сетевых ресурсов RSVP-TE и в случае отказа элементов сети (линии или узла) перенаправляет трафик с основного пути коммутации по меткам LSP (Label Switched Paths) на резервный путь LSP. Переключение осуществляет узел LSR (Label Switch Router), являющийся смежным по отношению к отказавшему элементу сети, называемый точкой локального восстановления (Point of Local Repair, PLR) [145].

При защите линий резервный маршрут определяется до аварии, и строится между смежными узлами LSR. Одновременно с использованием резервного маршрута начальный узел основного маршрута, применяя протоколы маршрутизации, начинает его восстановление. Использование резервного маршрута прекращается, как только восстановится основной, таким образом, защита линии является временной мерой. На практике это позволяет существенно повысить производительность сети и улучшить основные показатели качества обслуживания.

Защита узла, по сути, похожа на защиту линии, обеспечивая только прокладку защитного маршрута в обход отказавшего устройства LSR, при этом обходной маршрут тоже находится заранее. Защита узла также является временной мерой.

Время переключения на обходной маршрут при защите линии и узла не превышает 50 мс. Механизмы защитного переключения на уровнях резервирования линии и узла используют схемы: $1 + 1$, $1:n$, $(1:1)^n$, $m:n$.

Механизм защиты пути относят к методам глобальной защиты (Global Path Protection) и строится по схемам: $(1:1)^n$ или $1:n$. Механизм заключается в переключении головным узлом LSR, вычисляющим путь LSP, трафика с основного пути LSP на предварительно рассчитанный обходной путь LSP, при получении сигнала индикации неисправности (Fault Indication Signal, FIS) в случае отказа. При этом резервный путь, по возможности, состоит из ресурсов сети не задействованных в основном пути. Этот механизм является более универсальным, по сравнению с механизмами защиты узлов и линий, но тратит больше времени на переключение.

Механизмы динамического восстановления в MPLS сетях называются методами восстановления по умолчанию (Global Default Restoration) и организуются в зависимости от способа установления пути. При установлении пути с помощью протокола распределения меток (Label Distribution Protocol, LDP) восстановление обеспечивается с помощью распределенного механизма нахождения нового пути с задействованием протоколов маршрутизации (OSPF, IS-IS) при получении сигнала индикации неисправности (FIS). При этом учитываются записи таблиц маршрутизации, сделанные с помощью внутренних протоколов маршрутизации типа IGP (Interior Gateway Protocol).

При поддержке MPLS техники управления трафиком (MPLS TE) пути строятся через TE-туннели, их восстановление осуществляется модифицированными протоколами сигнализации и маршрутизации (OSPF TE, IS-IS TE). При фиксации отказа нижестоящим узлом, головной LSR уведомляется с помощью протокола RSVP и протокола маршрутизации по сигналу FIS. Головной LSR пересчитывает путь и подает сигнал LSP по альтернативному пути. LSP может быть вычислен

распределенным или централизованным способом. В первом случае не указывается конкретный путь, и головной LSR динамически вычисляет альтернативный путь LSP с учетом ограничений доступных ресурсов в сети. В последнем случае путь статически настраивается на головной станции LSR до отказа. Некоторые реализации MPLS TE позволяют настраивать оба варианта с порядком предпочтения. Основное отличие от восстановления пути по LDP заключается в том, что прокладкой нового пути занимается только, головной узел пути LSR.

В механизмах динамического восстановления время сходимости определяется топологией сети и используемыми протоколами маршрутизации, и находится в диапазоне от нескольких миллисекунд до минут [38].

1.1.4. Механизмы отказоустойчивости, применяемые в IP сетях

Особенностью IP-сетей является то, что предварительные соединения заранее не устанавливаются, маршрутизатор самостоятельно вычисляет путь и принимает решение, по которому будет направляться трафик в случае отказа [14]. Данные способы обеспечения отказоустойчивости относятся к механизмам защитного переключения, описанные в рекомендациях МСЭ-Т G.803.1, которые получили названия способов быстрой перемаршрутизации в IP сети (IP FRR). Различие между IP FRR и MPLS FRR заключается в том, что в IP-сетях обходные пути заранее резервируются каждым маршрутизатором индивидуально и используются ими при адресных локальных отказах в сети.

В зависимости от сетевых решений существует несколько способов протокольных средств быстрой перемаршрутизации в IP сетях: механизм выбора маршрута от его стоимости (Equal Cost Multi-Path, ECMP), механизм поиска циклов (Loop Free Alternate, LFA), механизм альтернативного U-обхода, механизм на основе построения максимально избыточных деревьев (Maximally Redundant Trees, MRT) и др. [38].

Выбор резервного маршрута по его стоимости осуществляется согласно протоколу ECMP, который позволяет использовать несколько маршрутов

с одинаковой стоимостью на одном пути. Выбор резервного маршрута с равными метриками для одной пары пользователей осуществляется путем поочередного выбора каждого из них с одинаковой вероятностью [126].

Механизм поиска циклов, обеспечивается протоколами маршрутизации, которые при аварии для организации обходного маршрута задействуют часть рассчитанного цикла, состоящего из доступного маршрутизатора и маршрутизатора-источника [109,117].

В случае недоступности пути организованного по протоколам ESMР или LFA применяется способ альтернативного U-обхода, в котором маршрутизатор перенаправляет трафик на смежный ему маршрутизатор, имеющий в таблице маршрутизации альтернативный маршрут к узлу назначения [38,112,118].

Механизм на основе построения максимально избыточных деревьев основан на графовых моделях расчета двух непересекающихся путей (основной и резервный) между заданной парой вершин графа [110,111]. Для обеспечения максимально возможных показателей отказоустойчивости эти два типа маршрутов-деревьев должны полностью покрывать исходный граф сети.

Механизмы защитного переключения в IP сетях, построенные на технологиях быстрой перемаршрутизации (IP FRR), позволяют восстановить передачу пакетов вне проблемного канала, узла или пути уже через несколько десятков миллисекунд [146]. Сам же резервный путь остается активен до момента формирования маршрутным протоколом обновленного основного пути, который будет кратчайшим в рамках выбранной маршрутной метрики. На практике это позволяет существенно повысить производительность сети и улучшить основные показатели качества обслуживания.

К механизмам динамического восстановления в IP сетях относят протоколы адаптивной (динамической) маршрутизации, которые делятся, в зависимости от используемых алгоритмов, на группы: дистанционно-векторные алгоритмы (Distance Vector Algorithm, DVA) и алгоритмы состояния связей (Link State Algorithm, LSA).

Алгоритмы DVA используют только в сетях с небольшой размерностью, из-за своего интенсивного трафика обмена векторами расстояний до всех известных

им сетей. Протоколы, применяющие дистанционно-векторные алгоритмы: протокол маршрутной информации (Routing Information Protocol, RIP), протокол маршрутизации внутреннего шлюза (Interior Gateway Routing Protocol, IGRP) и модифицированный протокол маршрутизации внутреннего шлюза (Enhanced Interior Gateway Routing Protocol, EIGRP) [56].

Алгоритм состояния связей используются на маршрутизаторах для построения графической информации о сети, на основе одного общего графа, что делает процесс маршрутизации более устойчивым к изменениям сети. Это обеспечивает нахождения оптимальных по некоторому критерию маршрутов до каждой из сетей, входящих в составную сеть. Рассылка обновлений происходит только в случаи появления изменений или при периодических обновлениях через большие промежутки времени. К протоколам основанных на данном алгоритме относят протокол взаимодействие промежуточных систем (Intermediate System-to-Intermediate System, IS-IS) и открытый протокол предпочтения кратчайшего пути (Open Shortest Path First, OSPF) [56].

В IP-сетях протоколы маршрутизации подразделяются на внешние (Exterior) и внутренние (Interior). Протоколы внутреннего шлюза (Interior Gateway Protocol, IGP), применяются внутри автономной системы: RIP, EIGRP и OSPF. Протоколы внешней маршрутизации (Exterior Gateway Protocol, EGP), переносят маршрутную информацию между различными автономными системами: BGP (Border Gateway Protocol) [56].

Время сходимости протоколов, относящихся к механизмам динамического восстановления в IP сетях доходит до нескольких десятков секунд [38].

1.1.5. Механизмы отказоустойчивости, применяемые в сетях Ethernet

Для сетей Ethernet использующих физический уровень разработаны свои механизмы защиты, которые включают в себя механизмы защитного переключения и восстановления.

Основные требования к механизмам защитного переключения описаны в MEF 2 (Metro Ethernet Forum) и MEF 32, а конкретные схемы и протоколы стандартизированы в рекомендациях МСЭ-Т G. 8031 и G.8032 [49]. Основой для их разработки были механизмы защиты, реализованные на сетях SDH. Управлением процессами переключений при защитном переключении между узлами сети осуществляют протоколы APS. Время переключения на резервные каналы осуществляется в пределах 50 мс.

При линейной топологии используется две схемы: $1 + 1$ и $(1:1)^n$. Для схемы $1 + 1$ реализованы следующие варианты переключения:

- однонаправленное, при отказе одного из основных (резервируемых) направлений передачи дуплексного соединения, переключение на резервный путь происходит только для одного отказавшего направления;

- двунаправленное, при отказе хотя бы одного из основных (резервируемых) направлений передачи дуплексного соединения, переключение на резервные пути происходит для всех двух направлений.

Для схемы $(1:1)^n$ реализовано, только двунаправленное переключение.

Особенность организации методов защитного переключения в кольцевых топологиях на сетях Ethernet, является то, что при нормальном режиме работы одно из звеньев кольца блокируется, для исключения образования петель, что критично для таких сетей. А при возникновении отказа разблокируется и используется для восстановления передачи информации.

Защитное переключение в сетях Ethernet может быть как обратимым, когда после восстановления основного пути происходит обратное переключение передающего трафика, так и необратимым когда трафик продолжает передаваться по резервному пути даже после восстановления основного.

Также к методам защитного переключения на сетях Ethernet можно отнести метод агрегации звеньев (Link Aggregation), для реализации которого используется протокол управления агрегацией звеньев (Link Aggregation Control Protocol, LACP), представлен в стандарте IEEE 802.3ad. Особенностью метода является то, что

отказоустойчивость обеспечивается только между двумя смежными коммутаторами, которые связаны между собой параллельными звеньями (до 8) логически объединенные в одно звено. При этом передающий трафик распределяется по всем звеньям. При отказе физического звена связь сохраняется, а передающий трафик перераспределяется между работоспособными звеньями.

Механизмы восстановления на сетях Ethernet, построены на распределенном алгоритме покрывающего дерева (Spanning Tree Algorithm, STA). На основе этого алгоритма был разработан протокол покрывающего дерева (Spanning Tree Protocol, STP), обеспечивающий построение древовидной топологии связей только с одним путем минимальной длины до всех коммутаторов сети, тем самым гарантируя отсутствие петель (циклов). В случае отказа коммутатора или линии связи протокол STP обеспечивает восстановление передачи трафика, строя новое покрывающее дерево, исключаящее из него отказавший элемент. Общее время сходимости протокола STP может достигать 50 с. Такое время восстановления сети критично для многих приложений, что способствовало разработке быстрого протокола покрывающего дерева (Rapid Spanning Tree Protocol, RSTP) описанного в стандарте IEEE 802.1w, время сходимости данного протокола не превышает нескольких секунд. Для VLAN был разработан протокол множественных покрывающих деревьев (Multiple Spanning Tree Protocol, MSTP), описанный в IEEE 802.1s, позволяющий строить различные покрывающие деревья для разных VLAN.

Обобщенная таблица основных методов отказоустойчивости по защите информации при авариях, применяемых в телекоммуникационных сетях, основанных на механизмах защитного переключения и динамического восстановления, в зависимости от используемой технологии представлена в таблице 1.3.

Таблица 1.3 – Методы отказоустойчивости применяемые в телекоммуникационных сетях

| Технология (МСЭ-Т) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|----------|---|----------|---|----------|---|----------|---|----------|---|--|---|--|--|--|--|--|--|--|
| SDH/SONET (G.780/Y.1351, G.803, G.783 и др.) | | OTN Оптические сети (G.870/Y.1352, G.872, G.798 и др.) | | MPLS (G.8110/Y.1370, RFC 3031 и др.) | | IP (E.417, Y.1001 и др.) | | ETHERNET (G.985, G.986 и др.) | | | | | | | | | | | |
| Методы отказоустойчивости | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Protection G.841, G.842, I.630 и др. | | Restoration Не стандартизированы | | Protection G.808.2, G.873.1, G.873.2 и др. | | Restoration Не стандартизированы | | Protection G.808.1, G.808.3, G.8131/Y.1382, G.8132/Y.1383, Y.1720 и др. | | Restoration RFC 1583 | | | | | | | | | |
| Protection G.841, G.842, I.630 и др. | | Restoration Не стандартизированы | | Protection G.808.2, G.873.1, G.873.2 и др. | | Restoration Не стандартизированы | | Protection G.808.1, G.808.3, G.8131/Y.1382, G.8132/Y.1383, Y.1720 и др. | | Restoration RFC 1583 | | | | | | | | | |
| <p>Linear Protection (линейная защита):</p> <ul style="list-style-type: none"> - EPS (защита блоков и элементов оборудования) 1+1, 1:1; - CP (защита карт) 1+1, 1:1, 1:n; - MSP (защита мультиплексной секции): 1+1, 1:n, m:n. <p>SNCP (защита сетевого соединения):</p> <p>1+1.</p> <p>Ring Protection (защита кольца):</p> <ul style="list-style-type: none"> - MS-DP Ring (кольцо выделенной защиты секции мультиплексирования); - MS-SP Ring (кольцо разделяемой защиты секции мультиплексирования); 1+1, 1:1, 1:n; <p>- SNCP Ring (защита сетевого соединения кольца): 1+1.</p> | | <p>Подходы:</p> <ul style="list-style-type: none"> - с участием NMS; - с использованием протоколов распределенной маршрутизации. <p>Способы:</p> <ul style="list-style-type: none"> - маршрут запланирован; - маршрут рассчитывается. | | <p>OCh (уровень оптических каналов):</p> <ul style="list-style-type: none"> - Linear Protection (линейная защита) с использованием транспондеров (раб. и рез) и рез канала (1+1;1:1); - Ring Protection (защита кольца): а)- OCh-DP Ring; б)- OCh-SP Ring. <p>1+1, 1:n, m:n.</p> | | <p>Подходы:</p> <ul style="list-style-type: none"> - OCh (восстановление на основе канала) - ODU (восстановление на основе пути) <p>Способы расчета маршрута:</p> <ul style="list-style-type: none"> - статический; - динамический. | | <p>Linear Protection:</p> <ul style="list-style-type: none"> - защита линии; - защита узла. <p>используются RSVP TE с протоколами маршрутизации (OSPF-TE)</p> <p>1+1, 1:1, 1:n, m:n.</p> <p>- Global Path Protection:</p> <ul style="list-style-type: none"> - защита пути. <p>используются RSVP TE с протоколами маршрутизации:</p> <p>1:1.</p> | | <p>Global default restoration (восстановление по умолчанию):</p> <ul style="list-style-type: none"> - MPLS IGP (LDP, RSVP, OSPF, IS-IS); - MPLS TE (RSVP TE, OSPF TE, IS-IS TE). <p>Способы расчета маршрута:</p> <ul style="list-style-type: none"> - статический; - динамический. | | <p>FRR IP:</p> <ul style="list-style-type: none"> - ECMP; - LFA; - MRT - альтернативные U-обходы и др. | | <p>IGP:</p> <ul style="list-style-type: none"> - DVA (RIP, IGRP, EIGRP и др.); - LSA (IS-IS, OSPF). <p>EGP:</p> <ul style="list-style-type: none"> - BGP. | | <p>Link Aggregation (агрегация звеньев):</p> <ul style="list-style-type: none"> - LACP. <p>Linear Protection:</p> <p>1+1, 1:1/ Ring Protection.</p> <p>1+1, 1:n, m:n</p> | | <p>STA:</p> <ul style="list-style-type: none"> - RSTP, - MSTP | |
| Время восстановления | до 50 мс | 50-100 мс | до 50 мс | от 100 мс – 10 с | до 50 мс | до 100 с | до 50 мс | от 50 мс | до 50 мс | до 5 с | | | | | | | | | |

1.2. Готовность услуги как одна из метрик при выборе оператора

Применение рассмотренных механизмов позволяет оператору предоставить пользователю необходимый уровень готовности соединения (услуги). Под готовностью в телекоммуникациях понимается вероятность того, что соединение будет организовано в произвольный момент времени [85,103]. Для потребителя услуги, показатель готовности становится ключевым критерием обслуживания, а в некоторых случаях даже более важным, чем джиттер, задержка и потеря пакета при выборе оператора.

Чем выше требования к готовности сети связи, тем больше ресурсов должен вкладывать оператор, что в конечном итоге влияет на конечную стоимость услуги. Готовность сети во многом зависит от применяемых механизмов обеспечения отказоустойчивости. Оператор может комбинировать методы, классифицируя передающую информацию на классы, определяемые важностью и чувствительностью к времени восстановления соединений. В общем виде классификация методов обеспечения отказоустойчивости в телекоммуникационных сетях представлена в таблице 1.4 [22,91].

Таблица 1.4 – Классификация механизмов отказоустойчивости при отказах на телекоммуникационных сетях

| Механизмы отказоустойчивость при отказах | | |
|--|---|-----------------------|
| Защитное переключение (резервирование) | Динамическое восстановление (перемаршрутизация) | |
| Выделение ресурсов | | |
| По предварительному расчету | По требованию | |
| Использование ресурсов | | |
| Выделенный резерв 1+1 | Общий резерв 1:n | Второстепенный трафик |
| Расчет резервного маршрута (пути) | | |
| Предварительный расчет | Выбор пути в зависимости от требования по качеству | По требованию |
| Объект защиты | | |
| Защита пути (защита потока на всей сети) | Защита линейного тракта (участка линейного тракта) | Защита сегмента сети |
| Управление механизмом защиты | | |
| Автоматическое управление (за счет статусных сигналов оборудования) | Внешними командами системы управления | |

Время сходимости, необходимое для восстановления связи, существенным образом влияет на качество предоставляемых услуг [127], поэтому этот параметр влияет и на выбор применяемых механизмов отказоустойчивости в телекоммуникационных сетях. Исследования, проведенные в [22], показывают, что общее время от момента отказа и до полного восстановления соединения, в результате которого пользователь не почувствует значительного ухудшения качества услуги, не должно превышать 200 мс.

Кроме времени восстановления соединения, следует также брать в расчет изменение показателей надёжности сети. Поскольку показатели надёжности обладают вероятностным характером, то их оценка осуществляется на основе показателей надёжности расчётным путём всех составляющих исследуемой сети. В качестве показателя надёжности на сети связи используется коэффициент готовности, отражающий структурную надёжность сети [16]. В ГОСТ Р 53111–2008 и приказе Минцифры № 1229 от 25.11.2021 г. установлены технические нормы показателей надёжности сетей связи, таблица 1.5 [48].

Таблица 1.5 – Технические нормы показателей надёжности сети электросвязи

| Тип сети электросвязи | Наименование показателя | Норма, не менее |
|---|----------------------------------|-----------------|
| Сеть междугородной и международной телефонной связи | Коэффициент готовности (K_r) | 0,999 |
| Сеть зононой телефонной связи | | 0,9995 |
| Сеть местной телефонной связи | | 0,9999 |
| Телеграфная сеть электросвязи и сеть «Телекс» | | 0,9999 |
| Сеть передачи данных | | 0,99 |

1.3. Соглашение об уровне обслуживания

На сегодняшний день в сфере коммуникационных и информационных технологий соглашение об уровне обслуживания (Service Level Agreement, SLA), направленное на обеспечение качества услуг, играет важную роль в регулировании отношений между поставщиками и потребителями услуг, порядок их применения установлен в ряде международных и российских стандартов [46,47]. Соглашение об

уровне обслуживания – это документированное соглашение двух и более сторон, определяющее гарантированные значения показателей качества услуги связи в соответствии с уровнем обслуживания, порядок взаимодействия и ответственность сторон [17].

Для реализации соглашения оператор решает несколько важных задач, включая выбор показателей качества обслуживания и установление соответствующих нормативов для них, распределение ответственности за соблюдение установленных нормативов, организация системы мониторинга показателей качества, контроль соблюдения соглашения и информирование пользователей.

В рамках диссертационной работы из приведенных задач рассмотрим задачу по выбору показателя качества обслуживания. Данный показатель указывается в разделе «Уровень обслуживания», соглашения об уровне обслуживания.

Показатели качества обслуживания делятся на две группы: специальные, которые зависят от технологий и вида услуг и общие не зависящие от них. К специальным показателям относят показатели качества, принятые в Рекомендациях МСЭ-Т и других документах международных организаций: задержка передачи пакетов (кадров), джиттер (изменение задержки), коэффициент потери пакетов (кадров) и другие. В группу общих показателей входят: безотказность, долговечность, ремонтпригодность, сохраняемость, характеризующие количественные характеристики свойств надежности. Делятся на единичные (вероятность восстановления, средний ресурс, вероятность безотказной работы и др.) и комплексные (коэффициент оперативной готовности, коэффициент готовности и др.), в зависимости от количества измеряющих свойств надежности. Часто используемый показатель, характеризующий качество услуги с учетом работы сети является коэффициент готовности, он и выбран в качестве ключевого показателя надежности в SLA. Коэффициент готовности, определяет допустимое суммарное время неработоспособности за определенный временной период, без учета периодов предназначенных для выполнения профилактических работ, переключений, измерений и т.п. [21].

Значения показателей, которые должен гарантировать оператор, устанавливают действующие отраслевые и федеральные документы [19,51,52,53], однако в результате динамично развивающегося рынка телекоммуникационных услуг эти нормы не всегда соответствуют реалиям и оператору приходится пользоваться нормативными значениями зарубежных или отечественных операторов, взятых на основе опыта эксплуатации собственных сетей [134,136,137].

Следовательно, оценка коэффициента готовности предоставляемой услуги для оператора становится важной задачей. Основной проблемой выступает временной интервал измерений, необходимый для экспериментальных оценок, который может кратно увеличиваться при расширении структуры сети при использовании известных методов оценки структурной надежности сети. Имея возможность производить подобные расчеты по исходным данным, оператор сможет оперативно анализировать возможности сети в зависимости от запросов пользователя.

Для оператора выбор нормативных значений показателей о качестве обслуживания (коэффициента готовности) в SLA, является важным, так как не выполнение обязательств может привести к потере репутации и финансов.

1.4. Анализ методов расчета показателей надежности сложноразветвленных систем

Телекоммуникационная сеть является сложноразветвленной системой, которая при математическом описании не сводится к последовательной, параллельной или древовидной структуре. Такая система состоит из элементов (узлов и линий связи), образующих определенные структуры, обеспечивающие совокупность узлов и линий связи с их взаимосвязями и характеристиками. Телекоммуникационная сеть должна обеспечивать высокое качество обслуживания и одним из основных факторов, влияющих на это, согласно Рекомендациям МСЭ-Т E.800 является надежность. Согласно международной электротехнической комиссии, принявшей терминологический стандарт IEC 60050–192 [130], определяющей термины и определения, дается общее понятие

надежности, как способность технического объекта функционировать, как и когда требуется [45]. В [21] под надежностью понимается свойство объекта сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность объекта выполнять требуемые функции в заданных режимах, условиях применения, стратегиях технического обслуживания, хранения и транспортирования. Терминология определяется применительно к техническому объекту, к которому относится и телекоммуникационная сеть.

Надежность сети оценивается на основе показателей, которые характеризуют устойчивость сети к отказам ее элементов. Выбор показателей для анализа сети зависит от применяемой математической модели [63]. В анализе надежности сети выделяют два аспекта: структурную и элементную надежность. В работе приведен анализ структурной надежности сети, под которой будем понимать объективное свойство сети обеспечивать связность пользователей сети с качеством не хуже заданного. Основным показателем оценки этого качества является вероятность связности сети [54,82].

Для оценки структурной надежности сети используют два подхода, которые зависят от типа и характеристик сети. Первый подход – детерминированный, в нем показатели зависят от структуры сети и определяют сложность вывода ее из строя, к ним относят: связность, разрез, диаметр сети и др. Второй – вероятностный (стохастический), показатели определяют вероятностные оценки надежности, к которым относится коэффициент готовности аналитическим эквивалентом, которого является вероятность связности [74].

Анализ методов расчета надежности сложноразветвленных систем показал, что первые исследования, были проведены К. Шенноном и Э. Ф. Муром [42]. В них исследовались зависимости между надежностью сети и надежностью ее компонентов. Позднее, предложили оценивать надежность сети через ее верхнюю и нижнюю границы, так Р. Барлоу и Ф. Прошан с учетом всего множества путей и сечений графа [3], а методика Литвака-Ушакова [13] через непересекающиеся ребра и сечения графа. М. М. Егунов [25] для анализа структурной надежности

применил вероятностный граф и использовал коэффициенты готовности узлов и линий связи. В работах Н. Н. Тютин [80] предложены к анализу методы оценки надежности на основе сечений и путей систем связи при этом за основу был взят неориентированный вероятностный граф в качестве математической модели. В. В. Афанасьев [2] проанализировал явления, которые оказывают воздействия на надежность энергетической сети, с учетом таких параметров, как коэффициент готовности, вероятность безотказной работы и времени восстановления. В. П. Полесский [59,60,61], М. В. Ломоносов [35,36] определили расчет структурной надежности сети по показателям вероятности связности. Работы М. О. Болла и Дж. С. Прована [113-115] доказали, что вычисление надежности сложнразветвленных сетей с большим числом узлов является трудноразрешимой задачей. Для решения этой проблемы были применены приближенные методы оценки вероятности связности сетей [4,61]. Д. А. Мигов [39,40] предложил относительно быстрый способ определения надежности сети по показателю вероятности связности для графа с ненадежными ребрами и абсолютно надежными вершинами, однако этот способ применим к сети с небольшим числом узлов (до пяти). Это подтверждает трудность в определении точного значения показателей надежности для разветвленных систем [7].

Из приведенных выше исследований и [58,79,81], методы расчета показателей надежности сложных систем можно разделить на два подмножества: точные и приближенные [148], показатели которых используют вероятностные и детерминированные значения. Детерминированные методы характеризуются использованием собственных показателей. Стохастические одного – вероятности связности или несвязности, остальные являются производными. Недостатком детерминированных методов относят трудность анализа применяемых показателей (разная физическая природа). Вследствие этого, вероятностные методы используются чаще других и различаются способом преобразования понятия связности [4].

Согласно ГОСТ Р 53111–2008, вероятность связности – это вероятность исправного состояния хотя бы одной цепи из всех возможных цепей или (при ограничении числа транзитных участков) хотя бы одной цепи с допустимым

рангом [16]. Тогда, под структурной надежностью сети будем понимать существование хотя бы одного исправного пути для передачи информации между взаимодействующими узлами. В телекоммуникационных сетях определяют три меры связности: двухполюсную, всеполюсную и многополюсную [82,120].

При замене вероятности связности на коэффициенты готовности, становится возможным использование существующих методов анализа вероятности связности для определения структурной надежности сети. Состояние связности или несвязности сети находится с применением процедур формирования простейших графов (путь, сечение, дерево).

Практика показывает, что существующие методы оценки надежности становятся недостаточно эффективными, в результате увеличения размерности современных телекоммуникационных систем и повышения требований к их надежности [6,7]. Получение значений показателей структурной надежности с использованием известных точных методов не всегда возможно за приемлемое время из-за высокой сложности и трудоемкости вычислений [34,50,132]. А приближенные методы, обеспечивают низкую точность оценки [7]. Также существенным недостатком методов является то, что они применяются для двухполюсных и всеполюсных структур сети, в то время как, многополюсные структуры не исследованы, хотя и являются достаточно распространенными в настоящее время. Кроме того, известные методы не учитывают применяемые подходы к резервированию телекоммуникационных систем.

1.5. Постановка научной задачи диссертационного исследования

Для достижения цели исследования, анализируя особенности организации механизмов обеспечения отказоустойчивости на телекоммуникационных сетях и методов расчета показателей структурной надежности сложноразветвленных сетей, требуется осуществить формальную постановку научной задачи исследования заключающейся в:

1) разработке процедур формирования множеств простейших подграфов телекоммуникационной сети:

- двухполюсной связности в виде путей на основе алгоритма поиска в ширину и отбора соответствий по стокам;

- всеполюсной связности в виде остовых деревьев путем анализа декартовых произведений вершинных сечений на связность результирующих графов и уникальность ребер;

- многополюсной связности в виде многополюсных деревьев на основе проверки листьев графа на принадлежность к множеству полюсов;

- двухполюсной связности в виде двухполюсных минимальных сечений на основе проверки сочетаний вершинных сечений на безызбыточность;

- всеполюсной связности в виде всеполюсных минимальных сечений путем анализа декартовых произведений вершинных сечений, включающих исток и сток, а также проверку их на уникальность;

- многополюсной связности в виде многополюсных минимальных сечений, на основе отбора сечений, содержащих только полюсные вершины.

2) разработке методов расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети на основе многопеременных инверсий:

- отрицания пересечения событий связности графа, формируемых на основе множеств подграфов путей, остовых деревьев или многополюсных деревьев;

- отрицания пересечения событий несвязности графа, формируемых на основе множеств подграфов минимальных двухполюсных, всеполюсных или многополюсных сечений.

3) разработке метода расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети, поддерживающей механизмы обеспечения отказоустойчивости: защитного переключения и восстановления.

4) анализе надежности телекоммуникационной сети, на примере магистральной кабельной сети юга России, поддерживающей механизмы обеспечения отказоустойчивости.

При решении научной задачи определены ограничения и допущения:

- 1) количество узлов связи на графе сети постоянно;
- 2) надежность вершин графа абсолютна;
- 3) ребра графа сети с определенной долей вероятности не надежны и выходят из строя независимо друг от друга;
- 4) рассматривается аспект структурной надежности сети связи;
- 5) оперативность переключения каналов не учитывается.

1.6. Выводы по первому разделу

1. Современные инфокоммуникационные услуги, предоставляемые по телекоммуникационным сетям, могут быть организованы с различными требованиями к степеням связности узлов. Выделяют три типа связности: двух-, все- и многополюсную.

2. Для эффективного предоставления различных услуг по телекоммуникационным сетям с заданным качеством обслуживания (QoS) оператор должен обеспечить высокую надежность этих сетей, а также гарантировать ее согласно соглашению об уровне обслуживания (SLA). Основным показателем надежности, предоставляемой услуги в SLA, является коэффициент готовности.

3. Анализ известных методов расчета показателей надежности (вероятности связности, коэффициента готовности) сложноразветвленных систем показал, что не всегда они позволяют рассчитать точные значения данных показателей за приемлемое время, методы применимы не для всех типов связности сети и не учитывают применяемые механизмы обеспечения отказоустойчивости.

2. Процедуры формирования множества различных состояний сложноразветвленных телекоммуникационных сетей

Проведенный в первом разделе анализ показал, что в телекоммуникационной сети оператор способен предоставить своим пользователям различные сервисы с учетом трех мер связности: двух-, все- и многополюсной. При этом для обеспечения заданного качества обслуживания оператору необходимо обеспечить высокую структурную надежность сети, для расчетов которой применяются известные методы. Однако существующие методы, не всегда позволяют за приемлемое время рассчитать надежность современных сетей, имеющих большую размерность. Также известные методы применимы не ко всем мерам связности, что ограничивает анализ надежности сетей с точки зрения возможных точек тяготения циркулирующего трафика. Требуется, на основании математической модели телекоммуникационной сети, учитывающей различные типы тяготений, разработать процедуры формирования множеств простейших подграфов телекоммуникационной сети для трех мер связности на основе путей, деревьев и минимальных сечений.

2.1. Случайная графовая модель телекоммуникационной сети

Наиболее подходящей моделью для оценки надежности телекоммуникационной сети, способной предоставить различные услуги конечным пользователям, оказывается случайная графовая модель. Без применения теории графов сложно представить, как бы проводилась оценка надежности сложных системы. Систему декомпозируют на элементы в телекоммуникационной сети это сетевые устройства и линии связи между ними. Традиционным является подход, основанный на формальном представлении

телекоммуникационной сети как неориентированного графа [30,33,131] в котором узлы являются вершинами графа, а линии связи ребрами. В рамках настоящего исследования ограничимся следующим, будем считать, что сетевые устройства абсолютно надежны в отличие от линий связи, где отказы более вероятны.

В виду большого количества символов введены следующие обозначения: прямым и полужирным шрифтом \mathbf{X} – матрица, \mathbf{x} – вектор; курсивом S – множество, s – событие, также по тексту для однозначности в толкования вводится описание символов и обозначений.

Телекоммуникационную сеть, представим на основе обобщенной модели Эрдеша–Реньи [32,67], в которой рассмотрен случайный граф G с множеством вершин $V = \{1, \dots, v\}$ и мощностью v , случайными будут ребра, это соответствует внесенному ограничению об абсолютной надежности сетевых устройств. В графе G общее количество ребер $l = C_n^2$. Вероятность существования ребра между вершинами i и j обозначим как $p_{i,j} \in [0, 1]$, которая не зависит от остальных $l - 1$ ребер. Вероятность может рассматривается как коэффициент готовности и как коэффициент оперативной готовности, и как другие показатели, характеризующие работоспособность сети [57,62]. Анализу подлежат только графы без петель (псевдографы), кратных ребер (мультиграфы) и направленных ребер (орграфы). Пусть L – случайное множество ребер, полученное при реализации отдельного опыта, тогда случайный граф G принимает форму обобщенной модели Эрдеша–Реньи, т. е. $G = (V, L)$ [88,97].

Рассмотрим фрагмент телекоммуникационной сети, на примере сети MPLS с услугой виртуальной частной сети и представим его в виде графа (рисунок 2.1).

Вероятность p_G существования конкретного графа G в результате опыта определяется как [66]:

$$p_G = \prod_{(i,j) \in L} p_{i,j} \prod_{(i,j) \notin L} (1 - p_{i,j}),$$

где $(i, j) \notin L$ – неработоспособные ребра.

Тогда вероятность $p(S)$ обладания случайным графом G некоторым свойством понимается как сумма вероятностей p_G существования графов, принадлежащих множеству графов S , для которого это свойство выполняется, т. е.

$$p(S) = \sum_{G \in S} p_G. \quad (2.1)$$

Под этим свойством в телекоммуникациях рассмотрим связность сети. Тогда вероятность связности сети $p(S)$ определяется, как сумма вероятностей существования p_G всех связных графов, формирующих множество графов S .

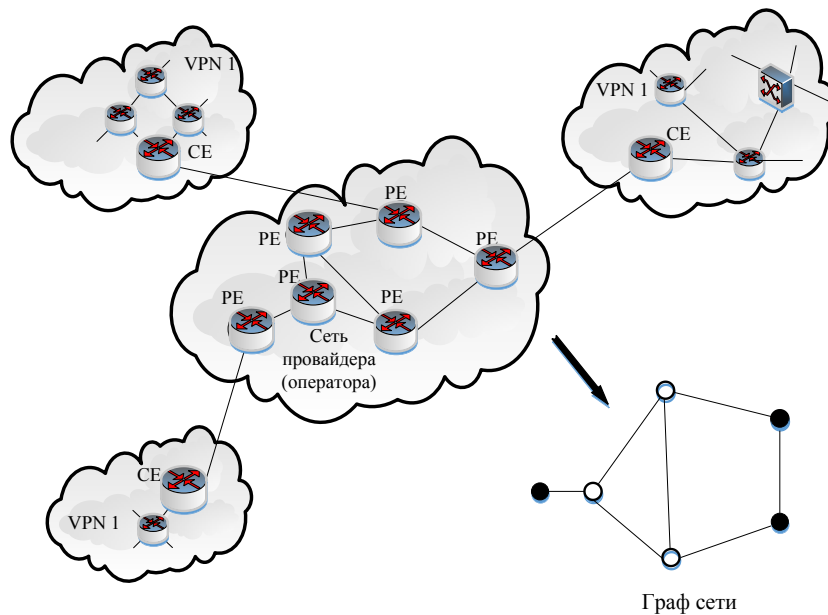


Рисунок 2.1 –Фрагмент телекоммуникационной сети и ее графическое представление:

CE – пограничный маршрутизатор пользователя;

PE – пограничный маршрутизатор провайдера.

2.1.1. Меры связности

Свойства связности сети, описывается мерами связности: все-, много- и двухполюсной. Под двухполюсной связностью описывается свойство сети, определяющее наличие не менее одного пути между заданной парой узлов. Всеполюсная связность это свойство сети, определяемое наличие не менее одного пути между любой парой узлов, что соответствует классическому определению термина связность в теории графов [77]. Тогда событие связности описывается как

наличие хотя бы одного остового дерева, содержащего все вершины случайного графа исследуемой сети, в котором существует один путь между любой парой вершин и нет циклов. Многополюсная связность это свойство сети, определяемое наличием хотя бы одного пути между заданными узлами, т.е. наличие не менее одного дерева (неостового), содержащее все множество заданных вершин случайного графа. Таким образом, многополюсная связность это общий случай всех связностей.

Тогда для общего случая, событие связности сети можно рассмотреть в виде подграфа S_i в реализации графа G , состоящего из множества заданных вершин, исходного случайного графа G являющимся деревом, листьями которого могут быть только эти вершины. В многополюсном графе подграфами S_i являются деревья, включающие заданный набор множеств вершин. Для всеполюсного графа – остовые деревья, включающие набор всех вершины случайного графа G . Для двухполюсного графа – пути [149].

Множество графов S , для которого выполняется свойство связности, определяется:

$$S = \{G: \exists S_i \subseteq G\}, \quad (2.2)$$

т. е. множество S состоит из всех графов G , для которых существует хотя бы один подграф S_i , содержащийся в графе G [88].

Анализируя вышесказанное можно сказать, что выражение (2.1) является математической моделью телекоммуникационной сети, учитывающей различные типы связности сети. А события связности или несвязности вершин графа определяются множеством простых подграфов: путь, дерево.

2.2. Формирование множества путей для двухполюсного графа сети

Процедуру формирования множества путей двухполюсного графа можно разделить на три основных этапа [96].

Исходные данные: матрица смежностей $\mathbf{A} = \{a_{i,j}\}_{i,j=1,v}$ случайного графа G [29], элементами $a_{i,j}$ которой являются:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } p_{i,j} \neq 0, \\ 0, & \text{если } p_{i,j} = 0. \end{cases}$$

Для детерминированного графа естественным упрощением, является предположение, что вероятности связности ребер $p_{i,j}$ принимают значения: нуль или единица, т. е. $p_{i,j} = \{0; 1\}$. Это представление, основано на множестве относительно надежных ребер L' :

$$L' = \{(i, j): p_{i,j} \neq 0\}.$$

Тогда в соответствии с [77] элементы матрицы связностей выражаются как:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j) \in L', \\ 0, & \text{если } (i, j) \notin L'. \end{cases}$$

Направление связи задается вершинами: истоком – v_s и стоком – v_t .

1 этап. Создают набор путей от истока ко всем возможным вершинам.

Формируется матрица путей единичной длины \mathbf{W}_1 , в которой каждый k -й столбец добавляется к созданным при существовании ребра (v_s, i) в графе G , перебор осуществляется по всем v вершинам графа:

$$\mathbf{W}_1^{(1)} = \left\{ \left[\begin{array}{c} v_s \\ \min(i) \end{array} \right] : a_{v_s, i} = 1, i = 1, \dots, v \right\}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{W}_1^{(k)} = \left\{ \left[\begin{array}{c} v_s \\ \min(i) \end{array} \right] : a_{v_s, i} = 1, [\mathbf{W}_1]_{2, k-1} < v, i = [\mathbf{W}_1]_{2, k-1} + 1, \dots, v \right\}, k \leq v, \quad (2.4)$$

где $\mathbf{X}^{(k)}$ – k -й столбец матрицы \mathbf{X} ; $\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$ – вектор, построчно составленный из элементов i и j ; $[\mathbf{X}]_{i,j}$ – элемент матрицы \mathbf{X} , стоящий на i -й строке в j -м столбце.

Если путей единичной длины нет, матрица \mathbf{W}_1 не образуется. В противном случае, матрица \mathbf{W}_1 включает пару строк. Первая состоит из элементов значения которых соответствуют номеру истока v_s . Вторая содержит все последовательно перечисленные смежные истоку вершины в порядке возрастания.

Последующие матрицы путей \mathbf{W}_m , $m = 2, \dots, v - 1$, формируются таким образом, чтобы избежать образования петель и являются матрицами путей длины m . Каждый новый k -й столбец этих матриц добавляется к созданным при существовании ребра (s', j) , $j = 1, \dots, v$, в графе G . Последовательный перебор осуществляется сначала по всем строкам матрицы \mathbf{W}_{m-1} , а затем по всем вершинам v графа:

$$\mathbf{W}_m^{(1)} = \left\{ \left[\begin{array}{c} \mathbf{W}_{m-1}^{(i)} \\ \min(j) \end{array} \right] : a_{s',j} = 1, j \notin \mathbf{W}_{m-1}^{(i)}, j = 1, \dots, v \right\}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{W}_m^{(k)} = \left\{ \left[\begin{array}{c} \mathbf{W}_{m-1}^{(i)} \\ \min(j) \end{array} \right] : a_{s',j} = 1, j \notin \mathbf{W}_{m-1}^{(i)}, [\mathbf{W}_m]_{m+1,k-1} < v, \right. \\ \left. j = [\mathbf{W}_m]_{m+1,k-1} + 1, \dots, v, s' = [\mathbf{W}_{m-1}]_{m,i}, i = 1, \dots, \text{cols}(\mathbf{W}_{m-1}) \right\}, \quad (2.6)$$

где $\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ j \end{bmatrix}$ – блочный вектор, составленный из вектора \mathbf{x} и скаляра j ;
 $j \notin \mathbf{W}_{m-1}^{(i)}$ – обозначает, что скаляр j не равен ни одному из элементов вектора $\mathbf{W}_{m-1}^{(i)}$;
 $\mathbf{W}_{m-1}^{(i)}$ – i -й столбец матрицы \mathbf{W}_{m-1} ;
 $[\mathbf{W}_m]_{m+1,k-1}$ – элемент матрицы \mathbf{W}_m , находящийся в $m + 1$ строке и $k - 1$ столбце;
 $\text{cols}(\mathbf{X})$ – число столбцов матрицы \mathbf{X} .

Путь максимальной длины в сформированном графе меньше на единицу числа вершин v графа, что соответствует матрице \mathbf{W}_{v-1} . Таким образом, образуется $v - 1$ матриц путей, стоками которой являются произвольные вершины.

2 этап. Отбирают пути, стоки которых совпадают с выбранным стоком.

Формируют матрицы путей \mathbf{W}'_m , $m = 1, \dots, v - 1$, от истока v_s к стоку v_t перебором по всем матрицам путей \mathbf{W}_m и столбцам каждой из этих матриц:

$$\mathbf{W}'_m^{(1)} = \left\{ \mathbf{W}_m^{(\min(i))} : v_t = [\mathbf{W}_m]_{m+1,i}, i = 1, \dots, \text{cols}(\mathbf{W}_m) \right\}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{W}'_m^{(k)} = \left\{ \mathbf{W}_m^{(\min(i))} : v_t = [\mathbf{W}_m]_{m+1,i}, [\mathbf{W}'_m]_{m+1,k-1} < \text{cols}(\mathbf{W}_m), \right. \\ \left. i = [\mathbf{W}'_m]_{m+1,k-1} + 1, \dots, \text{cols}(\mathbf{W}_m) \right\}. \quad (2.8)$$

Если между истоком v_s и стоком v_t нет пути длины m , матрица \mathbf{W}'_m не формируются.

3 этап. Сформированные пути преобразуют в векторную форму.

Полученные матрицы \mathbf{W}'_m преобразуются в общий вид единой матрицы путей $\mathbf{W} = \{w_{i,j}\}_{\substack{i=1,\dots,l \\ j=1,\dots,s}}$, в которой столбцы равносильны путям, а элементы строк – ребру и s – количество путей.

Присвоим каждому ребру $(i, j) \in L'$, $i, j = 1, \dots, v$, соответствующие номера $k = 1, \dots, l$, в порядке увеличения номеров инцидентных вершин. Тогда элементы матрицы путей \mathbf{W} формируются по формуле

$$w_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in L'_j, \\ 0, & \text{если } i \notin L'_j, \end{cases} \quad (2.9)$$

где $L'_j \in L'$ – j -й путь.

Процедура формирования матрицы путей \mathbf{W} на основе матриц \mathbf{W}'_m использует последовательный перебор всех столбцов ранее определенных матриц \mathbf{W}'_m , $m = 1, \dots, v - 1$:

$$w_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in \mathbf{W}'_m^{(k)}, \\ 0, & \text{если } i \notin \mathbf{W}'_m^{(k)}, \end{cases} j = \begin{cases} k, & \text{если } j \leq \text{cols}(\mathbf{W}'_1), \\ k + \sum_{r=1}^{m-1} \text{cols}(\mathbf{W}'_r), & \text{если } j > \text{cols}(\mathbf{W}'_1). \end{cases} \quad (2.10)$$

Процедуру формирование множества путей для двухполюсного графа рассмотрим на примере сети структура которой изображена на рисунке 2.2. Полюса обозначены квадратами, где исток – $v_s = 1$, сток – $v_t = 5$.

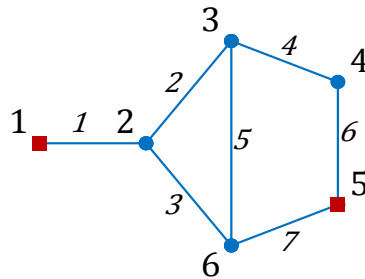


Рисунок 2.2 – Двухполюсный граф исследуемой сети связи

Матрица смежностей графа имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Граф содержит шесть вершин ($v = 6$), значит матриц путей \mathbf{W}_i – пять ($m = 5$), тогда в соответствии с (2.3)–(2.6) получаем:

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{W}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 4 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Согласно (2.7)–(2.8) непустых матриц путей от истока $v_s = 1$ к стоку $v_t = 5$ отбирается три:

$$\mathbf{W}'_1 = \mathbf{W}'_2 = \emptyset, \mathbf{W}'_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{W}'_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 6 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{W}'_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Присвоим каждому ребру графа номер, с помощью матрицы инцидентности \mathbf{B} , нумерация всех ребер графа представлена курсивным шрифтом, рисунок 2.2:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обобщенная матрица путей \mathbf{W} по выражению (2.10) имеет размер (7×4) , где $s = 4$ и определяется как:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

В соответствии с (2.12) на рисунке 2.3 представлено множество путей (простых цепей) исходного графа.

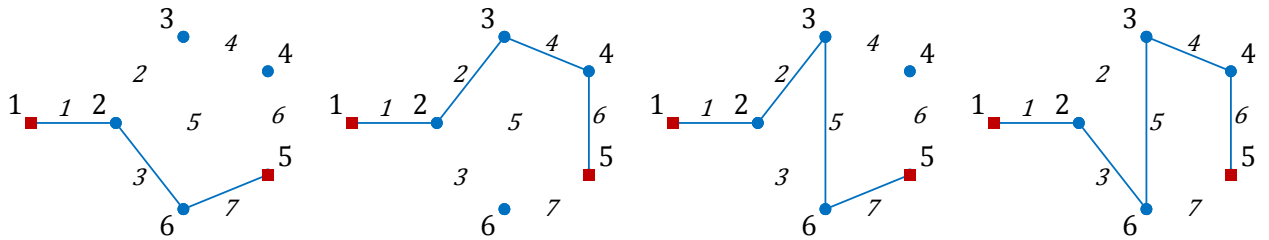


Рисунок 2.3 – Пути (простые цепи) в направлении 1–5 графа, представленного на рисунке 2.2.

2.3. Формирование множества деревьев для всеполюсного графа сети.

Подход основан на методе, заключающемся в формировании множества деревьев в форме декартового произведения $v - 1$ вершинных сечений [106,120]. Но отличающийся от него на заключительном этапе проверкой связности получаемого подграфа, который, аналогичен проверке на циклы.

Процедура формирования множества деревьев для всеполюсного графа сети состоит из четырех этапов [94].

Матрица смежностей \mathbf{A} графа G является исходными данными. Преобразуем матрицу смежностей \mathbf{A} в модифицированную матрицу смежности $\mathbf{A}' = \{a'_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,v}$, позволяющую учитывать нумерацию ребер, это необходимо для последующих вычислений. В которой элементы отличные от нуля равны номеру ребра, нумерация ребер аналогична рассмотренной ранее. Так как матрица неориентированного графа симметричная, можно рассчитать одновременно пару элементов модифицированной матрицы:

$$a'_{1,j} = a'_{j,1} = \begin{cases} \sum_{r=1}^j a_{1,r}, & \text{если } a_{i,j} = 1, \\ 0, & \text{если } a_{i,j} = 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

$$j = 1, \dots, v,$$

$$a'_{i,j} = a'_{j,i} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{r=k}^v a_{k,r} + \sum_{r=k}^j a_{i,r}, & \text{если } a_{i,j} = 1, \\ 0, & \text{если } a_{i,j} = 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

$$i = 2, \dots, v, j = 1, \dots, v.$$

1 этап. Создают $v - 1$ множество вершинных сечений.

На основе матрицы смежности формируются множества вершинных сечений, в которой отбираются элементы отличные от нуля. Для удобства последующих вычислений удалим вершину с максимальной валентностью, так как она образует наибольшее число сочетаний в декартовом произведении. Номер пропускаемой вершины определяется с применением внешнего оператора минимизации для отбора только одной вершины, если таких вершин несколько выбирается любая (например, $v_e = 1$) по формуле:

$$v_e = \min[\arg \max(\mathbf{A}\mathbf{1}_v)], \quad (2.15)$$

где $\mathbf{1}_v = \{u_i\}_{i=1, \dots, v}$ – вектор, состоящий из одних единиц длины v , $u_i = 1$.

Для удобства программной реализации, множества вершинных сечений необходимо сформировать в виде векторов сечений \mathbf{c}_r , $r = 1, \dots, v - 1$. Формирования \mathbf{c}_r происходит путем процедуры выбора по строкам отличных от нуля элементов матрицы \mathbf{A}' :

$$[\mathbf{c}_r]_1 = \{a'_{i, \min(j)} : a_{i,j} = 1, j = 1, \dots, v\}, \quad (2.16)$$

$$[\mathbf{c}_r]_k = \{a'_{i, \min(j)} : a_{i,j} = 1, [\mathbf{c}_i]_{k-1} < v, j = [\mathbf{c}_i]_{k-1} + 1, \dots, v\}, \quad (2.17)$$

$$i \neq v_e, i = 1, \dots, v, r = \begin{cases} i, & \text{если } i < v_e, \\ i - 1, & \text{если } i > v_e. \end{cases}$$

Всего синтезируется $v - 1$ векторов сечений.

2 этап. С учетом уникальности ребер определяют декартово произведение до $v - 2$ полученного множества сечений.

Производится последовательная процедура декартового умножения сформированных $v - 1$ векторов сечений с проверкой на уникальность, входящих в каждое произведение ребер. Исходной матрицей декартовых произведений \mathbf{W}_1 служит транспонированный вектор сечений первой или второй вершины ($v_e = 1$):

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{c}_1^T, \quad (2.18)$$

где T – оператор транспонирования.

Результаты декартовых произведений формируются в матрицы \mathbf{W}_r , k -й столбец каждой из которых образуется в случае отсутствия повторяющихся ребер, а последовательный перебор производится сначала по столбцам матрицы декартовых произведений \mathbf{W}_{r-1} , а затем по элементам векторов сечений \mathbf{c}_r :

$$\mathbf{W}_r^{(k)} = \left\{ \left[\begin{array}{c} \mathbf{W}_{r-1}^{(i)} \\ [\mathbf{c}_r]_j \end{array} \right] : [\mathbf{c}_r]_j \notin \mathbf{W}_{r-1}^{(i)}, i = 1, \dots, \text{cols}(\mathbf{W}_{r-1}), j = 1, \dots, \text{rows}(\mathbf{c}_r) \right\},$$

$$r = 2, \dots, v - 2, \quad (2.19)$$

где $\text{rows}(\mathbf{x})$ – число строк вектора \mathbf{x} .

3 этап. Вычисляют последнее произведение $(v - 1)$ -го множества сечений с учетом контроля уникальности ребер и связности полученного подграфа.

Последнее $v - 2$ декартово произведение дополнительно проверяется на связность с целью выявить подграфы, содержащие петли:

$$\mathbf{W}_{v-1}^{(k)} = \left\{ \left[\begin{array}{c} \mathbf{W}_{v-2}^{(i)} \\ [\mathbf{c}_{v-1}]_j \end{array} \right] : [\mathbf{c}_{v-1}]_j \notin \mathbf{W}_{v-2}^{(i)}, S \left(\left[\begin{array}{c} \mathbf{W}_{v-2}^{(i)} \\ [\mathbf{c}_{v-1}]_j \end{array} \right] \right) = 1, \right.$$

$$\left. i = 1, \dots, \text{cols}(\mathbf{W}_{v-2}), j = 1, \dots, \text{rows}(\mathbf{c}_{v-1}) \right\}, \quad (2.20)$$

где $S(\mathbf{W})$ – оператор проверки связности, если $S(\mathbf{W}) = 1$ – граф связный, при $S(\mathbf{W}) = 0$ – граф несвязный.

Реализация оператора проверки связности основывается на поиске в глубину или ширину [8]. Выбирается произвольная вершина v_1 , относительно которой начинается поиск. На каждом шаге поиска применяется вспомогательный вектор $\mathbf{w}_k = \{w_i\}_{i=1, \dots}$, изменяющийся размер в ходе итерационного процесса, а каждый шаг соответствует проверке отсутствия неучтенных в текущем векторе \mathbf{w}_k вершин. Вектор \mathbf{w}_k в начале, включает один элемент, значение которого аналогично номеру вершины поиска, т. е. $\mathbf{w}_1 = [v_1]$. На каждом k -м шаге осуществляется проверка инцидентных данной вершине вершин на присутствие в векторе \mathbf{w}_{k-1} :

$$\mathbf{w}_k = \left\{ \left[\begin{array}{c} \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{i} \end{array} \right] : \mathbf{i} = \{i\}_{i=1, \dots}, \text{если } a_{\mathbf{w}_{k-1}, i} = 1, i \notin \mathbf{w}_{k-1}, i = 1, \dots, v \right\},$$

$$k = 1, \dots, \text{rows}(\mathbf{w}_k).$$

Процесс итерации заканчивается, когда номер шага k будет больше количества элементов ($k > \text{rows}(\mathbf{w}_k)$). Далее проверяется, наличие всех вершин в конечном векторе \mathbf{w}_k :

$$S(\mathbf{A}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{rows}(\mathbf{w}_k) = v, \\ 0, & \text{если } \text{rows}(\mathbf{w}_k) > v. \end{cases}$$

4 этап. Полученные деревья преобразуют в векторную форму.

Каждое дерево, полученной матрицы \mathbf{W}_{v-1} , представлено в виде набора номеров ребер, а это затрудняет дальнейшие вычисления. Таким образом, необходимо преобразовать матрицы \mathbf{W}_{v-1} в матрицу деревьев $\mathbf{W} = \{w_{i,j}\}_{i=1,\dots,l, j=1,\dots,s}$,

где s – общее число деревьев, аналогичной матрице (2.7), элементы которой равны:

$$w_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in L'_j, \\ 0, & \text{если } i \notin L'_j, \end{cases}$$

где $L'_j \in L'$ – j -е дерево.

Тогда, процедура формирования матрицы деревьев \mathbf{W} на основе матрицы \mathbf{W}_{v-1} соответствует:

$$w_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in \mathbf{W}_{v-1}^{(j)}, \\ 0, & \text{если } i \notin \mathbf{W}_{v-1}^{(j)}, \end{cases} \quad (2.21)$$

$$i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, s.$$

Реализацию предложенной процедуры рассмотрим на примере сети структура, которой представлена на рисунке 2.4. Вершины-полюса обозначены квадратами.

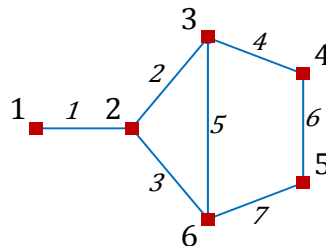


Рисунок 2.4 – Всеполюсный граф исследуемой сети связи

Матрица смежностей данного графа соответствует (2.11), а модифицированная матрица определяется по (2.13)–(2.14) и имеет вид:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

По выражению (2.15) исключим из анализа вершину $v_e = 2$, ее степень $\text{deg } v_2 = 3$. Согласно (2.16)–(2.17) отбирается пять векторов сечений:

$$\mathbf{c}_1 = [1], \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (2.18)–(2.20) формируем матрицы декартовых произведений:

$$\mathbf{W}_1 = [1], \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 & 6 \\ 6 & 7 & 7 & 7 & 6 & 7 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{W}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 6 & 6 & 6 & 4 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 6 & 7 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 3 & 5 & 3 & 5 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

По выражению (2.19) матрица деревьев имеет размер (7×11) и определяется как:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

На основе матрицы деревьев на рисунке 2.5 изображено множество остовых деревьев графа исследуемой сети.

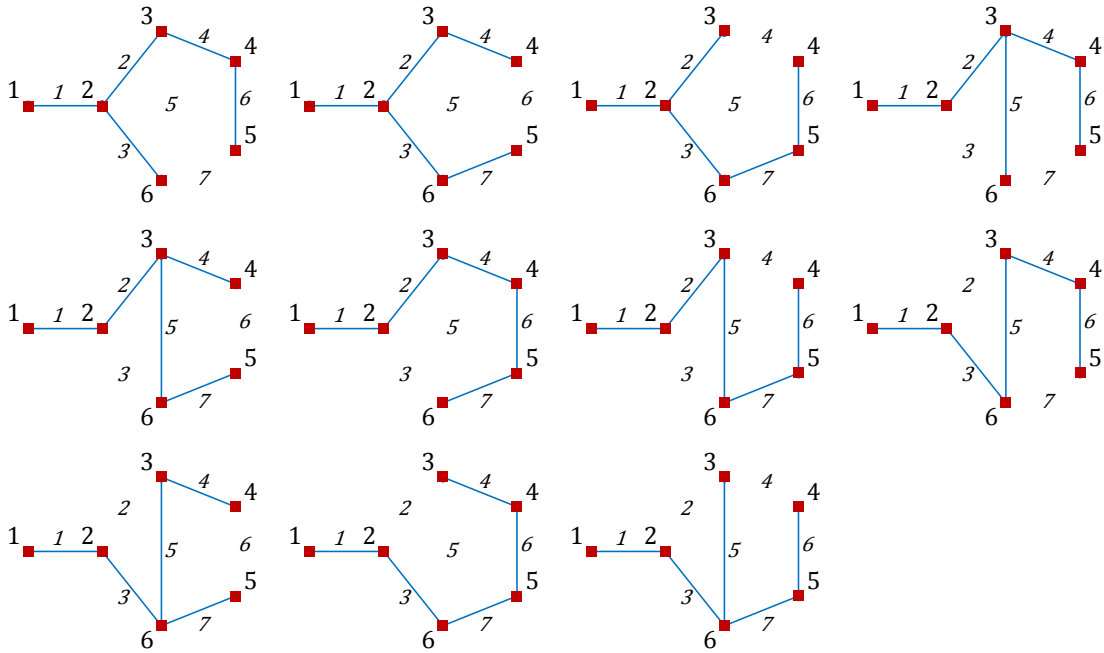


Рисунок 2.5– Остовы (остовые деревья) графа, представленного на рисунке 2.4

2.4. Формирование множества многополюсных деревьев для многополюсного графа сети

В основе процедуры лежит метод, осуществляющий переход множества остовых деревьев в многополюсные. Метод сравнивает остовые деревья с сечениями неполюсных вершин и удаляет повторяющиеся нечетное число раз ребра [120,150]. Но используя свойство многополюсного дерева можно в качестве листьев рассмотреть только полюсные вершины, что обеспечит отсев из остовых деревьев висячих вершин и формирование необходимого подграфа. Сформированное многополюсное дерево сравнивается с еще не рассмотренными остовыми деревьями, не является ли оно их подграфом, при совпадении они отсеиваются, что упрощает процесс, вследствие удаления избыточных остовых деревьев.

Процедура разбита на три этапа [95].

1 этап. Синтезируют множества остовых деревьев в форме матрицы деревьев.

Процесс описан ранее в виде соотношений (2.13)–(2.21).

По результатам которого формируется матрица \mathbf{W} остовых деревьев.

2 этап. Формируются множества неполюсных вершинных сечений.

Неполюсные вершинные сечения формируются аналогично (2.16)–(2.17) за исключением, убирается не вершина с максимальной валентностью, а вершины которые не являются полюсами и вместо векторов формируются матрицы неполюсных вершинных сечений \mathbf{C} .

Для этого, сформируем вектор с номерами неполюсных вершин. Пусть номера полюсных вершин v_i формируют вектор $\mathbf{k} = \{k_i\}_{i=1, \dots, v'}$, тогда вектор $\mathbf{k}' = \{k'_i\}_{i=1, \dots, v-v'}$: $k' = \{\{i\}: i \notin k, i = 1, \dots, v\}$ включает номера вершин не являющиеся полюсами.

Матрица неполюсных вершинных сечений $\mathbf{C} = \{c_{i,j}\}_{\substack{i=1, \dots, l \\ j=1, \dots, v-v'}}$ соответствует (2.9),

элементы которой равны:

$$c_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in L'_j, \\ 0, & \text{если } i \notin L'_j, \end{cases} \quad (2.23)$$

где $L'_j \in L'$ – j -е вершинное сечение.

Матрица строится путем сравнения элементов модифицированной матрицы \mathbf{A}' смежностей с индексами образуемой матрицы \mathbf{C} сечений:

$$c_{i,j} = \{a_{k,j}: a'_{k,j} = i, \text{ если } k = 1, \dots, v\}, i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, v - v'. \quad (2.24)$$

3 этап. Формируют в матричном виде множество многополюсных деревьев, удаляют неполюсные вершины и дубликаты остовых деревьев.

Синтез матрицы многополюсных деревьев заключается в анализе каждого остового дерева, из которого убираются неполюсные вершины. Процесс основан на сравнении текущего вектора остового дерева $\mathbf{W}^{(k)}$ с каждым столбцом матрицы неполюсных сечений \mathbf{C} . Сравнение осуществляется, до момента отсутствия неполюсных вершин. Формирование вектора \mathbf{w}_r , включающего номера ребер подграфа, осуществляется по формулам:

$$\mathbf{w}_1 = \left\{ \mathbf{W}^{(k)} - \mathbf{q}: \mathbf{q} = \left\lfloor \frac{\mathbf{W}^{(k)} + \mathbf{C}^{(i)}}{2} \right\rfloor, \text{ если } \mathbf{q}^T \mathbf{1}_l = 1, i = 1, \dots, v - v' \right\} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{w}_2 = \left\{ \mathbf{w}_1 - \mathbf{q}: \mathbf{w}_1 \neq \mathbf{W}^{(k)}, \mathbf{q} = \left\lfloor \frac{\mathbf{w}_1 + \mathbf{C}^{(i)}}{2} \right\rfloor, \text{ если } \mathbf{q}^T \mathbf{1}_l = 1, i = 1, \dots, v - v' \right\} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{w}_r = \left\{ \mathbf{w}_{r-1} - \mathbf{q}: \mathbf{w}_{r-1} \neq \mathbf{w}_{r-2}, q = \left\lfloor \frac{\mathbf{w}_{r-1} + \mathbf{C}^{(i)}}{2} \right\rfloor, \right. \\ \left. \text{если } \mathbf{q}^T \mathbf{1}_l = 1, i = 1, \dots, v - v' \right\}, r = 1, \dots \quad (2.27)$$

Когда вектор подграфа \mathbf{w}_r не изменяется ($\mathbf{w}_{r-1} = \mathbf{w}_{r-2}$), то он становится многополюсным деревом, которое записывается в виде столбца матрицы $\mathbf{W}' = \{w'_{i,j}\}_{\substack{i=1,\dots,l \\ j=1,\dots,s}}$ многополюсных деревьев, где s – число многополюсных деревьев, аналогичной структуре матрицы (2.9), элементы которой определяются по выражению:

$$w'_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in L'_j, \\ 0, & \text{если } i \notin L'_j, \end{cases}$$

где $L'_j \in L'$ – j -е многополюсное дерево.

Следовательно:

$$\mathbf{W}'^{(k)} = \mathbf{w}_r. \quad (2.28)$$

Удаление дубликатов остовых деревьев происходит сравнением, текущего многополюсного дерева \mathbf{w}_r с нерассмотренными остовыми деревьями $\mathbf{W}^{(k)}$:

$$\mathbf{W}^{(r)} = \{\mathbf{W}^{(j)}: \mathbf{w}_r \subset \mathbf{W}^{(j)}, \text{если } j = k + 1, \dots, \text{cols}(\mathbf{W})\}.$$

В итоге строится результирующая матрица \mathbf{W}' многополюсных деревьев.

Процедуру формирования многополюсных деревьев для многополюсного графа рассмотрим на примере сети структура которой изображена на рисунке 2.6. Вершины-полюса обозначены квадратами: первая, четвертая и пятая.

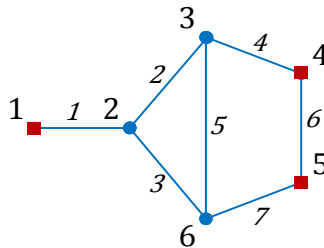


Рисунок 2.6 – Многополюсный граф (полюсы – первая, четвертая и пятая вершины) исследуемой сети связи

Сформируем вектор полюсов $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Матрица смежностей соответствует (2.11), модифицированная матрица (2.22).

Согласно выражению (2.24) матрица \mathbf{C} неполюсных вершинных сечений равна:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Применяя формулы (2.25)–(2.28) результирующая матрица \mathbf{W}' многополюсных деревьев соответствует размерам (7×7) и определяется как:

$$\mathbf{W}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

На основе матрицы многополюсных деревьев на рисунке 2.7 изображено множество многополюсных деревьев графа исследуемой сети.

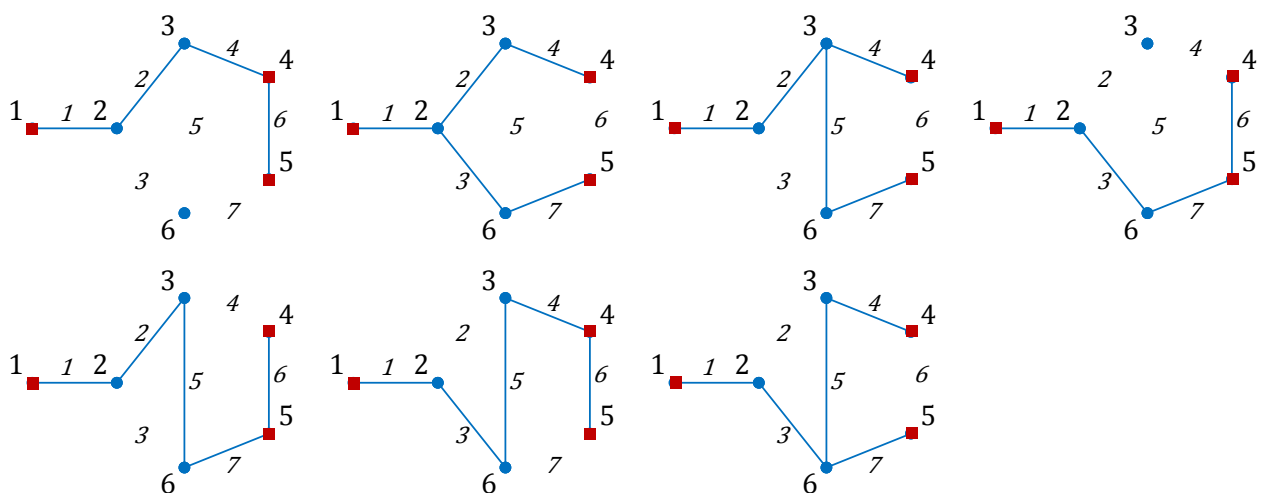


Рисунок 2.7 – Многополюсные деревья (полюсы – первая, четвертая и пятая вершины) графа, представленного на рисунке 2.5

2.5. Формирование множества минимальных двухполюсных сечений для двухполюсного графа сети

Под термином сечение (разрез) понимают набор ребер, удаление которых приводит к нарушению связности исходного графа. А под минимальным сечением набор ребер, только полное удаление которых приводит к нарушению связности исходного графа [30]. Если нет неоднозначности в толковании понятия минимальное сечение в работе, будем использовать термин сечение.

Разработанный способ использует метод формирования множества двухполюсных сечений, в основе которого задействована матрица связностей, заключающийся в переборе всех сочетаний вершинных сечений от истока и стока [107,120]. Но метод определяет не минимальные сечения и это обязывает использовать вспомогательную операцию по проверке добавляемого сечения на безызбыточность.

Предложенная процедура разбита на три этапа [97].

Исходные данные: матрица смежностей $\mathbf{A} = \{a_{i,j}\}_{i,j=1,v}$ случайного графа G .

Направление связи задается двумя вершинами: истоком – v_s и стоком – v_t .

1 этап. Формируют v множеств вершинных сечений, разделяя сечение истока и стока.

Синтез вершинных сечений схож формуле (2.24), но отличается формированием пары матриц: первая состоит из сечения истока и стока и в состав второй входят оставшиеся сечения.

Формируем вектор, включающий номера полюсных вершин $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} v_s \\ v_t \end{bmatrix}$, и вектор неполюсных вершин, состоящий из $v - 2$ элементов $\mathbf{k}' = \{\{i\}: i \notin \mathbf{k}, i = 1, \dots, v\}$.

Матрица полюсных вершинных сечений $\mathbf{C}' = \{c'_{i,j}\}_{i=1,\dots,l, j=1,2}$ и неполюсных

$\mathbf{C} = \{c_{i,j}\}_{i=1,\dots,l, j=1,v-2}$ аналогичные по структуре матрицы (2.23). Матрицы

формируются путем процедуры сравнения элементов модифицированной матрицы \mathbf{A}' смежностей с индексами образуемых матриц \mathbf{C}' или \mathbf{C} сечений:

$$c'_{i,j} = \left\{ a_{k,r}: a'_{k,r} = i, k = 1, \dots, v, r = \begin{cases} v_s, j = 1, \\ v_t, j = 2, \end{cases} i = 1, \dots, l, \right. \quad (2.29)$$

$$c_{i,j} = \left\{ a_{k,r}: a'_{k,j} = i, k = 1, \dots, v, r = \begin{cases} j, \text{ если } j < \min(v_s, v_t), \\ j - 1, \text{ если } \min(v_s, v_t) < j < \max(v_s, v_t), \\ j - 2, \text{ если } j > \max(v_s, v_t), \end{cases} \right\}, \quad (2.30)$$

$$i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, v - 2.$$

2 этап. Находят декартово произведение неполюсных сечений, до $v - 3$ полученного множества с учетом неповторяемости ребер, отсутствием ребер, принадлежащих истоку и не включенности всех ребер сечения стока в получаемое множество.

Для нахождения декартовых произведений неполюсных сечений в начале создают вектора \mathbf{w}_k неполюсных вершинных сечений, состоящие только из ребер сечения истока:

$$\mathbf{w}_k = \{ \mathbf{C}^{(i)}: \max(\mathbf{C}^{(i)} + \mathbf{C}'^{(1)}) = 2, \min(\mathbf{C}^{(i)} - \mathbf{C}'^{(2)}) \neq 0, i = 1, \dots, v - 2 \}. \quad (2.31)$$

Тождество $\max(\mathbf{C}^{(i)} + \mathbf{C}'^{(1)}) = 2$, соответствует определению неуникальных ребер сечения истока $\mathbf{C}'^{(1)}$ в неполюсном сечении $\mathbf{C}^{(i)}$, а неравенство $\min(\mathbf{C}^{(i)} - \mathbf{C}'^{(2)}) \neq 0$ – присутствия в сечении $\mathbf{C}^{(i)}$ всех ребер сечения стока $\mathbf{C}'^{(2)}$.

Далее формируются вектора \mathbf{w}_k , декартовых произведений неполюсных вершинных сечений $\mathbf{C}^{(i)}$ до порядка $v - 3$. Одновременно с контролем наличия ребер сечения истока и не включенности всех ребер сечения стока, удаляются дублируемые ребра:

$$\mathbf{w}_k = \left\{ \mathbf{c}': \mathbf{c}' = \mathbf{1}_l - \text{sign}(\mathbf{c} - \mathbf{1}_l) \odot \text{sign}(\mathbf{c} - \mathbf{1}_l), \right.$$

$$\mathbf{c} = \sum_{i_1=1}^{v-2} \sum_{i_2=i_1+1}^{v-2} \dots \sum_{i_r=i_{r-1}+1}^{v-2} \sum_{j=1}^r \mathbf{C}^{(i_j)}, \text{ если } i_j \leq v - 2, \quad (2.32)$$

$$\left. \max(\mathbf{c} + \mathbf{C}'^{(1)}) = 2, \min(\mathbf{c} - \mathbf{C}'^{(2)}) \neq 0, r = 2, \dots, v - 3 \right\},$$

где $\mathbf{x}' = \{x'_i\} = \text{sign}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ – вектор, полученный из исходного вектора $\mathbf{x} = \{x_i\}$,

каждый элемент которого $x'_i = \frac{x_i}{|x_i|} = \begin{cases} 1, \text{ если } x_i > 0 \\ 0, \text{ если } x_i = 0 \\ -1, \text{ если } x_i < 0 \end{cases}$; $\text{sign}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ – функция

сигнум; \odot – произведение Адамара [37].

Определение вектора $\mathbf{c}' = \mathbf{1}_l - \text{sign}(\mathbf{c} - \mathbf{1}_l) \odot \text{sign}(\mathbf{c} - \mathbf{1}_l)$, соответствует выявлению дублируемых ребер из декартового произведения сечений, представленного в форме суммы всех возможных перестановок векторов сечений $\mathbf{c} = \sum_{i_1=1}^{v-2} \sum_{i_2=i_1+1}^{v-2} \dots \sum_{i_r=i_{r-1}+1}^{v-2} \sum_{j=1}^r \mathbf{C}^{(i_j)}$.

3 этап. Формируется матрица двухполюсных сечений \mathbf{W} .

Вычисляются декартовы произведения полученных векторов \mathbf{w}_k на вектор сечения истока $\mathbf{C}'^{(1)}$ с удалением неуникальных ребер, проверкой добавляемого сечения на безызбыточность и добавлении сечений истока и стока:

$$\mathbf{W} = \mathbf{C}', \quad (2.33)$$

$$\mathbf{W}^{(k+2)} = \{\mathbf{w}: \mathbf{w} = \mathbf{1}_l - (\mathbf{w}_k + \mathbf{C}'^{(1)} - \mathbf{1}_l) \odot (\mathbf{w}_k + \mathbf{C}'^{(1)} - \mathbf{1}_l),$$

$$\min(\mathbf{W}^{(i)} - \mathbf{w}) \neq 0, \min(\mathbf{w} - \mathbf{W}^{(i)}) \neq 0, i = 1, \dots, k - 1\}, k = 1, \dots, \text{rows}(\mathbf{w}). \quad (2.34)$$

Проверка неравенства $\min(\mathbf{W}^{(i)} - \mathbf{w}) \neq 0$ соответствует определению принадлежности множества ребер добавляемого сечения \mathbf{w} множеству ребер уже добавленного сечения $\mathbf{W}^{(i)}$, а неравенства $\min(\mathbf{w} - \mathbf{W}^{(i)}) \neq 0$ – наоборот.

Процедуру формирования минимальных двухполюсных сечений для двухполюсного графа рассмотрим на примере сети структура которой изображена на рисунке 2.2. Полюса обозначены квадратами: исток – $v_s = 1$, сток – $v_t = 5$.

Соответственно вектор полюсов равен: $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, а вектор неполюсных

вершин: $\mathbf{k}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Матрица смежностей соответствует (2.11), модифицированная матрица (2.22).

Согласно выражению (2.29) матрица полюсных вершинных сечений имеет размер (7×2) и определяется как:

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а матрица неполюсных вершинных сечений соответствует размеру (7×4) и определяется как:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

В соответствии (2.31)–(2.32) порядок декартовых произведений равен трем:

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Из полученных столбцов матрицы \mathbf{C} остается первый $\{1\}$ – \mathbf{w}_1 , так как остальные ($\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$) не содержат ребер сечения истока. Парные комбинации оставляем те, в которых присутствует первый столбец матрицы \mathbf{C} : $\{1, 2\}$ – \mathbf{w}_2 , $\{1, 3\}$ – \mathbf{w}_3 и $\{1, 4\}$ – \mathbf{w}_4 . В комбинациях из трех столбцов оставляем только содержащие первый столбец: $\{1, 2, 3\}$ – \mathbf{w}_5 , $\{1, 2, 4\}$ – \mathbf{w}_6 , исключая комбинацию $\{1, 3, 4\}$, которая полностью включает сечение стока.

Результирующая матрица двухполюсных сечений формируется на основе (2.33)–(2.34), получаем матрицу размером (7×7) :

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

На основе матрицы двухполюсных сечений на рисунке 2.8 изображено множество двухполюсных сечений графа исследуемой сети.

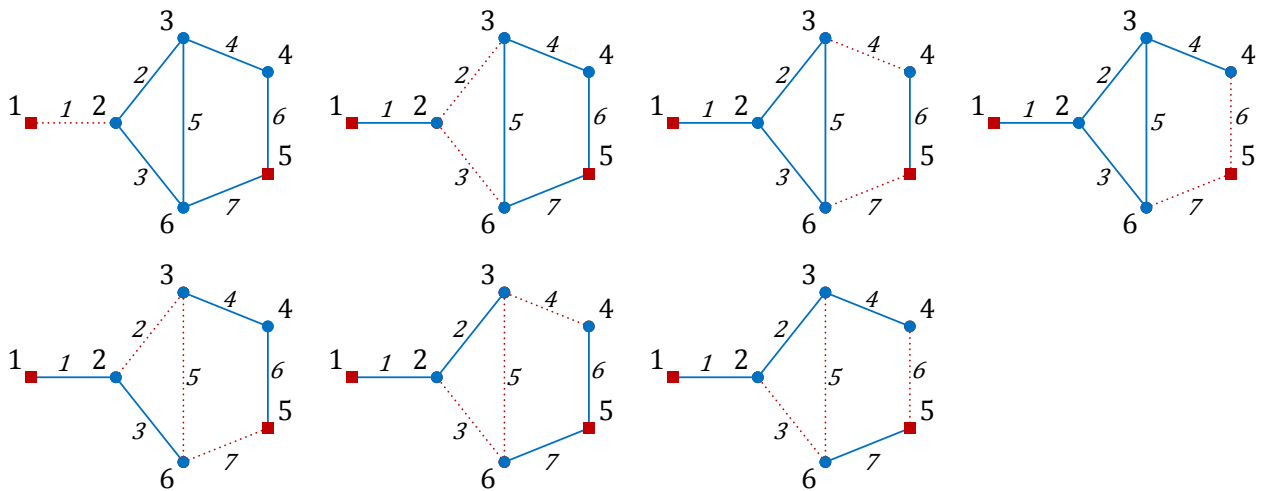


Рисунок 2.8 – Двухполюсные сечения в направлении 1–5 графа, представленного на рисунке 2.2

2.6. Формирование множества минимальных всеполюсных сечений для всеполюсного графа сети

Подход основывается на матрице связностей и осуществляет перебор всех комбинаций вершинных сечений, исключая одну, считаемую терминальной. В данном подходе используются процедуры обеспечивающие проверку на инцидентность соседних вершинных сечений и на связность графа, сформированного после удаления заданной комбинации вершинных сечений [120,140,141], однако более простым решением оказывается проверка добавляемого сечения на уникальность.

Разработанная процедура включает три этапа [97].

Исходные данные: матрица смежностей $\mathbf{A} = \{a_{i,j}\}_{i,j=1,v}$ графа G и модифицированная матрица смежностей \mathbf{A}' определяемая по (2.13)–(2.14).

1 этап. Включает процесс формирования v множеств вершинных сечений.

Вершинные сечения удобно выразить через вектор-строку номеров вершинных сечений $\mathbf{C}_1 = \mathbf{c}'^T = \{c'_i\}_{i=1,\dots,v-1}$. Вектор-строка включает номера вершин, рассматриваемых сечений. Если не рассматривать сечение первой вершины, то

$$c'_i = i + 1, i = 1, \dots, v - 1. \quad (2.36)$$

Первое уникальное всеполюсное сечение графа – это сечение первой вершины, т. е. первый столбец матрицы \mathbf{W} всеполюсных сечений формируется путем анализа первого столбца матрицы \mathbf{A} смежностей:

$$w_{i,1} = \{a_{j,1}: a'_{j,1} = i, j = 1, \dots, v\}, i = 1, \dots, l. \quad (2.37)$$

2 этап. Полученные вершинные сечения проверяют на уникальность и формируют исходное множество сочетаний вершинных сечений, состоящее из $v - 1$ множеств вершинных сечений, удаляя из рассмотрения сечения любой из вершины (например первой).

Последующие вершинные сечения в количестве $v - 1$ штук, при их уникальности, формируют столбцы матрицы \mathbf{W} всеполюсных сечений. Уникальность всех k сечений исследуется с помощью дополнительного вектора $\mathbf{w} = \{w_i\}_{i=1,\dots,l}$, определяющего соответствующее вершинное сечение, по выражению:

$$w_i = \{a_{j,k}: a'_{j,k} = i, j = 1, \dots, v\}, i = 1, \dots, l, k = 2, \dots, v, \quad (2.38)$$

он и исследуется на не повторяемость:

$$\mathbf{W}^{(k)} = \{\mathbf{w}: \min(\mathbf{w} - \mathbf{W}^{(i)}) \neq 0, i = 1, \dots, k - 1\}. \quad (2.39)$$

Далее образуются комбинации вершинных сечений в виде матриц \mathbf{C}_r сочетаний порядка r , $r = 1, \dots, v - 1$. Для вершин существует предел перебора номеров вершин, определяемый номером максимальной инцидентной вершины и задаваемый в виде вектора $\mathbf{c} = \{c_i\}_{i=1,\dots,v-1}$, элемент которого находится по матрице \mathbf{A} смежностей:

$$c_i = \{\max(j): a_{i+1,j} = 1, \text{ если } j = 1, \dots, v\}, i = 1, \dots, v - 1. \quad (2.40)$$

В итоге матрицы сочетаний \mathbf{C}_r образуются в результате перебора в первую очередь по номерам i столбцов предыдущих матриц, потом по номерам j всех допустимых вершинных сечений:

$$\mathbf{C}_r^{(k)} = \left\{ \left[\begin{array}{c} \mathbf{c}_{r-1}^{(i)} \\ c_j' \end{array} \right] : i = 1, \dots, \text{cols}(\mathbf{C}_{r-1}), \text{ если } [\mathbf{c}_{r-1}^{(i)}]_{r-1} < c_{[\mathbf{c}_{r-1}^{(i)}]_{r-1}}, \right. \\ \left. j = [\mathbf{c}_{r-1}^{(i)}]_{r-1} + 1, \dots, c_{[\mathbf{c}_{r-1}^{(i)}]_{r-1}} \right\}. \quad (2.41)$$

3 этап. Образуют возможные сочетания выбранных $v - 1$ множеств вершинных сечений, оставляя только уникальные сочетания сечений.

Уникальность всех k сочетаний сечений осуществляется с помощью дополнительного вектора $\mathbf{w} = \{w_i\}_{i=1, \dots, l}$, определяющего соответствующее сочетание по выражению:

$$w_i = \left\{ w : w = \sum_{r'=1}^r a_{j, [\mathbf{c}_k^{(k')}]_{r'}} , \text{ если } a'_{j, [\mathbf{c}_k^{(k')}]_{r'}} = i, j = 1, \dots, v \right\}, \quad (2.42)$$

$$i = 1, \dots, l, k = 2, \dots, v.$$

Из дополнительного вектора удаляют повторяющиеся ребра по формуле:

$$\mathbf{w}' = \mathbf{1}_l - \text{sign}(\mathbf{1}_l - \mathbf{w}) \odot \text{sign}(\mathbf{1}_l - \mathbf{w}), \quad (2.43)$$

и проверяют его на не повторяемость:

$$\mathbf{W}^{(k)} = \{ \mathbf{w}' : \min(\mathbf{w}' - \mathbf{W}^{(i)}) \neq 0, \text{ если } i = 1, \dots, k - 1 \}. \quad (2.44)$$

Процедуру формирование минимальных всеполюсных сечений для всеполюсного графа рассмотрим на примере сети структура которой изображена на рисунке 2.3. Полуса обозначены квадратами.

Матрица смежностей соответствует (2.11), модифицированная матрица (2.22).

По выражению (2.36) вектор-строка вершинных сечений определяется как:

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{c}'^T = [2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6].$$

Формируем первый столбец матрицы всеполюсных сечений, который соответствует первому уникальному всеполюсному сечению (2.37):

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Добавляем к нему согласно (2.38)–(2.39) четыре вершинных сечений, так как сечение второй вершины не минимально и поглощается сечением первой

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вектор \mathbf{c} пределов перебора рассчитывается по (2.40)

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Матриц \mathbf{C}_r сочетаний по (2.41) формируется пять, первая \mathbf{C}_1 известна это вектор-строка вершинных сечений

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 5 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

По выражениям (2.42)–(2.44) формируются остальные столбцы матрицы всеполюсных сечений

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Первый столбец матрицы всеполюсных сечений $\mathbf{W}^{(1)}$ сформирован из первого вершинного сечения, т. е. из $\{1\}$, $\mathbf{W}^{(2)} - \{3\}$ ($\mathbf{C}_1^{(2)}$), $\mathbf{W}^{(3)} - \{4\}$ ($\mathbf{C}_1^{(3)}$), $\mathbf{W}^{(4)} - \{5\}$ ($\mathbf{C}_1^{(4)}$), $\mathbf{W}^{(5)} - \{6\}$ ($\mathbf{C}_1^{(5)}$), остальные столбцы рассчитаны из комбинаций: $\mathbf{W}^{(6)}$ из третьего и четвертого, т. е. $\{3, 4\}$ ($\mathbf{C}_2^{(5)}$), $\mathbf{W}^{(7)} - \{4, 5\}$ ($\mathbf{C}_2^{(8)}$), $\mathbf{W}^{(8)} - \{5, 6\}$ ($\mathbf{C}_2^{(9)}$), $\mathbf{W}^{(9)} - \{3, 4, 5\}$ ($\mathbf{C}_3^{(6)}$), $\mathbf{W}^{(10)} - \{4, 5, 6\}$ ($\mathbf{C}_3^{(8)}$), $\mathbf{W}^{(11)} - \{3, 4, 5, 6\}$ ($\mathbf{C}_4^{(4)}$). Ни одна из комбинаций, содержащая сечение второй вершины не порождает минимальное сечение, поскольку данное сечение включает в себя сечение первой вершины.

На основе матрицы всеполюсных сечений на рисунке 2.9 изображено множество всеполюсных сечений графа исследуемой сети.

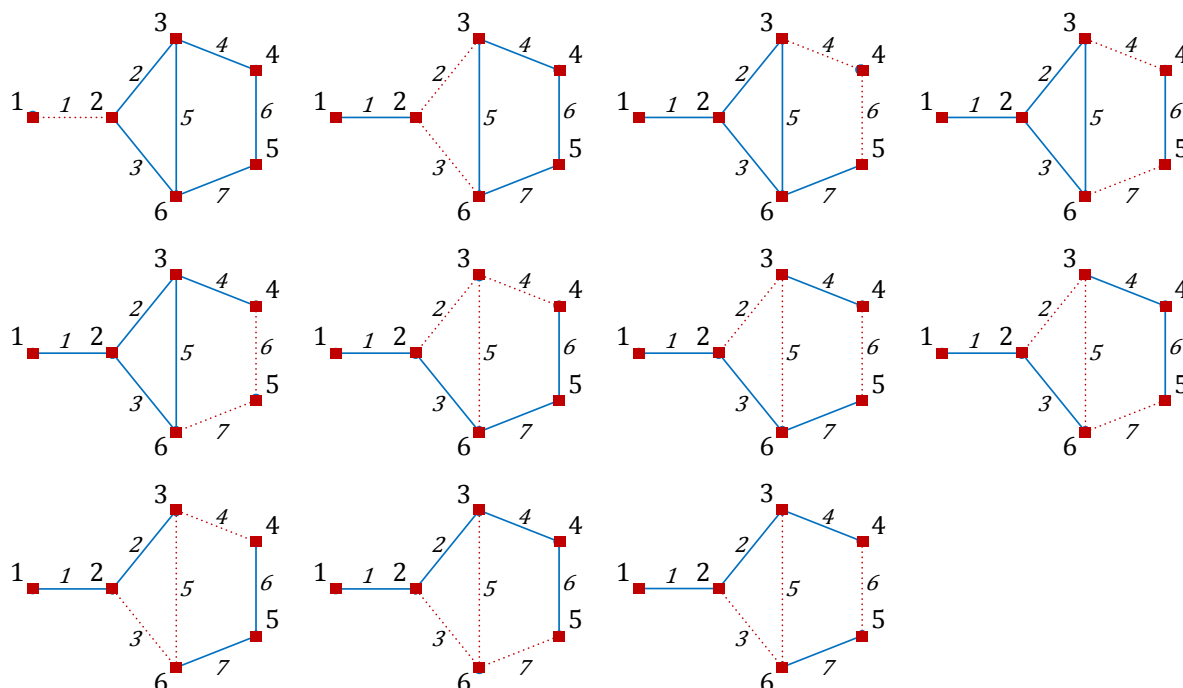


Рисунок 2.9 – Всеполюсные сечения графа, представленного на рисунке 2.4

2.7. Формирование множества минимальных многополюсных сечений для многополюсного графа сети

Подход соответствует рассмотренному в предыдущем пункте за исключением этапа выбора сочетаний, использующих для формирования матрицы сечений, из общего набора оставляют сочетания, включающие только полюсные вершины [97].

Исходные данные: матрица смежностей $\mathbf{A} = \{a_{i,j}\}_{i,j=1,v}$ случайного графа G .

По выражению (2.36) определяют вектор-строку номеров вершинных сечений $\mathbf{C}_1 = \mathbf{c}'^T = \{c'_i\}_{i=1,\dots,v-1}$.

На следующем шаге формируются вектор $\mathbf{k}' = \{k'_i\}_{i=1,\dots,v-v'}$: $\mathbf{k}' = \{i: i \notin \mathbf{k}, i = 1, \dots, v\}$, который содержит номера только неполюсных вершин и вектор $\mathbf{k} = \{k_i\}_{i=1,\dots,v'}$ состоящий из номеров вершин-полюсов v_i .

Далее формируется матрица многополюсных сечений \mathbf{W} . Первый столбец которой, определяется по анализу первого столбца матрицы \mathbf{A} смежностей, в случае, когда первая вершина будет полюсом:

$$w_{i,1} = \{a_{j,1}: i \in \mathbf{k}, a'_{j,1} = i, \text{ если } j = 1, \dots, v\}, i = 1, \dots, l. \quad (2.45)$$

Последующие вершинные сечения в количестве $v - 1$ штук, формируют столбцы матрицы \mathbf{W} многополюсных сечений при условии включенности их к полюсам и уникальности. Для чего каждому -му сечению в соответствие с формулой (2.38) необходимо определить дополнительный вектор $\mathbf{w} = \{w_i\}_{i=1,\dots,l}$, определяющий соответствующее вершинное сечение, по выражению:

$$w_i = \{a_{j,k}: i \in \mathbf{k}, \text{ если } a'_{j,k} = i, j = 1, \dots, v\}, i = 1, \dots, l, k = 2, \dots, v, \quad (2.46)$$

он и исследуется на не повторяемость в соответствии с равенством (2.39).

Далее образуются комбинации вершинных сечений в форме матриц \mathbf{C}_r сочетаний, аналогично формулам (2.40)–(2.41).

При определении по (2.42) дополнительного вектора $\mathbf{w} = \{w_i\}_{i=1,\dots,l}$ еще осуществляется контроль включенности этих вершин к полюсам по выражению

$$w_i = \left\{ w: w = \sum_{r'=1}^r a_{j, [c_k^{(k')}]}_{r'}, \text{ если } i \in \mathbf{k}, a'_{j, [c_k^{(k')}]}_{r'} = i, j = 1, \dots, v \right\} \quad (2.47)$$

$$i = 1, \dots, l, k = 2, \dots, v.$$

Исключение дублирующих ребер и проверка их уникальности выполняются по формулам (2.43)—(2.44). В итоге образуется матрица \mathbf{W} многополюсных сечений.

Процедуру формирования минимальных многополюсных сечений для многополюсного графа рассмотрим на примере сети структура которой изображена на рисунке 2.6. Вершины-полюса обозначены квадратами: первая, четвертая и пятая.

$$\text{Сформируем вектор полюсов: } \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Матрица смежностей соответствует (2.11), модифицированная матрица (2.22).

По формуле (2.36) вектор-строка вершинных сечений определяется как:

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}'^T = [2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6].$$

Так как первая вершина это полюс, то первое уникальное многополюсное сечение, которое входит в состав матрицы многополюсных сечений, рассчитывается по (2.45)

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

К сформированному столбцу присоединяют вершинные сечения четвертой и пятой вершины, так как они полюсные, рассчитываемые по (2.46) и (2.39),

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (2.40) определяется вектор \mathbf{c} пределов перебора:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

По выражению (2.41) формируются матрицы \mathbf{C}_r сочетаний:

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 5 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Согласно формулам (2.47), (2.43)–(2.44) формируются последующие столбцы матрицы многополюсных сечений:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Первый столбец матрицы многополюсных сечений $\mathbf{W}^{(1)}$ получен из первого вершинного сечения, т. е. из $\{1\}$, $\mathbf{W}^{(2)} - \{4\}$ ($\mathbf{C}_1^{(3)}$), $\mathbf{W}^{(3)} - \{5\}$ ($\mathbf{C}_1^{(4)}$), остальные столбцы рассчитаны из комбинаций: $\mathbf{W}^{(4)}$ из третьего и четвертого, т. е. $\{3, 4\}$ ($\mathbf{C}_2^{(5)}$), $\mathbf{W}^{(5)} - \{4, 5\}$ ($\mathbf{C}_2^{(8)}$), $\mathbf{W}^{(6)} - \{5, 6\}$ ($\mathbf{C}_2^{(9)}$), $\mathbf{W}^{(7)} - \{3, 4, 5\}$ ($\mathbf{C}_3^{(6)}$), $\mathbf{W}^{(8)} - \{4, 5, 6\}$ ($\mathbf{C}_3^{(8)}$), $\mathbf{W}^{(9)} - \{3, 4, 5, 6\}$ ($\mathbf{C}_4^{(4)}$). Отметим, что также ни одна из комбинаций, содержащая сечение второй вершины не порождает минимальное сечение, а, кроме того, вершинные сечения третьей и шестой вершины не порождают многополюсное сечение.

На основе матрицы многополюсных сечений на рисунке 2.10 изображено множество многополюсных сечений графа исследуемой сети.

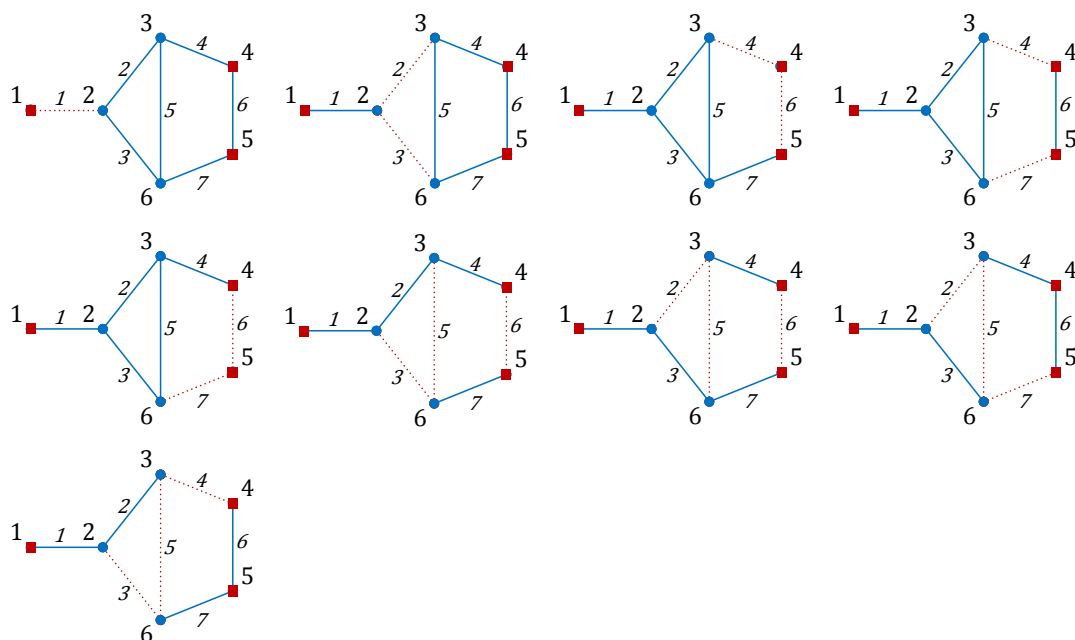


Рисунок 2.10 – Многополюсные сечения графа (полюсы – первая, четвертая и пятая вершины), представленного на рисунке 2.6

2.8. Пример формирования матриц зависимых событий на основе путей и двухполюсных сечений для мостикового графа

Реализацию разработанных процедур рассмотрим на примере мостикового графа G , изображенного на рисунке 2.11. Полюса обозначены квадратами, где исток – $v_s = 1$, сток – $v_t = 4$.

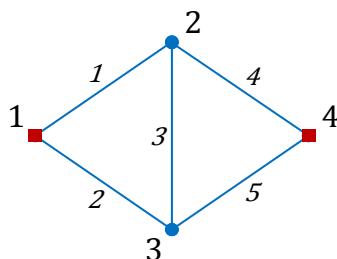


Рисунок 2.11 – Мостиковый двухполюсный граф

Определим связность двухполюсного графа по предложенным процедурам. Матрица смежностей задается формулой:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

В соответствии с (2.3)–(2.10) путей в мостиковом графе образуется четыре: 1 – {1, 4}, 2 – {2, 5}, 3 – {1, 3, 5}, 4 – {2, 3, 4}. Следовательно, матрица путей имеет вид

$$\mathbf{W}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Согласно (2.24)–(2.34) двухполюсных сечений в мостиковом графе тоже четыре: 1 – {1, 2}, 2 – {4, 5}, 3 – {1, 3, 5}, 4 – {2, 3, 4}. Тогда матрица двухполюсных сечений имеет вид

$$\mathbf{W}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

2.9. Выводы по второму разделу

На основе математической модели телекоммуникационной сети, построенной по обобщенной модели Эрдеша–Реньи, учитывающей различные типы тяготений, разработаны процедуры формирования множества различных состояний сетей.

Для двухполюсных графов сети:

– разработана процедура поиска в ширину, позволяющая в отличие от известных формировать множества путей телекоммуникационной сети между произвольными истоком и стоком на основе отбора альтернатив с соответствующим стоком;

– разработана процедура перебора сочетаний вершинных сечений, включающая в отличие от известных этап проверки добавляемого сечения на

минимальность, позволяющая формировать множества минимальных двухполюсных сечений телекоммуникационной сети с заданными истоком и стоком.

Для всеполюсных графов сети:

– разработана процедура, позволяющая в отличие от известных, на основе перебора декартовых произведений вершинных сечений, проверок на уникальность ребер и связность результирующих подграфов, формировать множества остовых деревьев телекоммуникационной сети;

– разработана процедура последовательного перебора вершинных сечений, упрощающая в отличие от известных расчет минимальных всеполюсных сечений телекоммуникационной сети, на основе анализа добавляемого сечения на уникальность.

Для многополюсных графов сети:

– разработана процедура, учитывающая в отличие от известных свойство принадлежности листьев подграфов только множеству полюсов и позволяющая формировать множества многополюсных деревьев для произвольного набора полюсов телекоммуникационной сети;

– разработана процедура, соответствующая расчету множества минимальных всеполюсных сечений, за исключением этапа выбора сочетаний, использующих для формирования матрицы сечений, из общего набора оставляют сочетания, включающие только полюсные вершины.

3. Методы расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети на основе многопеременных инверсий отрицаний пересечений событий связности или несвязности графа

3.1. Общий подход к расчету вероятности связности на основе инверсий состояний сети

Отметим, что оценка вероятности связности современных сетей может быть сложной задачей из-за большого количества составляющих в итоговом выражении. Частично разрешить эту проблему решает метод, представляющий события связности в виде сумм произведений несовместных событий [120], в научной среде называется методом объединения с учетом эффекта поглощения. Подход применяется в ГОСТ Р 53111–2008 [16]. Но даже самые совершенные модификации этого метода, применяющие многопеременную инверсию (Multiple Variable Inversion, MVI), примененную К. Д. Хейдмонном [128], как расширение однопеременной инверсии [104], имеют значительный недостаток заключающийся в обязательном—сравнении каждого слагаемого со всеми предыдущими на предмет уникальности включенных ребер, а также выполнять в ряде случаев дополнительные операции над множествами [120,149,153]. Избежать подобные процедуры возможно, если рассмотреть не объединение событий связности (несвязности), вырождающуюся в сумму несовместных произведений, а пересечение противоположных событий, которые приводят тоже к подобной сумме, но без необходимости выполнять многопеременную инверсию для каждого из слагаемых над всеми ранее проанализированными [83].

По формуле (2.1) событие связности S случайного графа G можно рассматривать как объединение событий связности всех его подграфов

$$S = \bigcup_{i=1}^s S_i,$$

где $S_i, i = 1, \dots, s$ – событие связности i -го типового подграфа (путь, дерево) графа G .

Событие S_i связности типового подграфа возникает, при условии связности всех ребер, входящих в этот подграф

$$S_i = \bigcap_{l_j \in S_i} l_j,$$

где $l_j, j = 1, \dots, l$ – событие связности (работоспособности) j -го ребра графа G .

По модели Эрдеша–Реньи все эти события независимы [67], следовательно, вероятность связности подграфа определяется как

$$P(S_i) = \prod_{l_j \in S_i} P(l_j).$$

Для события связности S графа G эта мультипликативная формула не верна, так как события связности типовых подграфов S_i могут быть зависимы из-за присутствия одинаковых ребер в них. Дублирование ребер и есть основная трудность в расчете вероятности связности, так как подграфы становятся взаимозависимы, а получаемые выражения не являются формами перехода к замещению.

Используя принцип двойственности [74] можно выразить событие несвязности \bar{S} случайного графа G , как пересечение событий несвязности типовых подграфов \bar{S}_i :

$$\bar{S} = \bigcap_{i=1}^s \bar{S}_i.$$

Используя формулу полной вероятности, вероятность связности графа $P(S)$ можно выразить через вероятность событий несвязности:

$$P(S) = 1 - P(\bar{S}) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^s \bar{S}_i\right).$$

Преимущество этого выражения заключается в том, что последующий переход к вероятностной форме не требует рассмотрения во всех суммах инверсии всех ранее учтенных подграфов [129,147]. Следовательно, для определения вероятности связности графа $P(S)$ необходимо рассмотреть вопрос, связанный с приведением событий несвязности к объединению независимых событий.

Используя принцип двойственности, можно формализовать выражение для события несвязности графа \bar{S} через события l_j связности (работоспособности) ребер:

$$\bar{S}_i = \overline{\bigcap_{l_j \in S_i} l_j} = \bigcup_{l_j \in S_i} \bar{l}_j.$$

3.1.1. Процедура приведения двух событий несвязности к объединению независимых событий

Для наглядности рассмотрим процедуру упрощения для двух произвольных подграфов. Пересечение событий связности этих двух подграфов изображено на рисунке 3.1 и выражается как:

$$S_i S_k = \bigcap_{l_j \in S_i} l_j \bigcap_{l_j \in S_k} l_j = \bigcap_{\substack{l_j \in S_i \\ l_j \in S_k}} l_j \bigcap_{\substack{l_j \in S_i \\ l_j \notin S_k}} l_j \bigcap_{\substack{l_j \notin S_i \\ l_j \in S_k}} l_j = a_{i,k} a_{i/k} a_{k/i},$$

где $a_{i,k} = \bigcap_{\substack{l_j \in S_i \\ l_j \in S_k}} l_j$ – событие связности ребер, входящих одновременно в i -й и k -й подграфы;

$a_{i/k} = \bigcap_{\substack{l_j \in S_i \\ l_j \notin S_k}} l_j$ – событие связности ребер, входящих в i -й и не входящих в k -й подграфы;

$a_{k/i} = \bigcap_{\substack{l_j \notin S_i \\ l_j \in S_k}} l_j$ – событие связности ребер, входящих в k -й и не входящих в i -й подграфы.

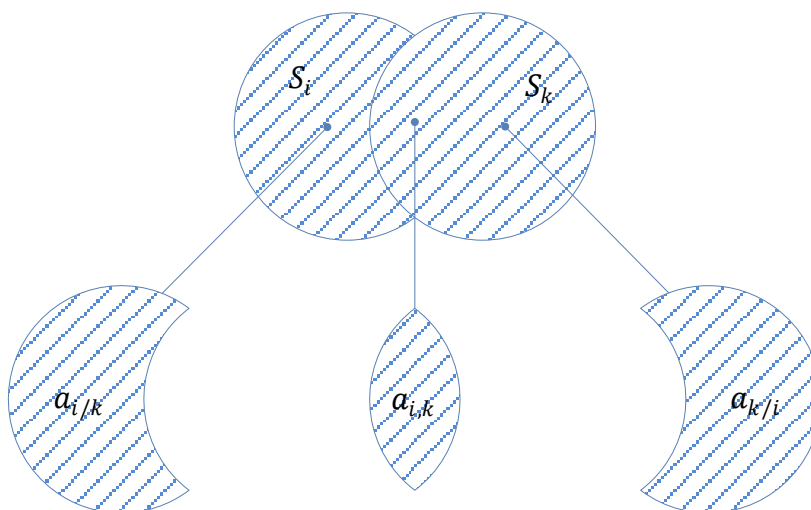


Рисунок 3.1 – Разбиение двух событий связности подграфов на независимые

В последующих выражениях обозначение пересечения – " \cap " будем опускать.

Так как полученные события $a_{i,k}$, $a_{i/k}$, $a_{k/i}$ независимы, то:

$$P(S_i S_k) = P(a_{i,k})P(a_{i/k})P(a_{k/i}).$$

События связности:

$$S_i = a_{i,k} a_{i/k}, \quad S_k = a_{i,k} a_{k/i}.$$

Тогда пересечение событий несвязности двух подграфов может быть представлено в виде объединения двух независимых событий:

$$\overline{S_i} \overline{S_k} = \overline{a_{i,k} a_{i/k}} \overline{a_{i,k} a_{k/i}} = \overline{a_{i,k}} \cup (a_{i,k} \overline{a_{i/k}} \overline{a_{k/i}}).$$

Полученное выражение относится к классической форме перехода к замещению [83]:

$$P(\overline{S_i} \overline{S_k}) = P(\overline{a_{i,k}}) + P(a_{i,k})P(\overline{a_{i/k}})P(\overline{a_{k/i}}).$$

3.1.2. Процедура приведения трех событий несвязности к объединению независимых событий

Пересечение событий несвязности для трех подграфов можно представить в виде объединения двух, но зависимых

$$\overline{S_i} \overline{S_k} \overline{S_j} = \overline{a_{i,k}} \overline{S_j} \cup (a_{i,k} \overline{a_{i/k}} \overline{a_{k/i}} \overline{S_j}).$$

Разбиение трех событий связности подграфов на независимые представлено на рисунке 3.2. Из рисунка видно, что события $a_{i,k}$ и S_j связности, можно выразить как пересечение двух событий

$$a_{i,k} = a_{i,k,j} a_{i,k/j},$$

$$S_j = a_{i,k,j} a_{j/i,k},$$

где $a_{i,k,j}$ – событие связности ребер, входящих одновременно в i -й, k -й и j -й подграфы; $a_{i,k/j}$ – событие связности ребер, входящих в i -й и k -й и не входящих в j -й подграфы; $a_{j/i,k}$ – событие связности ребер, входящих в j -й и не входящих в i -й и k -й подграфы.

Тогда:

$$\overline{a_{i,k}} \overline{S_j} = \overline{a_{i,k,j} a_{i,k/j}} \overline{a_{i,k,j} a_{j/i,k}} = \overline{a_{i,k,j}} \cup (a_{i,k,j} \overline{a_{i,k/j}} \overline{a_{j/i,k}}),$$

$$a_{i,k} \overline{S_j} = a_{i,k,j} a_{i,k/j} \overline{a_{i,k,j} a_{j/i,k}} = a_{i,k} \overline{a_{j/i,k}}.$$

В итоге пересечение событий несвязности можно записать в виде двух независимых объединений и одного зависимого:

$$\overline{S_i} \overline{S_k} \overline{S_j} = \overline{a_{l,k,j}} \cup (a_{i,k,j} \overline{a_{l,k/j}} \overline{a_{j/l,k}}) \cup (a_{i,k} \overline{a_{j/l,k}} \overline{a_{l/k}} \overline{a_{k/l}}).$$

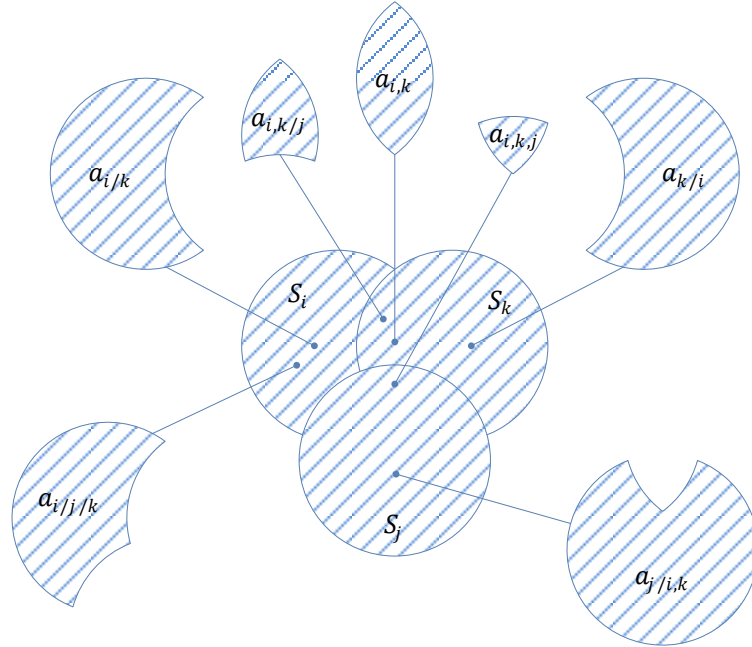


Рисунок 3.2 – Разбиение трех событий связности подграфов на независимые

В третьем объединении события $a_{i,k}$ и $a_{j/i,k}$ совместно с $a_{i/k}$ и $a_{k/i}$ – независимые, в то время как события $a_{j/i,k}$ и $a_{i/k}$ с $a_{j/i,k}$ и $a_{k/i}$ – зависимые. Дальнейшее сокращение аналогично приведенному ранее и состоит в применении последовательной процедуры разложения пересечений обратных событий в виде объединений [156]. Так как:

$$a_{j/i,k} = a_{i,j/k} a_{j/i},$$

$$a_{i/k} = a_{i,j/k} a_{i/j/k},$$

то

$$\overline{a_{j/l,k}} \overline{a_{l/k}} = \overline{a_{l,j/k} a_{j/l}} \overline{a_{l,j/k} a_{l/j/k}} = \overline{a_{l,j/k}} \cup (a_{i,j/k} \overline{a_{j/l}} \overline{a_{l/j/k}}), \text{ тогда}$$

$$\overline{S_i} \overline{S_k} \overline{S_j} = \overline{a_{l,k,j}} \cup (a_{i,k,j} \overline{a_{l,k/j}} \overline{a_{j/l,k}}) \cup (a_{i,k} \overline{a_{l,j/k}} \overline{a_{k/l}}) \cup (a_{i,k} a_{i,j/k} \overline{a_{j/l}} \overline{a_{l/j/k}} \overline{a_{k/l}}).$$

Оставшиеся зависимые события $a_{j/i}$ и $a_{k/i}$ раскладываются подобным образом:

$$a_{j/i} = a_{j,k/i} a_{j/i,k},$$

$$a_{k/i} = a_{j,k/i} a_{k/i,j},$$

$$\overline{a_{j/l}} \overline{a_{k/l}} = \overline{a_{j,k/i} a_{j/l,k}} \overline{a_{j,k/i} a_{k/l,j}} = \overline{a_{j,k/i}} \cup (a_{j,k/i} \overline{a_{j/l,k}} \overline{a_{k/l,j}}).$$

В результате образуется совокупность объединений независимых событий $\overline{S}_i \overline{S}_k \overline{S}_j = \overline{a_{i,k,j}} \cup (a_{i,k,j} \overline{a_{i,k/j}} \overline{a_{j/l,k}}) \cup (a_{i,k} \overline{a_{i,j/k}} \overline{a_{k/l}}) \cup (a_{i,k} a_{i,j/k} \overline{a_{l/j/k}} \overline{a_{j,k/l}}) \cup (a_{i,k} a_{i,j/k} a_{j,k/i} \overline{a_{l/j/k}} \overline{a_{j/l/k}} \overline{a_{k/l/j}})$,

которая является формой перехода к замещению [83], т. е.

$$P(\overline{S}_i \overline{S}_k \overline{S}_j) = P(\overline{a_{i,k,j}}) + P(a_{i,k,j})P(\overline{a_{i,k/j}})P(\overline{a_{j/l,k}}) + P(a_{i,k})P(\overline{a_{i,j/k}})P(\overline{a_{k/l}}) + P(a_{i,k})P(a_{i,j/k})P(\overline{a_{l/j/k}})P(\overline{a_{j,k/l}}) + P(a_{i,k})P(a_{i,j/k})P(a_{j,k/i})P(\overline{a_{l/j/k}})P(\overline{a_{j/l/k}})P(\overline{a_{k/l/j}}).$$

3.1.3. Рекурсивная процедура приведения нескольких событий несвязности к объединению независимых событий

Таким образом, увеличивая количество событий несвязности их можно представить в виде объединения независимых событий для четырех, пяти и т.д. подграфов. Приведение основано на рекурсивной процедуре в которой используется два преобразования.

Первое – это расщепление, графически представлено на рисунке 3.3:

$$\overline{ab} \overline{ac} = \overline{a} \cup (a \overline{b} \overline{c}), \tag{3.1}$$

где a, b, c – некоторые взаимонезависимые события.

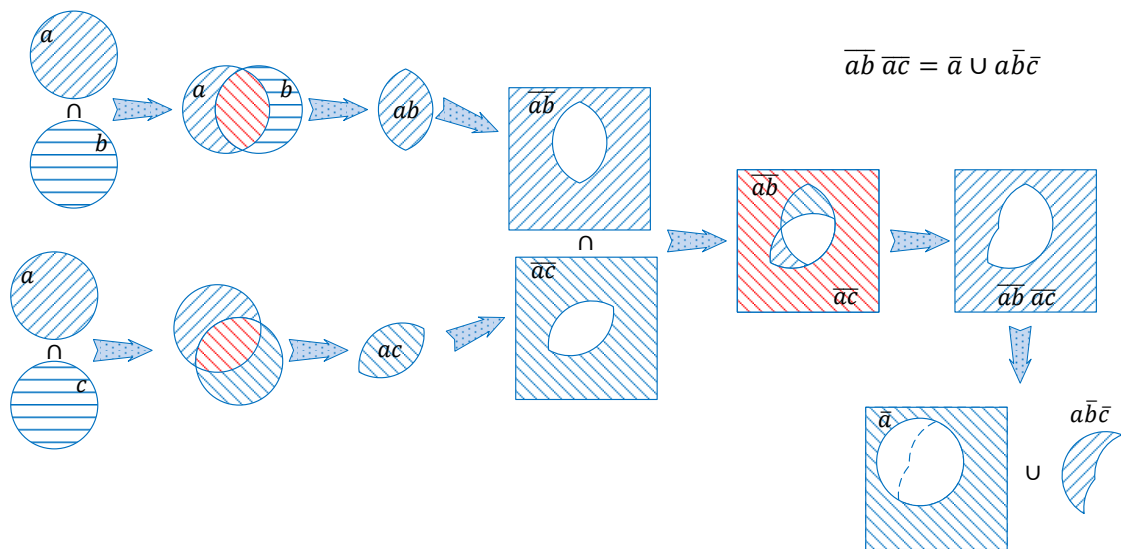


Рисунок 3.3 – Расщепление отрицаний двух зависимых событий

Когда одно из отрицаний включает другое, расщепление (3.1) вырождается в сокращение:

$$\bar{a} \bar{a} \bar{c} = \bar{a}.$$

Второе – это поглощение, графически представлено на рисунке 3.4, используется, если события связаны:

$$ab \bar{a} \bar{c} = ab \bar{c}, \quad (3.2)$$

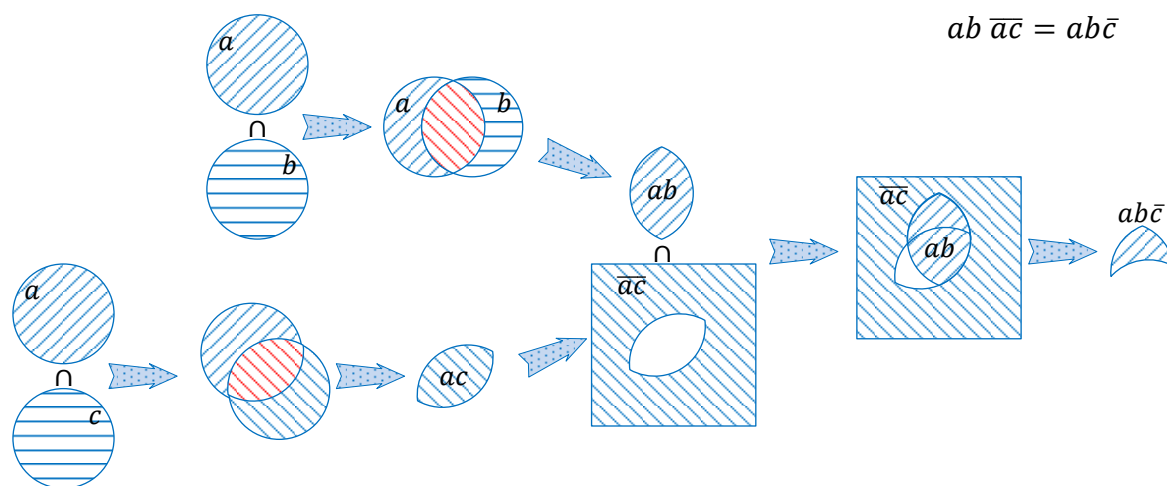


Рисунок 3.4 – Поглощение двух зависимых событий

Таким образом, данная процедура может быть выражена в виде рекурсии. Этапы которой соответствуют добавлению нового события несвязности подграфа \bar{S}_i . Иллюстрация рекурсивной процедуры представлена на рисунке 3.5.

Каждый этап рекурсивной процедуры состоит из двух итераций. Первая – это процедура поглощения (3.2) выполняется, при необходимости. Вторая – процедура расщепления (3.1) выполняется, пока события не станут независимыми. Римскими цифрами на рисунке 3.5 показаны номера этапов, в скобках указано количество выражений для событий связности, через дефис для событий несвязности. Заметим, что поглощения не увеличивают число объединений, а процедура расщепления увеличивает число объединений на единицу. В итоговых выражениях все объединения имеют одинаковое количество отрицаний, за исключением последнего, где оно увеличено на единицу.

В общем случае очевидно кратное увеличение числа объединений в итоговом выражении, но реально при применении предложенной схемы их число становится

значительно меньше, так как при осуществлении большинства операций расщепления (3.1) формируются события, включающие пересечения только независимых событий [92].

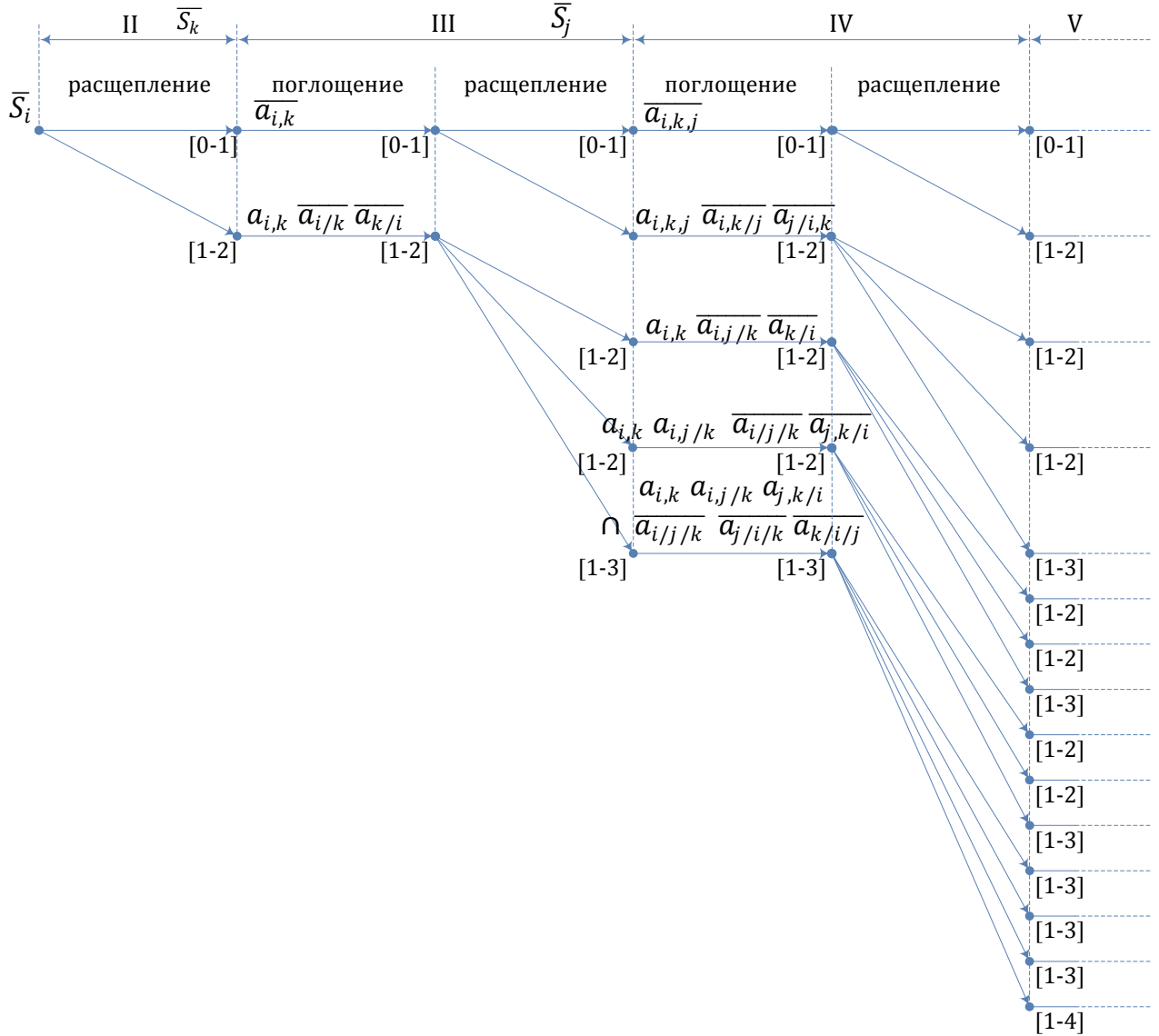


Рисунок 3.5 – Иллюстрация рекурсивной процедуры приведения выражения события несвязности графа к объединению независимых событий

Реализация предложенной процедуры рассмотрена на примере сети структура, которой представлена на рисунке 2.1. Исток и сток отмечены квадратами: $v_s = 1$, $v_t = 5$.

Определим аналитический вид события \bar{S} несвязности графа G .

Матрица смежностей графа определяется по (2.9), а матрица путей по (2.10).

На основе матрицы путей (2.12) образуется аналитический вид событий их связности:

$$S_1 = l_1 l_3 l_7, S_2 = l_1 l_2 l_4 l_6, S_3 = l_1 l_2 l_5 l_7, S_4 = l_1 l_3 l_4 l_5 l_6.$$

Возможны и эквивалентные записи в виде номеров ребер:

$$S_1 = 1 \cdot 3 \cdot 7, \quad S_2 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6, \quad S_3 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7, \quad S_4 = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6,$$

и инцидентных им вершин:

$$S_1 = 12 \cdot 26 \cdot 56, \quad S_2 = 12 \cdot 23 \cdot 34 \cdot 45,$$

$$S_3 = 12 \cdot 23 \cdot 36 \cdot 56, \quad S_4 = 12 \cdot 26 \cdot 34 \cdot 36 \cdot 45,$$

где " · " – упрощенная запись операции " ∩ " пересечения событий, а все номера вершин и ребер упорядочены в порядке невозрастания.

Пересечение событий несвязности первых двух путей:

$$\bar{S}_1 \bar{S}_2 = \bar{l}_1 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_4 \bar{l}_6.$$

Процедура расщепления (3.1) позволяет получить объединение независимых событий:

$$\bar{S}_1 \bar{S}_2 = \bar{l}_1 \cup l_1 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \bar{l}_2 \bar{l}_4 \bar{l}_6.$$

Пересечение событий несвязности первых трех путей:

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 \bar{S}_2 \bar{S}_3 &= (\bar{l}_1 \cup l_1 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \bar{l}_2 \bar{l}_4 \bar{l}_6) \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_7 \\ &= \bar{l}_1 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_7 \cup l_1 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \bar{l}_2 \bar{l}_4 \bar{l}_6 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_7. \end{aligned}$$

Применение поглощения (3.2) ко второму члену в объединении:

$$\bar{S}_1 \bar{S}_2 \bar{S}_3 = \bar{l}_1 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_7 \cup l_1 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \bar{l}_2 \bar{l}_4 \bar{l}_6 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_7,$$

с последующими однократным расщеплением (3.1) первого члена и двукратным второго делает справедливым объединение независимых событий:

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 \bar{S}_2 \bar{S}_3 &= \bar{l}_1 \cup l_1 \bar{l}_3 \bar{l}_7 (\bar{l}_2 \cup l_2 \bar{l}_4 \bar{l}_6 \bar{l}_5 \bar{l}_7) = \bar{l}_1 \cup l_1 \bar{l}_2 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \cup l_1 l_2 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \bar{l}_4 \bar{l}_6 \bar{l}_5 \bar{l}_7 \\ &= \bar{l}_1 \cup l_1 \bar{l}_2 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \cup l_1 l_2 \bar{l}_4 \bar{l}_6 (\bar{l}_7 \cup l_7 \bar{l}_3 \bar{l}_5) \\ &= \bar{l}_1 \cup l_1 \bar{l}_2 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \cup l_1 l_2 \bar{l}_4 \bar{l}_6 \bar{l}_7 \cup l_1 l_2 l_7 \bar{l}_3 \bar{l}_4 \bar{l}_6 \bar{l}_5. \end{aligned}$$

Пересечение событий несвязности всех четырех путей:

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 \bar{S}_2 \bar{S}_3 \bar{S}_4 &= (\bar{l}_1 \cup l_1 \bar{l}_2 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \cup l_1 l_2 \bar{l}_4 \bar{l}_6 \bar{l}_7 \cup l_1 l_2 l_7 \bar{l}_3 \bar{l}_4 \bar{l}_6 \bar{l}_5) \bar{l}_1 \bar{l}_3 \bar{l}_4 \bar{l}_5 \bar{l}_6 \\ &= \bar{l}_1 \bar{l}_1 \bar{l}_3 \bar{l}_4 \bar{l}_5 \bar{l}_6 \cup l_1 \bar{l}_2 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \bar{l}_1 \bar{l}_3 \bar{l}_4 \bar{l}_5 \bar{l}_6 \\ &\cup l_1 l_2 \bar{l}_4 \bar{l}_6 \bar{l}_7 \bar{l}_1 \bar{l}_3 \bar{l}_4 \bar{l}_5 \bar{l}_6 \cup l_1 l_2 l_7 \bar{l}_3 \bar{l}_4 \bar{l}_6 \bar{l}_5 \bar{l}_1 \bar{l}_3 \bar{l}_4 \bar{l}_5 \bar{l}_6. \end{aligned}$$

Применение поглощения (3.2) ко второму, третьему и четвертому членам в объединении:

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 \bar{S}_2 \bar{S}_3 \bar{S}_4 &= \bar{l}_1 \overline{l_1 l_3 l_4 l_5 l_6} \cup l_1 \bar{l}_2 \overline{l_3 l_7 l_3 l_4 l_5 l_6} \\ &\cup l_1 l_2 \overline{l_4 l_6 l_7 l_3 l_4 l_5 l_6} \cup l_1 l_2 l_7 \bar{l}_3 \overline{l_4 l_6 l_5 l_3 l_4 l_5 l_6}, \end{aligned}$$

с последующими однократным расщеплением (3.1) всех членов делает справедливым объединение независимых событий:

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \bar{S}_1 \bar{S}_2 \bar{S}_3 \bar{S}_4 = \bar{l}_1 \cup l_1 \bar{l}_2 (\bar{l}_3 \cup l_3 \bar{l}_7 \overline{l_4 l_5 l_6}) \cup l_1 l_2 \overline{l_4 l_6 l_7} \cup l_1 l_2 l_7 \bar{l}_3 \overline{l_4 l_6 l_5} \\ &= \bar{l}_1 \cup l_1 \bar{l}_2 \bar{l}_3 \cup l_1 l_3 \bar{l}_2 \overline{l_4 l_5 l_6 l_7} \cup l_1 l_2 \overline{l_4 l_6 l_7} \cup l_1 l_2 l_7 \bar{l}_3 \overline{l_4 l_6 l_5}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

которое, и является аналитическим видом события \bar{S} несвязности графа G .

Видно, что итоговое выражение (3.3) состоит из пять членов в объединении, а это значительно меньше в сравнении с общим случаем (рисунок 3.5).

3.2. Модификация подхода к расчету вероятности связности с использованием сечений

Ранее рассмотренный подход в качестве основы для расчетов использует набор типовых связных состояний, в общем случае являющихся многополюсными деревьями. Возможность получения всех сечений исследуемого графа открывает возможность использования аналогичного метода. При этом преимущества данного варианта реализации состоят, прежде всего, в том, что число сечений рассматриваемых на практике графов обычно меньше количества многополюсных деревьев, что, по крайней мере, уменьшает число перебираемых альтернатив, а зачастую приводит к существенному снижению вычислительной сложности.

Так, для двухполюсных сетей в [105] получены оценки для произвольного графа с v вершинами и l ребрами – количество простых цепей имеет порядок 2^{l-v+2} , в то время как число сечений всего 2^{v-2} . Однако следует отметить, что подобные оценки для многополюсных и даже всеполюсных сечений в настоящее время не найдены [120]. Например, если средняя степень вершины превышает четыре, то количество ребер l в графе превышает удвоенное число вершин $2v$,

а значит, порядок количества простых цепей оказывается большим порядка числа сечений, т. е. при $l > 2\nu$, $2^{l-\nu+2} > 2^{\nu+2} > 2^{\nu-2}$.

Чтобы согласовать последующие вычисления с результатами, полученными ранее, следует рассмотреть событие несвязности графа \bar{S} как объединение событий полной несвязности всех его сечений S_i , что соответствует следующему выражению

$$\bar{S} = \bigcup_{i=1}^s S_i,$$

где S_i , $i = 1, \dots, s$ – событие полной несвязности i -го сечения случайного графа G .

Событие S_i полной несвязности сечения возникает в случае несвязности всех ребер, содержащиеся в этом сечении

$$S_i = \bigcap_{l_j \in S_i} \bar{l}_j,$$

где \bar{l}_j , $j = 1, \dots, l$ – событие несвязности (неработоспособности) j -го ребра графа G .

По модели Эрдеша–Реньи все данные события независимы, тогда вероятность полной несвязности сечения

$$P(S_i) = \prod_{l_j \in S_i} P(\bar{l}_j).$$

Применяя принцип двойственности, запишем событие S связности графа G как пересечение событий \bar{S}_i связности сечений

$$S = \bigcap_{i=1}^s \bar{S}_i.$$

Тогда, основываясь на формулу полной вероятности вероятность $P(S)$ связности графа, можно выразить через вероятности событий \bar{S}_i связности сечений

$$P(S) = P\left(\bigcap_{i=1}^s \bar{S}_i\right).$$

На основе принципа двойственности формализуется выражение для события \bar{S} несвязности графа на основе событий l_j работоспособности ребер:

$$\bar{S}_i = \overline{\bigcap_{l_j \in S_i} \bar{l}_j} = \bigcup_{l_j \in S_i} l_j.$$

Таким образом, использование в качестве основы сечений подразумевает всего лишь замену в выражении для вероятности связности сети, а значит, и для всех остальных формул, событий связности подграфов на события полной несвязности сечений.

В рамках данного подхода пересечение событий S_i и S_k полной несвязности двух сечений выражается как:

$$S_i S_k = \prod_{l_j \in S_i} \bar{l}_j \prod_{l_j \in S_k} \bar{l}_j = \prod_{\substack{l_j \in S_i \\ l_j \in S_k}} \bar{l}_j \prod_{\substack{l_j \in S_i \\ l_j \notin S_k}} \bar{l}_j \prod_{\substack{l_j \notin S_i \\ l_j \in S_k}} \bar{l}_j = a_{i,k} a_{i/k} a_{k/i},$$

где $a_{i,k} = \prod_{\substack{l_j \in S_i \\ l_j \in S_k}} l_j$ – событие полной несвязности ребер, входящих одновременно

в i -е и k -е сечение; $a_{i/k} = \prod_{\substack{l_j \in S_i \\ l_j \notin S_k}} l_j$ – событие полной несвязности ребер, входящих

в i -е и не входящих в k -е сечение; $a_{k/i} = \prod_{\substack{l_j \notin S_i \\ l_j \in S_k}} l_j$ – событие полной несвязности

ребер, входящих в k -е и не входящих в i -е сечение.

Применение процедур рассмотрен на примере сети, рисунок 2.1. Полюса обозначены квадратами, где исток – $v_s = 1$, сток – $v_t = 5$.

Определим аналитический вид события S связности графа G .

Матрица смежностей графа задается формулой (2.9), а матрица двухполюсных сечений – выражением (2.33).

По матрице сечений (2.35) формируется аналитический вид событий их полной несвязности

$$S_1 = l_1, S_2 = l_6 l_7, S_3 = l_2 l_3, S_4 = l_3 l_4 l_5, S_5 = l_2 l_5 l_7, S_6 = l_3 l_5 l_6, S_7 = l_4 l_7.$$

Пересечение событий связности первых двух сечений

$$\bar{S}_1 \bar{S}_2 = \bar{l}_1 \bar{l}_6 \bar{l}_7.$$

Применение (3.1) не меняет форму независимых событий.

Пересечение событий связности первых трех сечений

$$\bar{S}_1 \bar{S}_2 \bar{S}_3 = \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_3 \bar{l}_6 \bar{l}_7.$$

Здесь также применение поглощения (3.2) и расщепления (3.1) не меняет формулы.

Пересечение событий связности первых четырех сечений

$$\bar{S}_1 \bar{S}_2 \bar{S}_3 \bar{S}_4 = \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_3 \bar{l}_6 \bar{l}_7 \bar{l}_3 \bar{l}_4 \bar{l}_5.$$

Применение поглощения (3.2) по-прежнему тривиально, а однократное расщепление (3.1) делает справедливым объединение независимых событий

$$\bar{S}_1 \bar{S}_2 \bar{S}_3 \bar{S}_4 = \bar{l}_1 \bar{l}_6 \bar{l}_7 (\bar{l}_3 \cup l_3 \bar{l}_2 \bar{l}_4 \bar{l}_5) = \bar{l}_1 \bar{l}_3 \bar{l}_6 \bar{l}_7 \cup l_3 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_4 \bar{l}_5 \bar{l}_6 \bar{l}_7.$$

Пересечение событий связности первых пяти сечений

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 \bar{S}_2 \bar{S}_3 \bar{S}_4 \bar{S}_5 &= (\bar{l}_1 \bar{l}_3 \bar{l}_6 \bar{l}_7 \cup l_3 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_4 \bar{l}_5 \bar{l}_6 \bar{l}_7) \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_7 = \\ &= \bar{l}_1 \bar{l}_3 \bar{l}_6 \bar{l}_7 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_7 \cup l_3 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_4 \bar{l}_5 \bar{l}_6 \bar{l}_7 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_7. \end{aligned}$$

Использование поглощения (3.2) также не требуется, а однократное расщепление (3.1) обоих членов объединения приводит к следующей форме

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 \bar{S}_2 \bar{S}_3 \bar{S}_4 \bar{S}_5 &= \bar{l}_1 \bar{l}_3 (\bar{l}_7 \cup l_7 \bar{l}_6 \bar{l}_2 \bar{l}_5) \cup l_3 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_4 \bar{l}_5 \bar{l}_6 \bar{l}_7 = \\ &= \bar{l}_1 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \cup l_7 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_3 \bar{l}_6 \cup l_3 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_4 \bar{l}_5 \bar{l}_6 \bar{l}_7. \end{aligned}$$

Пересечение событий связности первых шести сечений

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 \bar{S}_2 \bar{S}_3 \bar{S}_4 \bar{S}_5 \bar{S}_6 &= (\bar{l}_1 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \cup l_7 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_3 \bar{l}_6 \cup l_3 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_4 \bar{l}_5 \bar{l}_6 \bar{l}_7) \bar{l}_3 \bar{l}_5 \bar{l}_6 = \\ &= \bar{l}_1 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \bar{l}_3 \bar{l}_5 \bar{l}_6 \cup l_7 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_3 \bar{l}_6 \bar{l}_3 \bar{l}_5 \bar{l}_6 \cup l_3 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_4 \bar{l}_5 \bar{l}_6 \bar{l}_7 \bar{l}_3 \bar{l}_5 \bar{l}_6. \end{aligned}$$

Применение поглощения (3.2) к третьему члену в объединении

$$\bar{S}_1 \bar{S}_2 \bar{S}_3 \bar{S}_4 \bar{S}_5 \bar{S}_6 = \bar{l}_1 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \bar{l}_3 \bar{l}_5 \bar{l}_6 \cup l_7 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_3 \bar{l}_6 \bar{l}_3 \bar{l}_5 \bar{l}_6 \cup l_3 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_4 \bar{l}_5 \bar{l}_6 \bar{l}_7 \bar{l}_3 \bar{l}_5 \bar{l}_6,$$

с последующими однократным расщеплением (3.1) первых двух членов и двукратное расщепление третьего делает справедливым объединение независимых событий

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 \bar{S}_2 \bar{S}_3 \bar{S}_4 \bar{S}_5 \bar{S}_6 &= \bar{l}_1 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \cup l_7 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_3 \bar{l}_6 \cup l_3 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_6 \bar{l}_7 (\bar{l}_5 \cup l_5 \bar{l}_4 \bar{l}_6) = \\ &= \bar{l}_1 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \cup l_7 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_3 \bar{l}_6 \cup l_3 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_6 \bar{l}_7 \bar{l}_5 \cup l_3 l_5 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_6 \bar{l}_7 \bar{l}_4 \bar{l}_6 = \\ &= \bar{l}_1 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \cup l_7 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_3 \bar{l}_6 \cup l_3 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_6 \bar{l}_7 \cup l_3 l_5 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_4 \bar{l}_6. \end{aligned}$$

Пересечение событий связности всех семи сечений

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 \bar{S}_2 \bar{S}_3 \bar{S}_4 \bar{S}_5 \bar{S}_6 \bar{S}_7 &= (\bar{l}_1 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \cup l_7 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_3 \bar{l}_6 \cup l_3 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_6 \bar{l}_7 \cup l_3 l_5 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_4 \bar{l}_6) \bar{l}_4 \bar{l}_7 = \\ &= \bar{l}_1 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \bar{l}_4 \bar{l}_7 \cup l_7 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_3 \bar{l}_6 \bar{l}_4 \bar{l}_7 \cup l_3 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_6 \bar{l}_7 \bar{l}_4 \bar{l}_7 \cup l_3 l_5 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_4 \bar{l}_6 \bar{l}_4 \bar{l}_7. \end{aligned}$$

Применение поглощения (3.2) ко второму члену в объединении

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 \bar{S}_2 \bar{S}_3 \bar{S}_4 \bar{S}_5 \bar{S}_6 \bar{S}_7 &= \bar{l}_1 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \bar{l}_4 \bar{l}_7 \cup l_7 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_3 \bar{l}_6 \bar{l}_4 \cup \\ &\cup l_3 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_6 \bar{l}_7 \bar{l}_4 \bar{l}_7 \cup l_3 l_5 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_4 \bar{l}_6 \bar{l}_4 \bar{l}_7, \end{aligned}$$

с последующими однократным расщеплением (3.2) первого, третьего и четвертого членов делает справедливым объединение независимых событий:

$$\begin{aligned}
\bar{S} &= \bar{S}_1 \bar{S}_2 \bar{S}_3 \bar{S}_4 \bar{S}_5 \bar{S}_6 \bar{S}_7 = \bar{l}_1 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \bar{l}_4 \bar{l}_7 \cup l_7 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_3 \bar{l}_6 \bar{l}_4 \cup \\
&\quad \cup l_3 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_6 \bar{l}_7 \bar{l}_4 \bar{l}_7 \cup l_3 l_5 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_4 \bar{l}_6 \bar{l}_4 \bar{l}_7 = \\
&= \bar{l}_1 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \cup l_7 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_3 \bar{l}_4 \bar{l}_6 \cup l_3 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 (\bar{l}_7 \cup l_7 \bar{l}_6 \bar{l}_4) \cup l_3 l_5 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_4 \bar{l}_6 \bar{l}_4 \bar{l}_7 = \\
&= \bar{l}_1 \bar{l}_3 \bar{l}_7 \cup l_7 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_3 \bar{l}_4 \bar{l}_6 \cup l_3 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_5 \bar{l}_7 \cup l_3 l_7 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_4 \bar{l}_5 \bar{l}_6 \cup l_3 l_5 \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_4 \bar{l}_6,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

которое и является аналитическим видом события \bar{S} связности графа G .

Заметим, что в итоговом выражении также содержится пять членов в объединении, что значительно меньше количества для общего случая (рисунок 3.5).

3.3. Матричное представление операций и выражений для событий связности (несвязности) деревьев и сечений

Конечное выражение для события S связности (или несвязности) графа G представляет собой объединение независимых событий a_i , $i = 1, \dots, s'$,

$$S = \bigcup_{i=1}^{s'} a_i,$$

что позволяет его считать формой перехода к замещению, т. е.

$$P(S) = \sum_{i=1}^{s'} P(a_i). \tag{3.5}$$

В свою очередь каждое независимое событие a_i является пересечением нескольких других событий $a_{i,k}$, $i = 1, \dots, s'$, $k = 1, \dots, g_i + 2$:

$$a_i = \bigcap_{k=1}^{g_i} \overline{\bigcap_{l_{i,k} \in a_{i,k}} l_{i,k}} \bigcap_{l_{i,k+1} \in a_{i,k+1}} l_{i,k+1} = \bigcap_{k=1}^{g_i+1} a_{i,k}, \tag{3.6}$$

где g_i – количество групп событий несвязности в событии a_i .

Их целесообразно сгруппировать по следующему принципу. Первоначально образуются k групп событий несвязности в событии a_i :

$$a_{i,k} = \overline{\bigcap_{l_k \in a_{i,k}} l_k}, k = 1, \dots, g_i. \quad (3.7)$$

Следующей $(g_i + 1)$ -й группой является пересечение событий связности ребер (без отрицания):

$$a_{i,g_i+1} = \bigcap_{l_{g_i+1} \in a_{i,g_i+1}} l_{g_i+1}. \quad (3.8)$$

Последняя же $(g_i + 2)$ -я группа включает все достоверные события (не используемые ребра) в событии a_i :

$$a_{i,g_i+2} = \bigcap_{l_{g_i+2} \notin a_i} l_{g_i+2}. \quad (3.9)$$

При этом каждое подобное независимое событие a_i содержит лишь однократное включение простых событий связности отдельного ребра l_j , что позволяет представить его в форме вектора, а набор всех этих независимых событий как матрицу $\mathbf{Y} = \{y_{j,i}\}_{j=1,\dots,l, i=1,\dots,S'}$, каждый элемент $y_{j,i}$ которой соответствует определенному j -му ребру i -го события, а значения задаются по принципу принадлежности к определенной группе:

$$y_{j,i} = \begin{cases} k, & \text{если } l_j \in a_{i,k}, \\ 0, & \text{если } l_j \in a_{i,k+1}, \\ -1, & \text{если } l_j \notin a_i. \end{cases} \quad (3.10)$$

В результате матрицы \mathbf{W} деревьев и сечений необходимо изменить и представить в форме событий несвязности или связности. Так событие S_i связности дерева (несвязности сечения) представляет собой пересечение простых событий связности отдельных ребер, принадлежащих данному подграфу:

$$S_i = \bigcap_{l_j \in S_i} l_j.$$

Противоположное событие согласно принципу двойственности:

$$\bar{S}_i = \bigcup_{l_j \in S_i} \bar{l}_j,$$

что приводит к форме события, включающего только одну группу события несвязности, т. е. i -й столбец $\mathbf{S}^{(i)} = \{s_{j,i}\}_{j=1,\dots,l}$ приведенной матрицы деревьев (сечений) состоит только из чисел "-1" и i :

$$s_{j,i} = \begin{cases} i, & \text{если } l_j \in S_i, \\ -1, & \text{если } l_j \notin S_i. \end{cases}$$

Саму приведенную матрицу \mathbf{S} деревьев (сечений) целесообразно рассчитывать в матричном виде на основе матрицы \mathbf{W} деревьев (сечений):

$$\mathbf{S} = \mathbf{W} \odot [\mathbf{1}_l (\mathbf{u}_s + \mathbf{1}_s)^T] - \mathbf{1}_l \mathbf{1}_s^T, \quad (3.11)$$

где $\mathbf{u}_s = \{u_i\}_{i=1,\dots,s}$ – вектор размера s , составленный из возрастающих по порядку целых чисел, начиная с единицы, $u_i = i$; $\mathbf{1}_l \mathbf{1}_s^T = \{u_{i,j}\}_{i=1,\dots,l, j=1,\dots,s}$ – матрица размера

$l \times s$, составленная из одних единиц, $u_{i,j} = 1$.

Подобное представление оказывается правомочным, если учесть, что каждое новое событие связности приводит к появлению дополнительных компонент в объединении, но в независимых событиях увеличивается количество событий несвязности (с отрицанием) максимум на одно.

3.4. Матричные формы операций поглощения и расщепления

Введем обозначения для операций над матрицами (векторами), идентифицирующими определенные события (связности и несвязности).

На каждом шаге рекурсии первой выполняется операция поглощения (3.2) (рисунок 3.5). Она эквивалентна преобразованию векторов $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i=1,\dots,l}$ и $\mathbf{b} = \{b_i\}_{i=1,\dots,l}$, в результате которого сохраняется вектор \mathbf{a} и дополнительно образуется вектор $\mathbf{c} = \{c_i\}_{i=1,\dots,l}$. Вектор \mathbf{a} в общем случае является либо одним из столбцов приведенной матрицы \mathbf{S} деревьев (сечений), либо промежуточным результатом операции расщепления (3.1), что предполагает наличие в нем всех возможных значений элементов, т. е. $a_i \in \{-1, 0, 1, \dots\}$. Напротив вектор \mathbf{b} может быть исключительно столбцом приведенной матрицы \mathbf{S} деревьев (сечений),

а значит, его элементы могут принимать одно из двух значений, т. е. $b_i \in \{-1, k\}$, где k – номер дерева (сечения).

Результирующий вектор \mathbf{c} и вектор \mathbf{a} в общем случае оказываются зависимыми, т. е. эквивалентно зависимыми событиями. Только в исключительных случаях вектор \mathbf{c} оказывается заполненным всеми минус единицами, т. е. $c_i = -1$, а значит, эквивалентен недостоверному событию, что влечет за собой их независимость. Значения элементов вектора рассчитываются согласно выражению:

$$c_i = \begin{cases} -1, & \text{если } a_i = 0, \\ b_i, & \text{если } a_i \neq 0. \end{cases}$$

Используя обозначение \cup для операции поглощения, ее возможно представить в матричном виде:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \cup \mathbf{b} = \text{sign}(\mathbf{a} \odot \mathbf{a}) \odot (\mathbf{b} + \mathbf{1}_l) - \mathbf{1}_l. \quad (3.12)$$

Отметим, что операцию поглощения необходимо выполнять только в случае наличия нулевых элементов в векторе \mathbf{a} , в противном случае $\mathbf{c} = \mathbf{b}$.

Операция расщепления (3.1) оказывается более сложной. Она выполняется над векторами $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i=1, \dots, l}$ и $\mathbf{b} = \{b_i\}_{i=1, \dots, l}$ и образует матрицу $\mathbf{C} = \{c_{i,j}\}_{i=1, \dots, l, j=1, 2, 3}$. Здесь

аналогично вектор \mathbf{a} является либо одним из столбцов приведенной матрицы \mathbf{S} деревьев (сечений), либо промежуточным результатом операции расщепления (3.1), что предполагает наличие в нем всех возможных значений элементов, т. е. $a_i \in \{-1, 0, 1, \dots\}$. Вектор \mathbf{b} обладает схожими свойствами с ранее описываемым, т. е. его элементы могут принимать одно из двух значений ($b_i \in \{-1, k\}$, где k – номер дерева (сечения)), но он может быть как столбцом приведенной матрицы \mathbf{S} деревьев (сечений), так и результатом операции поглощения.

В отличие от операции поглощения (3.2) результат расщепления (3.1) определяется зависимостью исходных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , проверить которую достаточно просто. Поскольку максимальное значение вектора $\mathbf{a} > 0$, то $\max(\mathbf{a} + \mathbf{b}) > \max(\mathbf{b}) = k$ только в случае, если существуют зависимые ребра, для которых значения элементов векторов больше нуля. Если это не так, то $\max(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \max(\mathbf{b}) - 1 = k - 1$.

Матрица \mathbf{C} состоит в общем случае из одного независимого и двух зависимых столбцов и только в ситуации их независимости предполагает остановку итеративной процедуры расщепления.

Значения элементов матрицы для случая зависимых векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} ($\max(\mathbf{a} + \mathbf{b}) > \max(\mathbf{b})$) рассчитываются согласно выражениям:

$$c_{i,1} = \begin{cases} a_i, & \text{если } a_i \neq c - \max(\mathbf{b}), b_i \neq \max(\mathbf{b}), \\ -1, & \text{если } a_i = c - \max(\mathbf{b}), \\ -1, & \text{если } b_i = \max(\mathbf{b}), \end{cases}$$

$$c_{i,2} = \begin{cases} 0, & \text{если } b_i + a_i = c, \\ a_i, & \text{если } b_i + a_i \neq c, \end{cases}$$

$$c_{i,3} = \begin{cases} -1, & \text{если } b_i + a_i = c, \\ b_i, & \text{если } b_i + a_i \neq c, \end{cases}$$

где $c = \max(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ – максимальное значение элементов суммы векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} .

При условии, что одно из отрицаний событий вектора \mathbf{a} включает отрицание событий вектора \mathbf{b} , то матрица \mathbf{C} должна идентифицировать частный случай расщепления – сокращение. В результате первый столбец матрицы \mathbf{C} образуется аналогично, а второй и третий принимают упрощенный вид в случае, если $\mathbf{C}^{(1)} = \mathbf{a}$, т. е.

$$c_{i,2} = c_{i,3} = -1, \mathbf{C}^{(1)} = \mathbf{a}.$$

При независимости векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} ($\max(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \max(\mathbf{b}) - 1 < \max(\mathbf{b})$) матрица приобретает упрощенный вид:

$$c_{i,1} = \max(a_i, b_i) = a_i + b_i + 1, \quad c_{i,2} = c_{i,3} = -1.$$

Отметим, что два последних столбца матрицы \mathbf{C} в данной ситуации введены для унификации формы ее представления и, по сути, идентифицируют недостоверное событие.

Используя обозначение \Downarrow для операции расщепления, ее возможно представить в матричном виде по столбцам:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{(1)} &= (\mathbf{a} \Downarrow \mathbf{b})^{(1)} \\ &= \begin{cases} \text{sign}[\max(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{1}_l - (\mathbf{a} + \mathbf{b})] \odot (\mathbf{a} + \mathbf{1}_l) - \mathbf{1}_l, & \text{если } \max(\mathbf{a} + \mathbf{b}) > \max(\mathbf{b}), \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{1}_l, & \text{если } \max(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \leq \max(\mathbf{b}), \end{cases} \\ \mathbf{C}^{(2)} &= (\mathbf{a} \Downarrow \mathbf{b})^{(2)} = \begin{cases} \text{sign}[\max(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{1}_l - (\mathbf{a} + \mathbf{b})] \odot \mathbf{a}, & \text{если } \max(\mathbf{a} + \mathbf{b}) > \max(\mathbf{b}), \\ -\mathbf{1}_l, & \text{если } \max(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \leq \max(\mathbf{b}), \end{cases} \end{aligned}$$

$$\mathbf{c}^{(3)} = (\mathbf{a} \uplus \mathbf{b})^{(3)}$$

$$= \begin{cases} \text{sign}[\max(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{1}_l - (\mathbf{a} + \mathbf{b})] \odot (\mathbf{b} + \mathbf{1}_l) - \mathbf{1}_l, & \text{если } \max(\mathbf{a} + \mathbf{b}) > \max(\mathbf{b}), \\ -\mathbf{1}_l, & \text{если } \max(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \leq \max(\mathbf{b}), \end{cases}$$

или в целом:

$$\mathbf{C} = \mathbf{a} \uplus \mathbf{b} = \begin{cases} \mathbf{D} \odot \mathbf{E}, & \text{если } \max(\mathbf{a} + \mathbf{b}) > \max(\mathbf{b}), \\ [(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{1}_l) \quad -\mathbf{1}_l \quad -\mathbf{1}_l], & \text{если } \max(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \leq \max(\mathbf{b}), \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{D} = \text{sign}[\max(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{1}_l - (\mathbf{a} + \mathbf{b})] \cdot \mathbf{1}_3,$$

$$\mathbf{E} = [(\mathbf{a} + \mathbf{1}_l) - \mathbf{1}_l \quad \mathbf{a} \quad (\mathbf{b} + \mathbf{1}_l) - \mathbf{1}_l].$$

3.5. Матричная форма приведения нескольких событий несвязности к объединению независимых событий

Процедуру приведения событий несвязности к объединению независимых событий в матричной форме также представим в виде рекурсии. Первоначально на первом шаге выполняется расщепление первых двух столбцов приведенной матрицы \mathbf{S} деревьев (сечений), в результате которой образуется матрица:

$$\mathbf{C}_{1,1} = \mathbf{S}^{(1)} \uplus \mathbf{S}^{(2)},$$

первый столбец которой является первым столбцом в промежуточной матрице \mathbf{Y}' независимых событий:

$$\mathbf{Y}'^{(1)} = \mathbf{C}_{1,1}^{(1)}.$$

При отсутствии достоверных столбцов ($\mathbf{C}_{1,1}^{(2)} \neq -\mathbf{1}_l$) в матрице $\mathbf{C}_{1,1}$, осуществляется следующая операция, расщепление второго и третьего столбцов матрицы $\mathbf{C}_{1,1}$. Первый столбец сформированной матрицы:

$$\mathbf{C}_{1,2} = \mathbf{C}_{1,1}^{(2)} \uplus \mathbf{C}_{1,1}^{(3)}, \quad \mathbf{C}_{1,1}^{(2)} \neq -\mathbf{1}_l,$$

определяет второй столбец матрицы \mathbf{Y}' независимых событий:

$$\mathbf{Y}'^{(2)} = \mathbf{C}_{1,2}^{(1)}.$$

Поскольку в образовавшейся матрице $\mathbf{C}_{1,2}$ нет зависимых столбцов, то выполняется переход ко второму шагу, полагая:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}', \mathbf{Y}' = 0.$$

Данный шаг несколько отличается от первого, поскольку на нем необходимо выполнить последовательно процедуры поглощения и расщепления над столбцами матрицы \mathbf{Y} независимых событий и третьего дерева (сечения). Так как первый столбец \mathbf{Y} не содержит нулевых элементов, то для него операцию поглощения всегда пропускают и переходят к расщеплению, последовательность преобразования для которой практически полностью совпадает с первым шагом, т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{2,1} &= \mathbf{Y}^{(1)} \cup \mathbf{S}^{(3)}, \\ \mathbf{Y}'^{(1)} &= \mathbf{C}_{2,1}^{(1)}, \\ \mathbf{C}_{2,2} &= \mathbf{C}_{2,1}^{(2)} \cup \mathbf{C}_{2,1}^{(3)}, \mathbf{C}_{2,1}^{(2)} \neq -\mathbf{1}_l, \\ \mathbf{Y}'^{(2)} &= \mathbf{C}_{2,2}^{(1)}. \end{aligned}$$

В результате образуется два столбца матрицы \mathbf{Y}' независимых событий.

На следующей итерации необходимо провести сначала операцию поглощения над вторым столбцом матрицы \mathbf{Y} независимых событий и третьим деревом (сечением):

$$\mathbf{c}_{2,3} = \mathbf{Y}^{(2)} \cup \mathbf{S}^{(3)}.$$

Результат ее выполнения далее используется при расщеплении, итерационная процедура которой аналогична ранее описанной, т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{2,3} &= \mathbf{Y}^{(2)} \cup \mathbf{c}_{2,3}, \\ \mathbf{Y}'^{(3)} &= \mathbf{C}_{2,3}^{(1)}, \\ \mathbf{C}_{2,4} &= \mathbf{C}_{2,3}^{(2)} \cup \mathbf{C}_{2,3}^{(3)}, \mathbf{C}_{2,3}^{(2)} \neq -\mathbf{1}_l, \\ \mathbf{Y}'^{(4)} &= \mathbf{C}_{2,4}^{(1)}, \\ \mathbf{C}_{2,5} &= \mathbf{C}_{2,4}^{(2)} \cup \mathbf{C}_{2,4}^{(3)}, \mathbf{C}_{2,4}^{(2)} \neq -\mathbf{1}_l, \\ \mathbf{Y}'^{(5)} &= \mathbf{C}_{2,5}^{(1)}, \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{Y}', \mathbf{Y}' = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Таким образом, после двух шагов процедуры приведения формируется матрица \mathbf{Y} независимых событий размером $l \times 5$. Естественно, что далее на третьем шаге выполняется преобразование над всеми ее столбцами

и в общем случае сформируется еще пятнадцать столбцов матрицы \mathbf{Y} независимых событий, и она станет размером $l \times 15$.

В результате на каждом шаге выполняется две подпроцедуры, первая из которых включает только операцию расщепления, а вторая и операцию поглощения и расщепления. В общем виде преобразования на i -ом шаге, за исключением первого, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_{i,1} &= \mathbf{Y}^{(1)} \uplus \mathbf{S}^{(i+1)}, \\
 \mathbf{Y}'^{(1)} &= \mathbf{C}_{i,1}^{(1)}, \\
 \mathbf{C}_{i,2} &= \mathbf{C}_{i,1}^{(2)} \uplus \mathbf{C}_{i,1}^{(3)}, \mathbf{C}_{i,1}^{(2)} \neq -\mathbf{1}_l, \\
 \mathbf{Y}'^{(2)} &= \mathbf{C}_{i,2}^{(1)}, \\
 \mathbf{c}_{i,3} &= \mathbf{Y}^{(2)} \uplus \mathbf{S}^{(i+1)}, \\
 \mathbf{C}_{i,3} &= \mathbf{Y}^{(2)} \uplus \mathbf{c}_{i,3}, \\
 \mathbf{Y}'^{(3)} &= \mathbf{C}_{i,3}^{(1)}, \\
 \mathbf{C}_{i,4} &= \mathbf{C}_{i,3}^{(2)} \uplus \mathbf{C}_{i,3}^{(3)}, \mathbf{C}_{i,3}^{(2)} \neq -\mathbf{1}_l, \\
 \mathbf{Y}'^{(4)} &= \mathbf{C}_{i,4}^{(1)}, \\
 \mathbf{c}_{i,j} &= \mathbf{Y}^{(k')} \uplus \mathbf{S}^{(i+1)}, \\
 \mathbf{C}_{i,j} &= \mathbf{Y}^{(k')} \uplus \mathbf{c}_{i,3}, \\
 \mathbf{Y}'^{(k)} &= \mathbf{C}_{i,j}^{(1)}, \\
 \mathbf{C}_{i,j+1} &= \mathbf{C}_{i,j}^{(2)} \uplus \mathbf{C}_{i,j}^{(3)}, \mathbf{C}_{i,j}^{(2)} \neq -\mathbf{1}_l, \\
 \mathbf{Y}'^{(k+1)} &= \mathbf{C}_{i,j}^{(1)},
 \end{aligned}$$

где k – номер формируемого столбца матрицы \mathbf{Y}' независимых событий; k' – номер анализируемого столбца матрицы \mathbf{Y} независимых событий; j – номер итерации в рамках шага.

Применение процедуры рассмотрим на сети структура которой изображена на рисунке 2.2. Полюса обозначены квадратами, где исток – $v_s = 1$, сток – $v_t = 5$. Определим матрицу независимых событий на основе деревьев и сечений.

Матрица смежностей графа определяется по (2.11), а матрицы путей (простых цепей) и двухполюсных сечений – выражениями (2.12) и (2.35) соответственно.

Первоначально рассмотрим процедуры на основе матриц путей (2.12).

Используя формулу (3.11) матрицу путей (2.12), вычисляем приведенную матрицу \mathbf{S} деревьев (путей):

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Первый шаг.

Расщепление (3.13) первых двух столбцов приведенной матрицы \mathbf{S} деревьев, позволяет сформировать матрицу:

$$\mathbf{C}_{1,1} = \mathbf{S}^{(1)} \uplus \mathbf{S}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

первый столбец которой является первым столбцом в матрице \mathbf{Y}' независимых событий:

$$\mathbf{Y}'^{(1)} = \mathbf{C}_{1,1}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку в матрице $\mathbf{C}_{1,1}$ отсутствуют достоверные столбцы ($\mathbf{C}_{1,1}^{(2)} \neq -\mathbf{1}_l$), то выполняется расщепление второго и третьего столбцов матрицы $\mathbf{C}_{1,1}$:

$$\mathbf{C}_{1,2} = \mathbf{C}_{1,1}^{(2)} \cup \mathbf{C}_{1,1}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Первый столбец сформированной матрицы определяет второй столбец матрицы \mathbf{Y}' независимых событий:

$$\mathbf{Y}^{(2)} = \mathbf{C}_{1,2}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку в образовавшейся матрице $\mathbf{C}_{1,2}$ нет достоверных столбцов, то выполняется переход ко второму шагу, полагая:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Y}' = 0.$$

Второй шаг.

Так как первый столбец \mathbf{Y}' не содержит нулевых элементов, то для него операцию поглощения пропускают и переходят к расщеплению:

$$\mathbf{C}_{2,1} = \mathbf{Y}^{(1)} \cup \mathbf{S}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что второй и третий столбцы этой матрицы равны достоверному ($\mathbf{C}_{2,1}^{(2)} \neq -\mathbf{1}_I$), так как $\mathbf{C}_{2,1}^{(1)} = \mathbf{Y}^{(1)}$, что свидетельствует о частном случае расщепления – поглощении:

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

На этом первая итерация второго шага заканчивается, поскольку $\mathbf{C}_{2,1}^{(1)} = -\mathbf{1}_l$. На следующей итерации необходимо провести сначала операцию поглощения над вторым столбцом матрицы \mathbf{Y} независимых событий и третьим деревом:

$$\mathbf{c}_{2,3} = \mathbf{Y}^{(2)} \cup \mathbf{S}^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Результат ее выполнения далее используется при расщеплении:

$$\mathbf{C}_{2,3} = \mathbf{Y}^{(2)} \cup \mathbf{c}_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}^{(2)} = \mathbf{C}_{2,3}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Так как матрица $\mathbf{C}_{2,3}$ не содержит достоверных столбцов, то выполняется следующая итерация:

$$\mathbf{C}_{2,4} = \mathbf{C}_{2,3}^{(2)} \uplus \mathbf{C}_{2,3}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}'^{(3)} = \mathbf{C}_{2,4}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Так как матрица $\mathbf{C}_{2,4}$ содержит независимые столбцы, то:

$$\mathbf{C}_{2,5} = \mathbf{C}_{2,4}^{(2)} \uplus \mathbf{C}_{2,4}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}'^{(4)} = \mathbf{C}_{2,5}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку в образовавшейся матрице $\mathbf{C}_{2,5}$ нет достоверных столбцов, то выполняется переход к третьему шагу, полагая:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Y}' = 0.$$

Далее опишем лишь названия процедур без полного обоснования.

Третий шаг.

Расщепление (сокращение):

$$\mathbf{C}_{3,1} = \mathbf{Y}^{(1)} \downarrow \mathbf{S}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Поглощение:

$$\mathbf{c}_{3,1} = \mathbf{Y}^{(2)} \downarrow \mathbf{S}^{(4)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Расщепление:

$$\mathbf{C}_{3,2} = \mathbf{Y}^{(2)} \downarrow \mathbf{c}_{3,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}^{(2)} = \mathbf{C}_{3,2}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Расщепление:

$$\mathbf{C}_{3,3} = \mathbf{C}_{3,2}^{(2)} \cup \mathbf{C}_{3,2}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}^{(3)} = \mathbf{C}_{3,3}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Поглощение:

$$\mathbf{c}_{3,3} = \mathbf{Y}^{(3)} \cup \mathbf{S}^{(4)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Расщепление (сокращение):

$$\mathbf{C}_{3,4} = \mathbf{Y}^{(3)} \cup \mathbf{c}_{3,3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}^{(4)} = \mathbf{C}_{3,4}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Поглощение:

$$\mathbf{c}_{3,4} = \mathbf{Y}^{(4)} \cup \mathbf{S}^{(4)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Расщепление (сокращение):

$$\mathbf{C}_{3,4} = \mathbf{Y}^{(3)} \cup \mathbf{c}_{3,3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}'^{(4)} = \mathbf{C}_{3,4}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В результате формируется окончательная матрица \mathbf{Y} независимых событий, состоящая всего из пяти столбцов:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Аналогично из матрицы двухполюсных сечений (2.35) получается соответствующая матрица независимых событий несвязности:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & -1 & 7 & 4 \\ -1 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Отметим, что матрицы (3.14) и (3.15) соответствуют объединению независимых событий, полученному в форме выражения (3.3). При этом каждый столбец этих матриц определяет один элемент в объединении (3.3), а элементы матрицы задаются по принципу принадлежности к определенной группе согласно равенству (3.10).

3.6. Переход от матрицы независимых событий к вероятностной функции

Непосредственно переход от матрицы событий к вероятностной функции базируется на представлении элементов данной матрицы в виде выражения (3.10), а также на выражении (3.6) для произвольного независимого события a_i и суммы вероятностей их связности, имеющей аналитическую форму (3.5).

Вероятность независимого события a_i согласно теоремы умножения вероятностей для независимых событий [12,66] и выражению (3.6) равна произведению вероятностей составляющих его событий (групп):

$$P(a_i) = \prod_{k=1}^{g_i+1} P(a_{i,k}).$$

Для каждой из групп событий также в соответствии с данной теоремой, формулой для полной группы событий и выражениями (3.7)–(3.9) вероятности факторизируются:

$$P(a_{i,k}) = 1 - \prod_{l_{i_k} \in a_{i,k}} p_{i_k}, k = 1, \dots, g_i,$$

$$P(a_{i,g_i+1}) = \prod_{l_{i_{g_i+1}} \in a_{i,g_i+1}} p_{i_{g_i+1}},$$

$$P(a_{i,g_i+2}) = 1 - \prod_{l_{i_{g_i+2}} \notin a_i} 0 = 1,$$

где $p_{i_k} = P(l_{i_k})$ – вероятность связности (работоспособности) ребра l_{i_k} .

Отметим, что в третьем уравнении $P(l_{i_k}) = 0$, поскольку ребра не участвуют в формировании события a_i .

Таким образом, вероятность связности графа:

$$P(S) = 1 - \sum_{i=1}^{s'} \prod_{k=1}^{g_i} \left(1 - \prod_{l_{i_k} \in a_{i,k}} p_{i_k} \right) \prod_{l_{i_{g_i+1}} \in a_{i,g_i+1}} p_{i_{g_i+1}}.$$

Выражение для определения вероятности связности на основе матрицы \mathbf{Y} независимых событий удобно также получить сначала в скалярном виде, а затем перейти к матричному. Так, для отдельных групп событий соответствующие вероятности имеют форму:

$$P(a_{i,k}) = \left\{ 1 - \prod_{j=1}^l z_j : z_j = \begin{cases} p_j, & \text{если } y_{j,i} = k, \\ 1, & \text{если } y_{j,i} \neq k, \end{cases} \right\}, k = 1, \dots, g_i,$$

$$P(a_{i,g_i+1}) = \left\{ \prod_{j=1}^l z_j : z_j = \begin{cases} p_j, & \text{если } y_{j,i} = 0, \\ 1, & \text{если } y_{j,i} \neq 0, \end{cases} \right\}.$$

В матричном виде возможно представить вычисление вероятностей как операции над векторами и матрицами:

$$P(a_{i,k}) = 1 - |\text{dg}\{\text{sign}[(\mathbf{Y}^{(i)} - k\mathbf{1}_l) \odot (\mathbf{Y}^{(i)} - k\mathbf{1}_l)] \odot (\mathbf{1}_l - \mathbf{p}) + \mathbf{p}\}|, k = 1, \dots, g_i,$$

$$P(a_{i,g_i+1}) = |\text{dg}[\text{sign}(\mathbf{Y}^{(i)} \odot \mathbf{Y}^{(i)}) \odot (\mathbf{1}_l - \mathbf{p}) + \mathbf{p}]|,$$

где $|\mathbf{X}|$ – определитель (детерминант) квадратной матрицы \mathbf{X} [37]; $\text{dg}(\mathbf{x})$ – оператор диагонализации вектора \mathbf{x} [37]; $\mathbf{p} = \{p_i\}_{i=1,\dots,l}$ – вектор вероятностей связности (работоспособности) ребер и вершин.

Отметим, что определитель диагонализированного вектора $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1,\dots,l}$ равен произведению его элементов, т. е.

$$|\text{dg}(\mathbf{x})| = \prod_{i=1}^l x_i.$$

Таким образом, вероятность связности графа (вероятностная функция) на основе деревьев:

$$\begin{aligned}
P(S) &= 1 - \sum_{i=1}^{s'} |\text{dg}[\text{sign}(\mathbf{Y}^{(i)} \odot \mathbf{Y}^{(i)}) \odot (\mathbf{1}_l - \mathbf{p}) + \mathbf{p}]| \times \\
&\times \prod_{k=1}^{\max(\mathbf{Y}^{(i)})} (1 - |\text{dg}\{\text{sign}[(\mathbf{Y}^{(i)} - k\mathbf{1}_l) \odot (\mathbf{Y}^{(i)} - k\mathbf{1}_l)] \odot (\mathbf{1}_l - \mathbf{p}) + \mathbf{p}\}|).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Если для расчета матрицы \mathbf{Y} независимых событий в качестве основы используется матрица \mathbf{W} сечений, то в выражении для вероятности связности необходимо заменить вектор \mathbf{p} вероятностей связности (работоспособности) ребер на вектор $(\mathbf{1}_l - \mathbf{p})$ вероятностей несвязности (неработоспособности) ребер, а также учесть сокращение единицы:

$$\begin{aligned}
P(S) &= \sum_{i=1}^{s'} |\text{dg}[\text{sign}(\mathbf{Y}^{(i)} \odot \mathbf{Y}^{(i)}) \odot \mathbf{p} + (\mathbf{1}_l - \mathbf{p})]| \times \\
&\times \prod_{k=1}^{\max(\mathbf{Y}^{(i)})} (1 - |\text{dg}\{\text{sign}[(\mathbf{Y}^{(i)} - k\mathbf{1}_l) \odot (\mathbf{Y}^{(i)} - k\mathbf{1}_l)] \odot \mathbf{p} + (\mathbf{1}_l - \mathbf{p})\}|).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Таким образом, в независимости от применяемого базиса в форме деревьев либо сечений вероятностная функция имеет один и тот же вид с точностью до вектора \mathbf{p} вероятностей связности ребер и нормирующей единицы.

Применение процедур рассмотрим на сети изображенной на рисунке 2.2. Полюса обозначены квадратами, где исток – $v_s = 1$, сток – $v_t = 5$. Рассчитаем вероятность связности графа G .

Матрица смежностей рассчитывается по (2.9), матрицы путей и независимых событий по (2.12) и (3.14), матрицы двухполюсных сечений и независимых событий несвязности по (2.35) и (3.15) соответственно.

Вероятности связности ребер одинаковы – $P(l_j) = p = 0,9, j = 1, \dots, j$.

Вектор вероятностей связности (работоспособности) ребер составлен из одинаковых элементов:

$$\mathbf{p} = p\mathbf{1}_1 = \begin{bmatrix} 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с матрицей независимых событий связности формулой (3.14) слагаемых в выражении (3.16) всего пять, т. е. $s' = 5$. Тогда вероятность связности графа G :

$$\begin{aligned} P(S) &= 1 - [1 \cdot 0,1 + 0,9 \cdot 0,1^2 + 0,9^2 \cdot 0,1^2 \cdot (1 - 0,9^3) + 0,9^2 \cdot 0,1 \cdot (1 - 0,9^2) + 0,9^3 \cdot 0,1^2 \cdot (1 - 0,9^2)] \\ &= 1 - (0,1 + 0,009 + 0,0021951 + 0,01539 + 0,0013851) = 0,8720298. \end{aligned}$$

Аналогично получается результат на основе матрицы независимых событий несвязности (3.15). В выражении (3.17) слагаемых также оказывается всего пять, т. е. $s' = 5$. Тогда вероятность связности графа G :

$$\begin{aligned} P(S) &= 1 \cdot 0,9^3 + 0,1 \cdot 0,9^4 \cdot (1 - 0,1^2) + 0,1 \cdot 0,9^4 + 0,1^2 \cdot 0,9^5 + 0,1^2 \cdot 0,9^4 = \\ &= 0,729 + 0,0649539 + 0,06561 + 0,0059049 + 0,006561 = 0,8720298. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, результаты оказались идентичными.

3.7. Оценка вычислительной сложности предложенного метода расчета вероятности связности (несвязности) телекоммуникационной сети с методом двудольных графов

Оценка вычислительной сложности рассматриваемого метода проведена по аналогии с предложенным способом оценки эффективности (объем трудозатрат) метода двудольных графов [23,24]. В данном случае вычислительная сложность измеряется в числе конъюнктивных форм, необходимых для представления события связности графа. Более рационально ее немного уточнить и говорить о количестве анализируемых элементарных конструкций (подграфов) в ходе процесса редукции исходного графа. Проводимая оценка рассматривается в [23] для графов регулярной структуры, а точнее полносвязных графов, так как в графах произвольной структуры (двух- и многополюсные) нельзя определить число простых цепей (путей) или

стянутых двудольных графов. Тогда число n_d конъюнктивных форм (элементарных конструкций) на полносвязных графах с v вершинами и $l = \frac{v(v-1)}{2}$ ребрами для метода двудольных графов [23,82] определяется:

$$n_d = \sum_{i=0}^{v-3} C_{v-1}^i (2^{v-1-i} - 2),$$

где C_{v-1}^i – число сочетаний из i элементов по $v - 1$ [9].

Приведенный в работе метод многопеременной инверсии MVI для случая двухполюсных сетей оперирует с элементарными конструкциями, порождающими конъюнктивные формы, в виде простых цепей, количество n_t которых определяется как сумма числа размещений [9] по всем неполюсным вершинам:

$$n_t = \sum_{i=0}^{v-2} \frac{(v-2)!}{(v-2-i)!}$$

Отметим, что в данных вариантах элементарные конструкции учитывают также ненадежность вершин. Причем на количество простых цепей абсолютная надежность вершин никоим образом не влияет.

В случае же учета абсолютной надежности вершин количество элементарных конструкций для метода двудольных графов [23] существенно сокращается:

$$n'_d = \sum_{i=0}^{v-3} C_{v-1}^i = 2^{v-1} - v.$$

С другой стороны метод многопеременной инверсии MVI может использовать в качестве элементарных конструкций двухполюсные сечения, количество которых соответствует сумме числа декартовых произведений [120] вершинных неполюсных сечений графа:

$$n_s = \sum_{i=0}^{v-2} C_{v-2}^i = 2^{v-2}.$$

Еще раз подчеркнем, что в данном случае все вершины считаются абсолютно надежными.

На рисунке 3.6 приведены зависимости числа n анализируемых элементарных конструкций (конъюнкций) от количества v вершин полносвязного графа для предложенного метода и метода двудольных графов. Из анализа следует, что метод многопеременной инверсии (MVI) имеет преимущество в вычислительной эффективности лишь для полносвязных графов с числом вершин менее восьми в сравнении с методом двудольных графов. Однако при использовании сечений и абсолютно надежных вершин многопеременная инверсия демонстрирует выигрыш:

$$\frac{n'_d}{n_s} = 2 - 2^{2-v}v,$$

стремящийся к двум при росте количества вершин, так для графа с более, чем восемнадцатью вершин ($v \geq 18$) погрешность менее 0,1%.

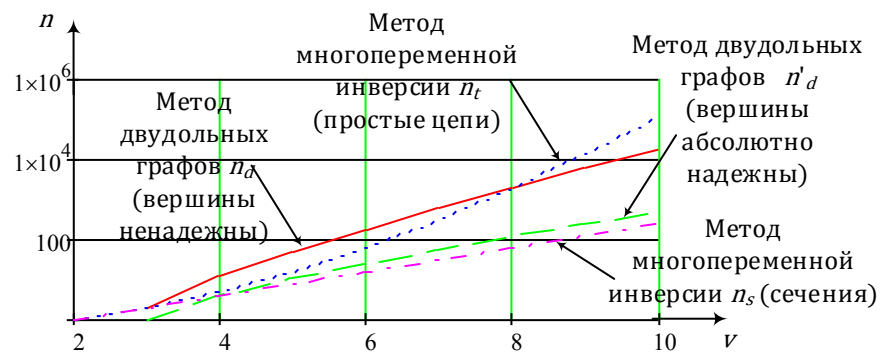


Рисунок 3.6 – Зависимости числа n анализируемых элементарных конструкций (конъюнкций) от количества v вершин полносвязного графа

3.8. Пример анализа вероятности связности для мостикового графа матриц зависимых и независимых событий на основе путей и двухполюсных сечений

Применение разработанных процедур разберем на примере мостикового графа G (рисунок 2.11) и определим его вероятность связности. Полюса обозначены квадратами, где исток – $v_s = 1$, сток – $v_t = 4$.

Матрица смежностей графа определена ранее формула (2.48). Вероятности связности ребер одинаковы – $P(l_j) = p = 0,9, j = 1, \dots, j$.

Используя \mathbf{W}_t матрицу путей (2.49) и формулу (3.11) найдем \mathbf{S}_t приведенную матрицу путей, на основе которой по предложенным процедурам по приведению несвязных событий к объединению независимых в виде рекурсии с использованием формул (3.12)–(3.13) определим \mathbf{Y}_t матрицу независимых событий связности состоящей из четырех столбцов по количеству путей s' :

$$\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Аналогично, но с использованием \mathbf{W}_s матрицы сечений (2.50) определим матрицу \mathbf{Y}_s независимых событий несвязности:

$$\mathbf{Y}_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Вектор вероятностей связности (работоспособности) ребер составлен из одинаковых элементов:

$$\mathbf{p} = p\mathbf{1}_l = \begin{bmatrix} 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с формулой (3.18) слагаемых в выражении (3.16) всего четыре, т. е. $s' = 4$. Тогда вероятность связности графа G :

$$\begin{aligned} P(S) &= 1 - [0,1^2 + 0,9 \cdot 0,1^2 \cdot (1 - 0,9^2) + 0,9 \cdot 0,1^2 + 0,9^2 \cdot 0,1^3] = \\ &= 1 - (0,01 + 0,00171 + 0,009 + 0,00081) = 0,97848. \end{aligned}$$

Аналогично получается результат на основе матрицы независимых событий несвязности (3.19). В выражении (3.17) слагаемых также оказывается всего четыре, т. е. $s' = 4$. Тогда вероятность связности графа G :

$$\begin{aligned}
 P(S) &= 0,9^2 + 0,1 \cdot 0,9^2 \cdot (1 - 0,1^2) + 0,1 \cdot 0,9^2 + 0,1^2 \cdot 0,9^3 = \\
 &= 0,81 + 0,08019 + 0,081 + 0,00729 = 0,97848.
 \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, результаты оказались идентичными.

3.9. Выводы по третьему разделу

1. Известный подход, основанный на многопеременной инверсии (MVI), приводит к компактной форме записи итогового выражения связности и к снижению вычислительной сложности, по сравнению с другими методами, но имеет существенный недостаток, связанный с определением уникальности содержащихся ребер. Для устранения этого недостатка предлагается рассмотреть пересечение событий несвязности, приводящее к сумме несовместных произведений, но без необходимости выполнения многопеременной инверсии для каждого из слагаемых над всеми ранее рассмотренными.

2. Применена рекурсивная процедура приведения нескольких событий несвязности к объединению независимых событий, использующая на каждом этапе всего две операции: расщепления и поглощения. Позволяющая, не рассматривать во всех суммах инверсии всех ранее учтенных подграфов.

3. Разработан модифицированный подход к оценке вероятности связности с применением сечений, снижающий вычислительную сложность расчетов, вследствие меньшего количества числа сечений по сравнению с многополюсными деревьями рассматриваемых на практике графов.

4. Для удобства вычисления разработаны:

- матричные формы операций поглощения и расщепления
- матричные формы операций и выражений для событий связности (несвязности) деревьев и сечений;
- матричные формы приведения нескольких событий несвязности к объединению независимых событий;
- переход от матрицы независимых событий к вероятностной функции.

5. Приведен анализ оценки вычислительной сложности предложенного метода на основе многопеременной инверсии (MVI) с методом двудольных графов. Анализ показал наличие выигрыша в вычислительной сложности предложенного метода для полносвязных графов с количеством вершин меньшим восьми. Но при использовании сечений и абсолютно надежных вершин многопеременная инверсия демонстрирует выигрыш, стремящийся к двум при росте количества вершин.

4. Метод расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети, поддерживающей механизмы обеспечения отказоустойчивости на примере магистральной сети юга России

4.1. Надежность узлов и линий связи

Основой любой сети является ее структура – совокупность узлов и линий связи с их взаимосвязями и характеристиками. К характеристикам сети следует, прежде всего отнести показатели ее надежности. Один из показателей, с позиции которого рассмотрена настоящая работа, является коэффициент готовности, который является одной из метрик, отражающий структурную надежность сети [16].

Надежность линий и узлов связи сети разберем на транспортной сети. Сетевое оборудование, состоит из элементов каждый из которых характеризуется собственными параметрами надежности такими как средней наработкой на отказ и временем восстановления [154]. Среднее время наработки на отказ T_0 сетевого оборудования транспортных сетей, к которым относятся мультиплексоры ввода-вывода и оптические кросс-коннекторы, имеет размерность времени [135]. Среднее время восстановления T_r сетевого оборудования определяется в часах.

Аварии на линиях связи транспортной сети могут происходить как по причинам неисправности оптического кабеля, так и неисправности систем уплотнения линии WDM (Wavelength Division Multiplexing) или оптических усилителей. Среднее время наработки на отказ T_0 кабеля определяется из меры длины разрыва, соответствующей средней длине кабеля d_0 , подверженной единичному разрезу в год. Данное условие объяснение ростом вероятности разрыва кабеля при увеличении его длины d . Среднее

время наработки на отказ оптического кабеля, выраженное в часах, определяется выражением [154]:

$$T_0 = 8760 \frac{d_0}{d}. \quad (4.1)$$

Среднее время восстановления T_r кабеля включает такие параметры как: время определения неисправности, время доступа к кабелю, время ремонта повреждения и введения в эксплуатацию, время тестирование качества информационного обмена.

Перечень средних времен наработки на отказ и восстановления для наиболее часто используемого сетевого оборудования приведен в таблице 4.1 [154].

Таблица 4.1 – Параметры надежности сетевого оборудования

| Оборудование | Среднее время наработки на отказ T_0 , час | Среднее время восстановления T_r , час |
|------------------------------|--|--|
| Оптический усилитель | $5 \cdot 10^5$ | 24 |
| Система уплотнения линии WDM | $5 \cdot 10^5$ | 6 |
| Кросс-коннектор | $1 \cdot 10^5$ | 6 |
| Мультиплексор ввода-вывода | $1 \cdot 10^5$ | 6 |
| – | Средняя длина разрыва d_0 , км | Среднее время восстановления T_r , час |
| кабель | 450 | 24 |

Введем допущение, предполагающее нахождение на каждом узле связи транспортной сети наличие не менее одного мультиплексор ввода-вывода или кросс-коннектор, обеспечивающего все направления связи [87].

В общем виде коэффициент готовности соответствует вероятности связности линии или узла и находится через:

$$p = 1 - \frac{T_r}{T_0}. \quad (4.2)$$

Тогда коэффициент готовности узла связи p_v определяется как:

$$p_v = 1 - \frac{6}{10^5} = 0,99994. \quad (4.3)$$

Работоспособность оптической линии связи, состоящей из разных элементов, представленных на рисунке 4.1, определяется готовности этих элементов. Если

выход из строя элемента линии связи не зависит от друга, тогда коэффициент готовности линии определяется как:

$$p_l(d) = p_c(d) p_a^{n(d)} p_w^2, \quad (4.4)$$

где $p_c(d)$ – коэффициент готовности кабеля, протяженностью d ; p_a – коэффициент готовности оптического усилителя; $n(d)$ – число оптических усилителей; p_w – коэффициент готовности системы уплотнения линии WDM.



Рисунок 4.1 – Типовая двунаправленная оптическая линия связи

Тогда коэффициент готовности кабеля определяется как:

$$p_c(d) = 1 - \frac{T_r}{8760 \frac{d_0}{d}} = 1 - \frac{24}{8760 \frac{450}{d}} = 1 - 6,088 \cdot 10^{-6} d. \quad (4.5)$$

Коэффициент готовности оптического усилителя:

$$p_a = 1 - \frac{24}{5 \cdot 10^5} = 0,999952. \quad (4.6)$$

Число оптических усилителей:

$$n(d) = \left\lfloor \frac{d}{100} \right\rfloor, \quad (4.7)$$

где $\lfloor x \rfloor$ – округление до ближайшего целого x .

Коэффициент готовности системы уплотнения линии WDM:

$$p_w = 1 - \frac{6}{5 \cdot 10^5} = 0,999988. \quad (4.8)$$

Тогда коэффициент готовности линии:

$$p_l(d) = (1 - 6,088 \cdot 10^{-6} d) \cdot 0,999952^{\left\lfloor \frac{d}{100} \right\rfloor} \cdot 0,999988^2. \quad (4.9)$$

4.2. Метод расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети, поддерживающей механизмы обеспечения отказоустойчивости

На телекоммуникационных сетях применяются два класса механизмов обеспечения отказоустойчивости: защитного переключения и динамического восстановления. В механизмах защитного переключения выделяют четыре основные архитектуры: $1 + 1$, $1:n$, $(1:1)^n$, $m:n$ и шесть видов защищаемых участков сети: узел, линия, сегмент, маршрут, кольцо и р-цикл.

Каждый из них имеет свои особенности с точки зрения технической реализации, но с точки зрения анализа надежности с использованием случайных графов, достаточно рассмотреть защищаемый участок как набор ребер и вершин графа, применение которых допускается только на основном маршруте. Использование р-циклов или колец тоже сводится к аналогичным типам резервирования. Время необходимое для переключения с основного канала на резервный в случае отказов, не учитывалось и требует дальнейшего исследования.

Для удобства элементы маршрутов, представим в виде трех групп участков, архитектура которых представлена на рисунке 4.2.

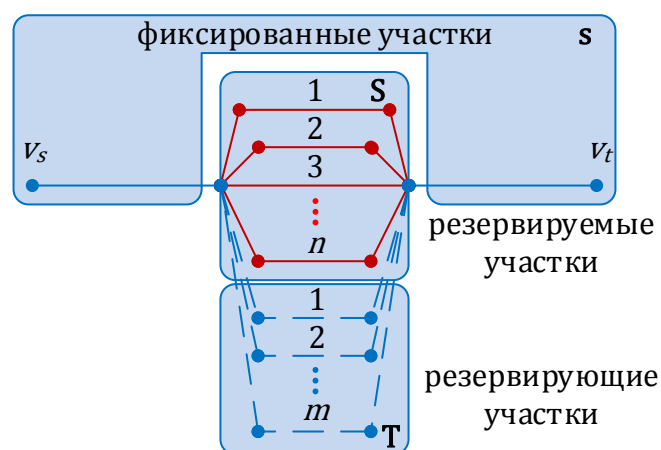


Рисунок 4.2 – Архитектура маршрутов передачи информации с механизмами обеспечения отказоустойчивости

Первая группа участков описывает фиксированные отрезки пути, описываемые в виде вектора $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=1, \dots, l+v}$ элементов (узел, ребро) графа сети. Следующая группа описывает резервируемые участки в виде матрицы $\mathbf{S} = \{s_{i,j}\}_{\substack{i=1, \dots, l+v, \\ j=1, \dots, n}}$, в которой все столбцы соответствуют одному из n резервируемому участку. И последняя группа описывает резервирующие участки в виде матрицы $\mathbf{T} = \{t_{i,j}\}_{\substack{i=1, \dots, l+v, \\ j=1, \dots, m}}$, каждый столбец которой соответствует одному из m резервирующих участков.

Для любой архитектуры методов защитного переключения рассмотрим n маршрутов, формирующие в общем виде основные маршруты, задаваемые как простые цепи с независимыми резервируемыми участками. В этом случае матрица резервируемых участков формируется с учетом наибольшего коэффициента готовности среди выбранных элементов графа, отсутствия их в фиксированных участках, а также независимости:

$$\mathbf{s}^{(1)} = \left\{ \mathbf{w}^{(j)} : \max[\mathbf{s} + \mathbf{W}^{(j)}] = 1, \text{ если } \min_{j=1, \dots, S} \prod_{i=1}^{l+v} p_i w_{i,j} \right\}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{s}^{(i)} = \left\{ \mathbf{w}^{(j)} : \max[\mathbf{s} + \text{sign}(\mathbf{S}\mathbf{1}_{i-1}) + \mathbf{W}^{(j)}] = 1, \text{ если } \min_{j=1, \dots, S} \prod_{i=1}^{l+v} p_i w_{i,j} \right\}, \quad (4.11)$$

$$i = 2, \dots, n,$$

где $\mathbf{W} = \{w_{i,j}\}_{\substack{i=1, \dots, l+v \\ j=1, \dots, S}}$ – матрица путей между истоком и стоком резервируемых участков;

$\mathbf{p} = \{p_i\}_{i=1, \dots, l+v}$ – вектор вероятностей связности (работоспособности) ребер и вершин.

Тогда основные маршруты (резервируемые) описываются как матрицы путей (простых цепей) \mathbf{R} , включающая элементы фиксированных и резервируемых участков:

$$\mathbf{R} = \mathbf{s}\mathbf{1}_n^T + \mathbf{S}. \quad (4.12)$$

Также на основе простых цепей формируются m маршрутов, включающие независимые резервирующие участки, при этом резервирующие участки должны быть независимы от резервирующих. Матрица резервирующих участков формируется

с учетом наибольшего коэффициента готовности среди выбранных элементов графа, отсутствия их в фиксированных и резервируемых участках, а также независимости:

$$\mathbf{T}^{(1)} = \left\{ \mathbf{W}^{(j)} : \max[\text{sign}(\mathbf{R}\mathbf{1}_n) + \mathbf{W}^{(j)}] = 1, \text{ если } \min_{j=1, \dots, s} \prod_{i=1}^{l+v} p_i w_{i,j} \right\}, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{T}^{(i)} = \left\{ \mathbf{W}^{(j)} : \max[\text{sign}(\mathbf{R}\mathbf{1}_n) + \text{sign}(\mathbf{T}\mathbf{1}_{i-1}) + \mathbf{W}^{(j)}] = 1, \text{ если } \min_{j=1, \dots, s} \prod_{i=1}^{l+v} p_i w_{i,j} \right\}, \quad (4.14)$$

$$i = 2, \dots, m.$$

Тогда резервирующие маршруты описываются как матрицы путей \mathbf{R} , включающая элементы фиксированных и резервирующих участков:

$$\mathbf{R} = \mathbf{s}\mathbf{1}_m^T + \mathbf{T}. \quad (4.15)$$

Так для архитектуры 1 + 1, изображенной на рисунке 4.3, основной путь от истока к стоку дублируется резервным с использованием резервирующего участка, в случае отказа резервируемого, при этом все входящие в резервирующий участок элементы имеют наибольшие коэффициенты готовности из всего набора. В этом случае, матрицы резервируемых \mathbf{S} и резервирующих \mathbf{T} участков сводятся к векторам, а матрица путей \mathbf{R} состоит из пары столбцов, первый $\mathbf{R}^{(1)}$ определяет основной маршрут, второй $\mathbf{R}^{(2)}$ – резервирующий:

$$\mathbf{R}^{(1)} = \mathbf{s} + \mathbf{S}, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{R}^{(2)} = \mathbf{s} + \mathbf{T}. \quad (4.17)$$

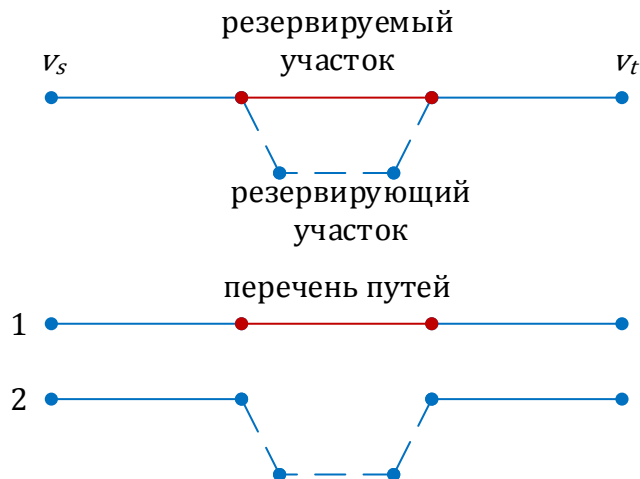


Рисунок 4.3 – Архитектура защитного переключения 1+1 и перечень путей

Для архитектуры 1:n, изображенной на рисунке 4.4, n основных путей от истока к стоку дублируются одним резервным, в составе которого отсутствуют элементы основных путей и имеющий наибольший коэффициент готовности из возможных вариантов. В этом случае, матрица S резервируемых участков состоит из n столбцов, матрица T резервирующих участков сводится в вектор, а матрица путей R, включает n + 1 столбец. Первый столбец R⁽¹⁾ определяет набор элементов входящих в фиксированный участок и всех резервируемых участков, а n остальных R⁽ⁱ⁾, i = 2, ..., n + 1 – аналогичному, но с учетом замены одного из резервируемых участков, в случае его отказа, на резервирующий:

$$\mathbf{R}^{(1)} = \mathbf{s} + \mathbf{S}\mathbf{1}_n, \tag{4.18}$$

$$\mathbf{R}^{(i)} = \mathbf{R}^{(1)} - \mathbf{S}^{(i-1)} + \mathbf{T}, i = 2, \dots, n + 1.. \tag{4.19}$$

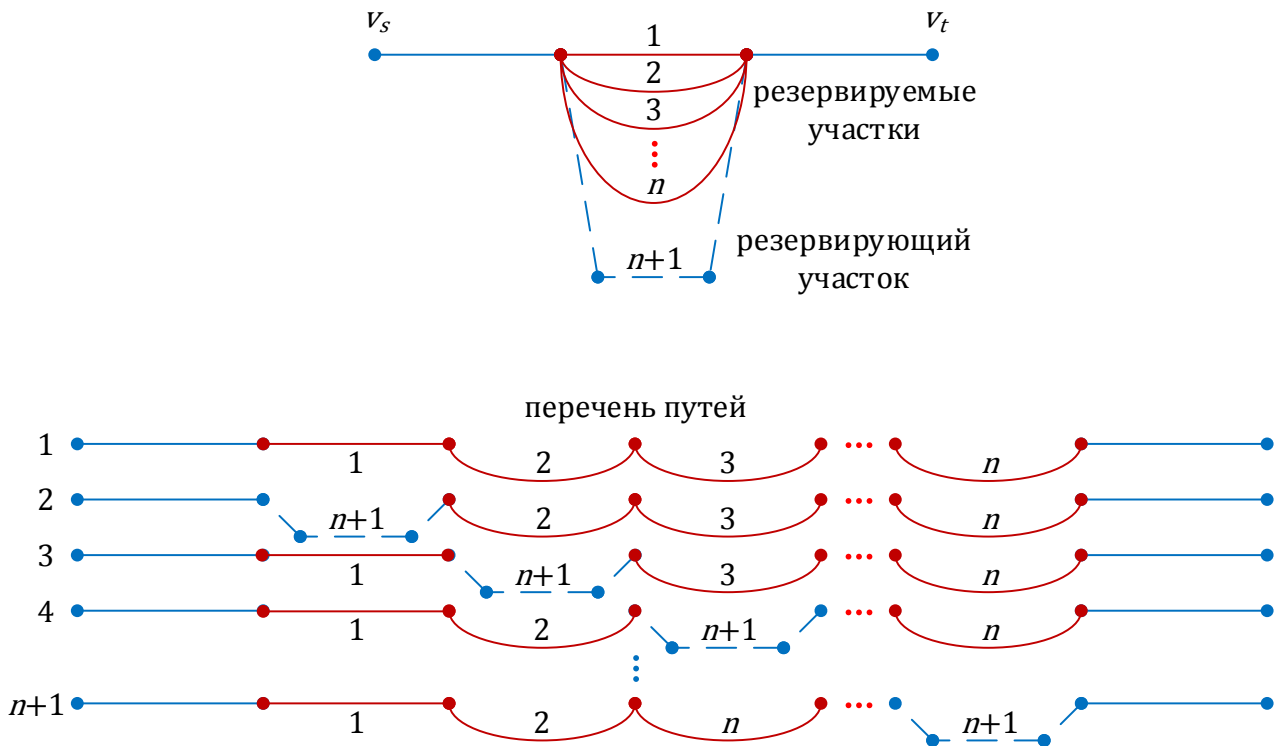


Рисунок 4.4 – Архитектура защитного переключения 1:n и перечень путей

Для архитектуры (1:1)ⁿ, изображенной на рисунке 4.5, все n основных путей дублируются одним резервным с аналогичными истоком v_s и стоком v_t, в составе которого отсутствуют элементы своего основного пути и имеющий наибольший коэффициент готовности из возможных вариантов.

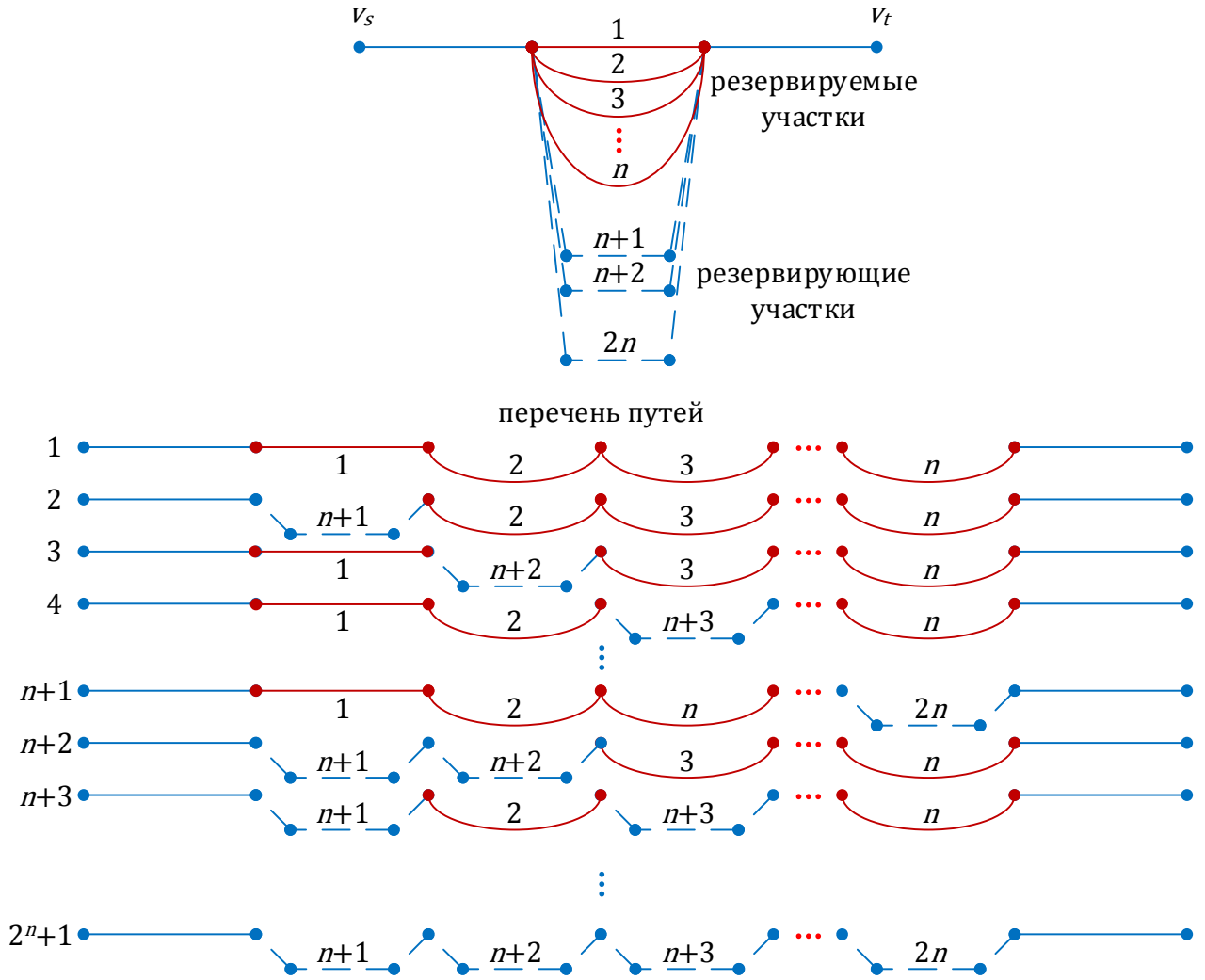


Рисунок 4.5 – Архитектура защитного переключения $(1:1)^n$ и перечень путей

В этом случае, матрицы резервируемых \mathbf{S} и резервирующих \mathbf{T} участков состоят из n ($m = n$) столбцов, а матрица путей \mathbf{R} , включает $2^n + 1$ столбец. Первый столбец $\mathbf{R}^{(1)}$ определяет набор элементов входящих в фиксированный участок и всех резервируемых участков, а 2^n остальных $\mathbf{R}^{(i)}, i = 2, \dots, 2^n + 1$ – аналогичному, но с последовательной заменой одного или нескольких резервируемых участков, в случае их отказов, на соответствующие резервирующие:

$$\mathbf{R}^{(1)} = \mathbf{s} + \mathbf{S}\mathbf{1}_n, \tag{4.20}$$

$$\mathbf{R}^{(i)} = \mathbf{R}^{(1)} + (\mathbf{T} - \mathbf{S})\mathbf{C}_n^{(i-1)}, i = 2, \dots, 2^n + 1, \tag{4.21}$$

где $\mathbf{C}_n = [\mathbf{C}_{1,n} | \mathbf{C}_{2,n} | \dots | \mathbf{C}_{n,n}]$ – блочная матрица сочетаний размером $n \times 2^n$, каждый столбец которой соответствует комбинации последовательного перебора

резервирующих маршрутов, начиная с одного и заканчивая всеми; $\mathbf{C}_{i,n}$ – матрица сочетаний из i по n размером $n \times C_n^i$, каждый столбец которой содержит i единиц и соответствует определенному сочетанию из i по n ; C_n^i – число сочетаний из i по n [9].

Для архитектуры $m:n$, изображенной на рисунке 4.6, n основных путей дублируются m резервными, в составе которых отсутствуют элементы своего основного пути и имеющие наибольшие коэффициенты готовности из возможных вариантов.

Матрицы резервируемых \mathbf{S} и резервирующих \mathbf{T} участков состоят из n и m столбцов соответственно, а матрица путей \mathbf{R} , содержит $\sum_{i=0}^m C_n^i C_m^i$ столбцов. Первый столбец $\mathbf{R}^{(1)}$ определяет набор элементов фиксированного и всех резервируемых участков, а $\sum_{i=1}^m C_n^i C_m^i$ остальных $\mathbf{R}^{(i)}$, $i = 2, \dots, \sum_{i=0}^m C_n^i C_m^i$ – аналогичному, но с заменой одного или нескольких резервируемых участков на резервирующие. По сути здесь необходимо рассмотреть все возможные комбинации размещений из i элементов по n , где $i = 1, \dots, n$ и из i элементов по m , где $i = 1, \dots, m$:

$$\mathbf{R}^{(1)} = \mathbf{s} + \mathbf{S}\mathbf{1}_n, \quad (4.22)$$

$$\mathbf{R}^{(i)} = \mathbf{R}^{(1)} + \mathbf{T}\mathbf{M}_t^{(i-1)} - \mathbf{S}\mathbf{M}_s^{(i-1)}, i = 2, \dots, \sum_{i=0}^m C_n^i C_m^i, \quad (4.23)$$

где $\mathbf{M}_t = \left[\mathbf{1}_{C_n^1}^T \otimes \mathbf{C}_{1,m} \mid \mathbf{1}_{C_n^2}^T \otimes \mathbf{C}_{2,m} \mid \dots \mid \mathbf{1}_{C_n^m}^T \otimes \mathbf{C}_{m,m} \right]$ – блочная матрица размещений размером $n \times \sum_{i=1}^m C_n^i C_m^i$, каждый столбец которой соответствует комбинации последовательного перебора резервирующих маршрутов, начиная с одного и заканчивая всеми, а затем резервируемых; \otimes – кронекеровское произведение [37];

$\mathbf{M}_s = \left[\mathbf{1}_{C_n^1}^T \otimes \mathbf{C}_{1,m}^{(1)} \mid \mathbf{1}_{C_n^1}^T \otimes \mathbf{C}_{1,m}^{(2)} \mid \dots \mid \mathbf{1}_{C_n^1}^T \otimes \mathbf{C}_{1,m}^{(n)} \mid \dots \mid \mathbf{1}_{C_n^2}^T \otimes \mathbf{C}_{2,m}^{(1)} \mid \dots \mid \mathbf{1}_{C_n^m}^T \otimes \mathbf{C}_{m,m}^{(m)} \right]$ – блочная матрица размещений размером $n \times \sum_{i=1}^m C_n^i C_m^i$, каждый столбец которой соответствует комбинации последовательного перебора резервируемых маршрутов, начиная с одного и заканчивая всеми, а затем резервирующих.

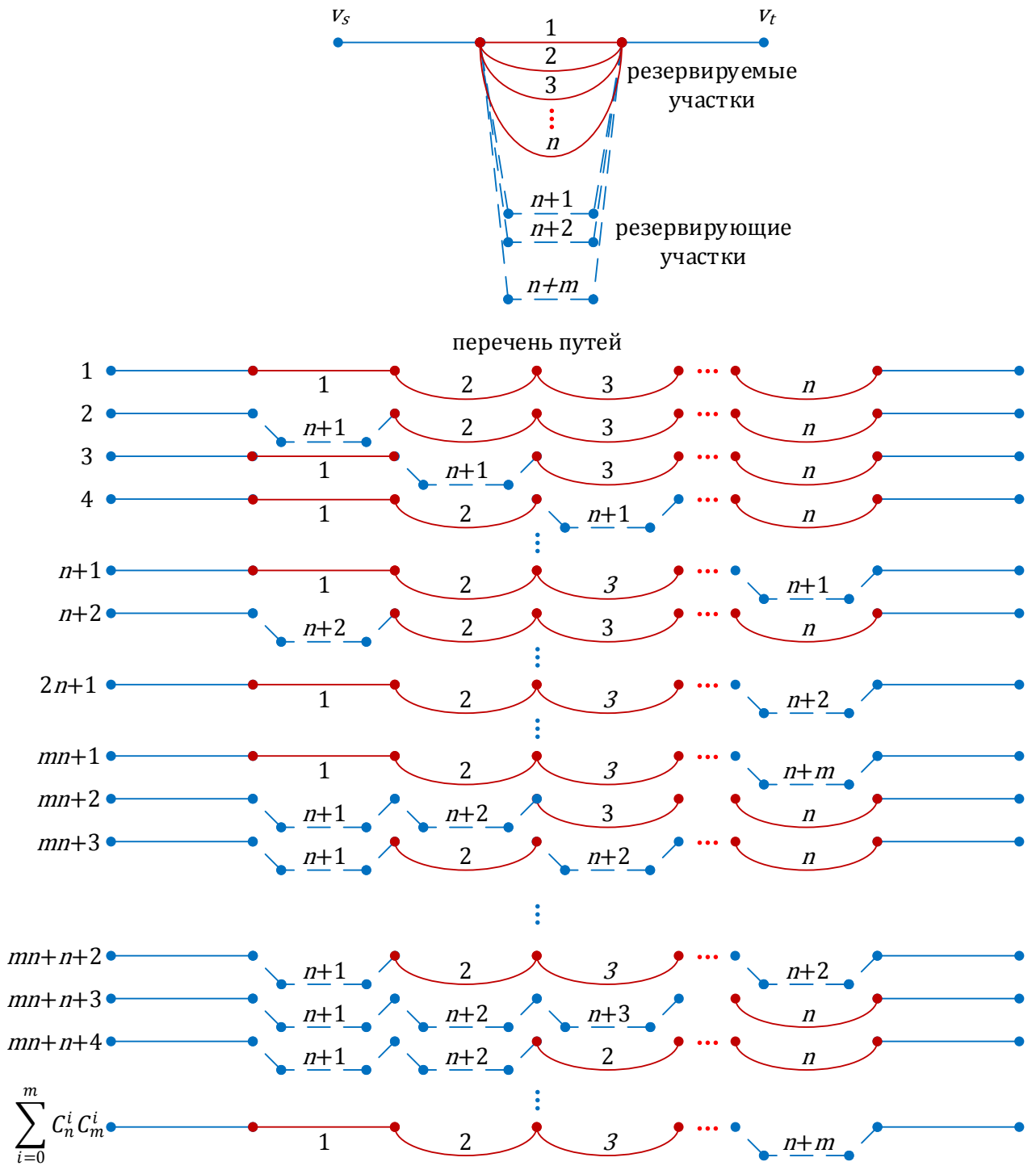


Рисунок 4.6 – Архитектура защитного переключения $m:n$ и перечень путей

Механизмы динамического восстановления обладают большей гибкостью в планировании обходных маршрутов, чем методы резервирования. В общем случае любой сформированный обходной (резервный) путь, при получения сигнала неисправности сети, может оказаться реальным вариантом для

организации резервирующего участка. Тогда, с учетом требований к минимальному числу альтернативных маршрутов, что равносильно числу n резервируемых путей в механизме защитного переключения, следует рассматривать все возможные маршруты исходного графа как резервирующие, при этом условие их независимости не оказывается критическим.

На основе рисунка 4.2, из общего количества возможных путей отберем пути, содержащие элементы фиксированных участков и n путей, независимых друг от друга и фиксированных участков. Для этого, необходимо провести анализ всего набора возможных альтернативных путей (резервируемые или резервирующие) на предмет их независимости от фиксированных участков по выражению:

$$\mathbf{s}^{(1)} = \left\{ \mathbf{W}^{(j)} : \min_{j=1, \dots, s} j, \text{ если } \max[\mathbf{s} + \mathbf{W}^{(j)}] = 1 \right\}, \quad (4.24)$$

$$\mathbf{s}^{(i)} = \left\{ \mathbf{W}^{(j)} : \min_{j=1, \dots, s} j, \text{ если } \max[\mathbf{s} + \mathbf{W}^{(j)}] = 1, \mathbf{W}^{(j)} \neq \mathbf{s}^{(k)}, k = 1, \dots, i - 1 \right\}, i = 2, \dots \quad (4.25)$$

По полученной матрице \mathbf{S} независимых альтернативных участков строится матрица путей, включающая ряд столбцов, элементы которых соответствуют фиксированному участку и n альтернативным независимым маршрутам:

$$\mathbf{R} = \mathbf{s} + \mathbf{S} \mathbf{C}_{n, \text{cols}(\mathbf{S})} \mathbf{C}_0, \quad (4.26)$$

где \mathbf{C}_0 – матрица редукции размером $C_{\text{cols}(\mathbf{S})}^n \times k$, элементы которой равны нулю, за исключением единичных элементов на строках с номерами равными номерам ненулевых столбцов матрицы $\mathbf{S} \mathbf{C}_{n, \text{cols}(\mathbf{S})}$ и последовательно упорядоченных номерах столбцов, начиная с первого; k – количество ненулевых столбцов матрицы $\mathbf{S} \mathbf{C}_{n, \text{cols}(\mathbf{S})}$.

Таким образом, подобное представление совместно с применением метода многопеременной инверсии (MVI) позволяет учесть эффекты дублирования элементов в различных маршрутах и, как следствие, устранить неточности оценки коэффициента готовности относительно методов, использующих допущение о независимости путей передачи информации.

4.3. Анализ надежности телекоммуникационной сети на примере кабельной структуры магистральной сети юга России

Для анализа надежности сети рассмотрена структура магистральной сети юга России, граф-модель которой, с пронумерованными вершинами и ребрами, представлен на рисунке 4.7. Цветными линиями на рисунке обозначены линии связи, задействованные в транзите трафика, которые и формируют структуру телекоммуникационной сети.

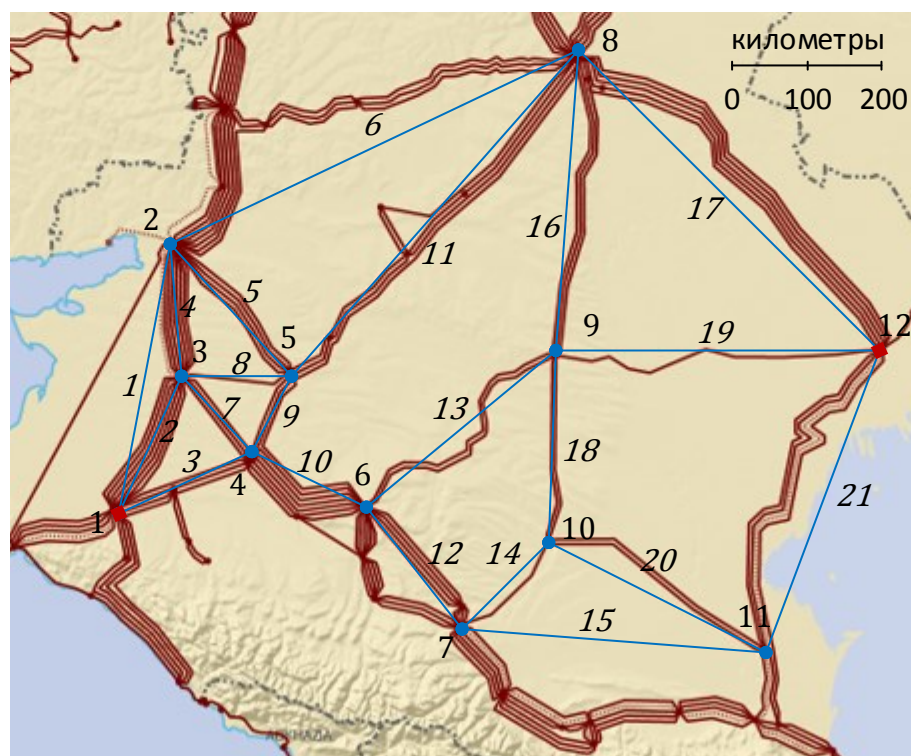


Рисунок 4.7 – Кабельная структура магистральной сети юга России

Предположим, что на каждом узле связи размещается не менее одного мультиплексора ввода-вывода или кросс-коннектора, обеспечивающих работу во всех возможных направлениях. Тогда, согласно выражению (4.3) коэффициент готовности каждого из узлов соответствует $p_v = 0,99994$. Все линии связи исследуемой сети волоконно-оптические, следовательно их коэффициенты готовности p_l определяются по протяженности d_l географических координат городов и рассчитываются по выражению (4.9). Коэффициенты готовности линий связи исследуемой сети представлены в таблице 4.2.

Таблица 4.2 – Параметры надежности линий связи

| Номер линии l | Протяженность d_l , км | Коэффициент готовности и p_l | Номер линии l | Протяженность d_l , км | Коэффициент готовности и p_l | Номер линии l | Протяженность d_l , км | Коэффициент готовности и p_l |
|-----------------|--------------------------|--------------------------------|-----------------|--------------------------|--------------------------------|-----------------|--------------------------|--------------------------------|
| 1 | 375 | 0,99755 | 8 | 150 | 0,99901 | 15 | 410 | 0,99729 |
| 2 | 200 | 0,99866 | 9 | 115 | 0,99923 | 16 | 400 | 0,99735 |
| 3 | 200 | 0,99866 | 10 | 110 | 0,99926 | 17 | 565 | 0,9963 |
| 4 | 175 | 0,99886 | 11 | 575 | 0,99624 | 18 | 265 | 0,99827 |
| 5 | 250 | 0,99836 | 12 | 225 | 0,99851 | 19 | 430 | 0,99717 |
| 6 | 600 | 0,99604 | 13 | 325 | 0,99785 | 20 | 325 | 0,99785 |
| 7 | 140 | 0,99908 | 14 | 165 | 0,99892 | 21 | 440 | 0,99711 |

Анализ приведен на примере двухполюсной сети исследуемого графа (рисунок 4.7) на котором вершины-полюса отмечены квадратами: $v_s = 1$, $v_t = 12$.

Матрица смежностей графа сети определяется как:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Данная двухполюсная сеть содержит двести три простые цепи ($s' = 203$) и сто девять сечений ($s' = 109$).

Расчет всех процедур выполнен в программной среде MathCad 15 на компьютере с процессором AMD Ryzen 5 3500U, оперативной памятью 16 ГБ и 64-разрядной операционной системой Windows 10.

Сравнение времени формирования путей разработанным способом с известным методом, в основе которого используется матрица связности, показало преимущества предложенного метода только для некоторых направлений связи. На рисунке 4.8 представлена зависимость выигрыша Δt по

времени, рассчитываемую как разность между временем формирования путей предложенным способом t_r и методом поиска путей на основе матрицы связности t_t (traversing through connection matrix) [88,120]:

$$\Delta t = t_t - t_r. \quad (4.27)$$

Отметим, что здесь явных трендов не наблюдается, что свидетельствует о влиянии на выигрыш в основном особенностей самого исследуемого графа.

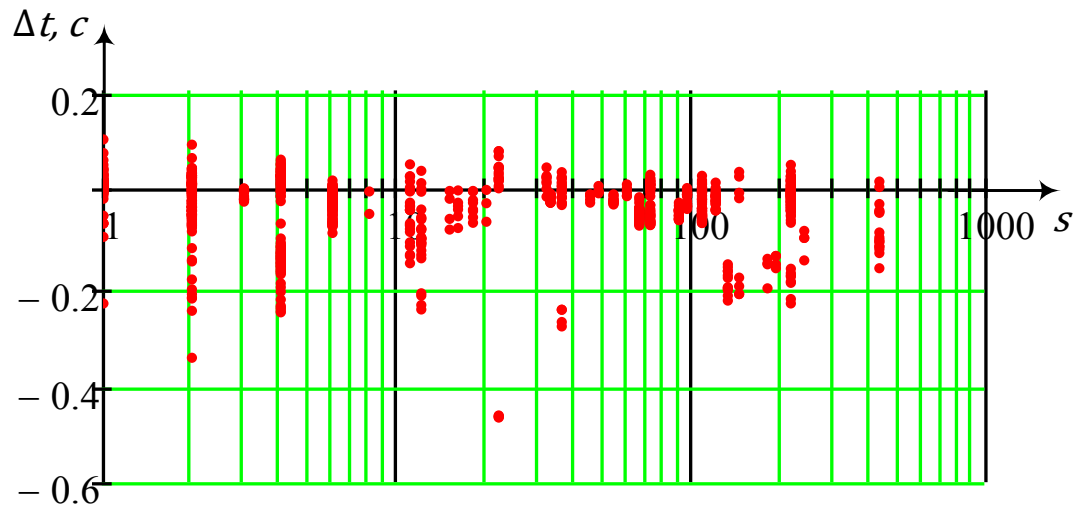


Рисунок 4.8 – Зависимость выигрыша Δt по времени выполнения процедуры формирования путей от их количества s

Однако разработанные процедуры по формированию путей показывают более высокие временные результаты, если возникает сразу несколько задач по поиску n_s множеств путей, объединенным одним истоком. Так на рисунке 4.9 представлен выигрыш для процедуры формирования сразу двух множеств путей, показывающий увеличение как доли экспериментальных данных с положительным выигрышем, так и рост непосредственно его абсолютного значения. Подобный феномен объясняется, прежде всего, использованием в предложенном способе предварительного этапа поиска всего множества путей с заданным истоком для всех стоков. Следует также ожидать, что с ростом количества объединяемых множеств будет возрастать и выигрыш, вследствие устранения дублирующих рутинных операций.

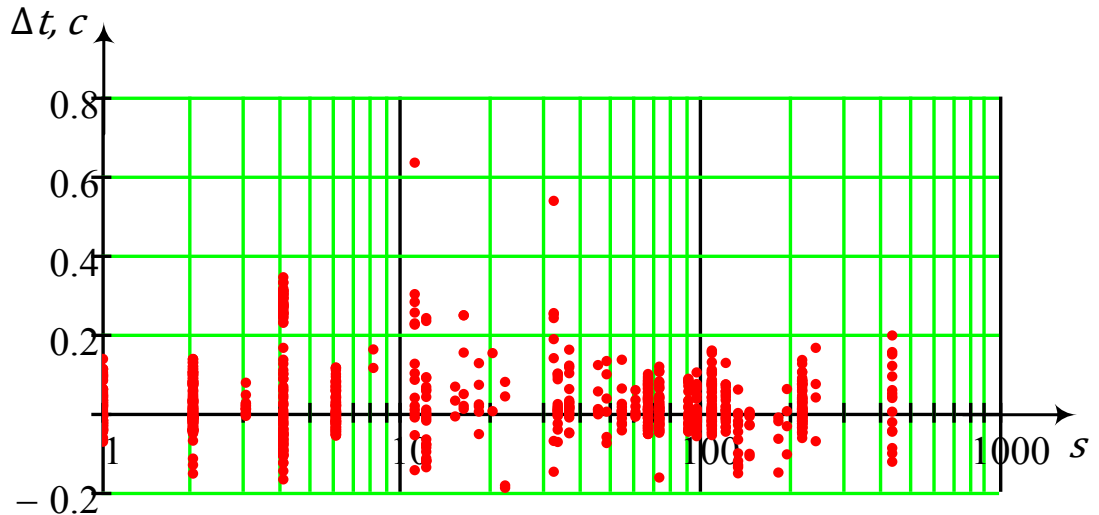


Рисунок 4.9 – Зависимость выигрыша Δt по времени выполнения процедуры формирования двух множеств путей от их количества s

Действительно, с ростом количества n_s одновременно объединяемых множеств вычислительные затраты в предложенном методе увеличиваются незначительно, а в известном методе наблюдается кратный рост (рисунок 4.10).

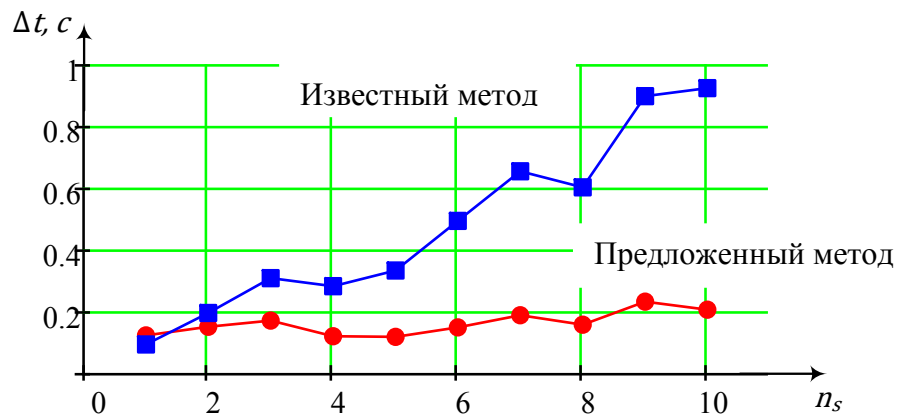


Рисунок 4.10 – Зависимость выигрыша Δt по времени выполнения процедуры формирования путей от количества n_s одновременно получаемых их множеств

Отсюда можно сделать вывод, что наибольшее время тратится именно на формирование списка всех множеств путей для заданного истока, а не на процедуру выбора из этих альтернатив необходимых множеств для заданных

стоков. В дальнейшем подобное явление вполне возможно использовать для разработки способов формирования многосвязных деревьев.

Аналогичное сравнение было проведено и для процедур формирования сечений, где разработанные процедуры сравнивались с известным методом, в основе которого используется матрица связности [97,120].

Рисунок 4.11 демонстрирует зависимость выигрыша Δt по времени, определяемую как разность между временем формирования сечений предложенным способом t_r и методом поиска сечений на основе матрицы связности t_t (cut sets enumeration using connection matrix) [107] по выражению (4.27).

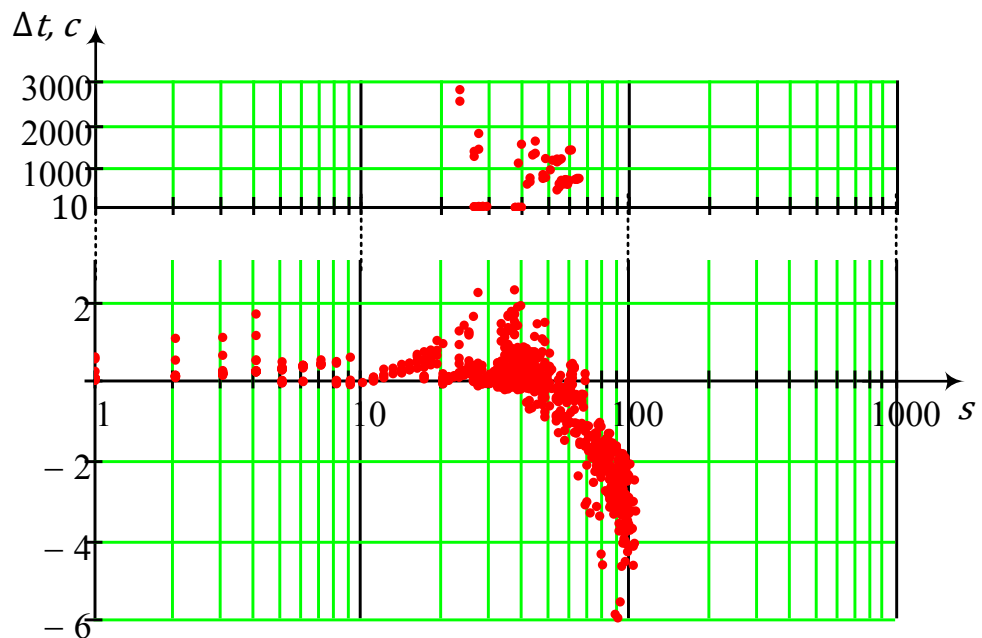


Рисунок 4.11 – Зависимость выигрыша Δt по времени выполнения процедуры формирования сечений от их количества s

На графике видно преимущества разработанного способа, однако для некоторого количества сечений виден проигрыш по времени вычислений, это связано с применением вспомогательной процедуры деления графа на составляющие. Однако, график демонстрирует и выигрыш, достигающий значений в несколько сотен и даже тысяч секунд для некоторых наборов сечений.

Также при формировании других простейших подграфов предложенными процедурами для всеполюсной и многополюсной связности сети, анализ показал преимущества разработанных процедур по сравнению с известными методами¹⁰⁷. Так для ряда проведенных экспериментов расчеты по формированию простейших подграфов с помощью известных методов приводили к достаточно затяжному процессу, в некоторых случаях время выходило за пределы одних суток (более 24 часов), а при использовании разработанных процедур, при тех же условиях, они справлялись за время порядка пяти минут.

Таким образом, общий анализ предложенных методов формирования простейших подграфов для сложноразветвленных сетей показал, что выигрыш во времени в среднем по проведенным экспериментам достигает величины до 1,8 раза больше относительно известных методов [88,97].

Анализ надежности телекоммуникационной сети, поддерживающей механизмы обеспечения отказоустойчивости (рисунок 4.7), проводился по всем архитектурам, вплоть до двух резервируемых и резервирующих маршрутов и всех видов защищаемых участков: узел, линия, сегмент, маршрут, кольцо и р-цикл. Результаты представлены в таблицах 4.3 и 4.4.

Таблица 4.3 – Параметры надежности сети с защитным переключением

| Участок | 1+1 | 2:1 | (1:1) ² | 2:2 |
|---------|---------|---------|--------------------|---------|
| линия | 0,99966 | 0,99080 | 0,99083 | 0,99442 |
| узел | 0,99984 | 0,98214 | 0,99607 | 0,99880 |
| сегмент | 0,99284 | 0,98352 | 0,99072 | 0,99586 |
| маршрут | 0,99981 | 0,98411 | 0,98889 | 0,99472 |
| кольцо | 0,99985 | 0,95771 | 0,96665 | 0,96921 |
| р-цикл | 0,99986 | 0,95771 | 0,96431 | 0,96804 |

Таблица 4.4 – Параметры надежности сети с динамическим восстановлением

| Число маршрутов | без резервирования | с восстановлением |
|-----------------|--------------------|-------------------|
| один | 0,99266 | 0,99988 |
| два | 0,98280 | 0,99889 |

На рисунке 4.12 представлен анализ надежности сети с применением механизмов обеспечения отказоустойчивости с единственным резервным

маршрутом и без применения механизмов отказоустойчивости. Из которого видно, что применение механизмов отказоустойчивости для одного маршрута показывает значительный рост надежности, кроме участка – сегмент.

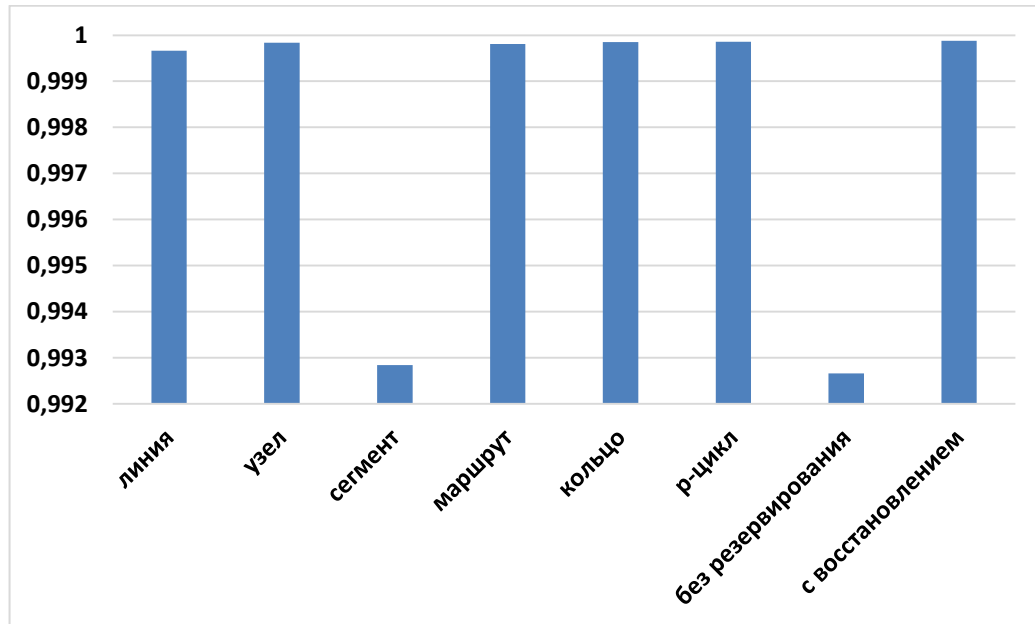


Рисунок 4.12 – Надежность сети с единственным маршрутом

Причина этого, главным образом, заключается в особенности топологии сети, взятой как пример. Так в представленной сети самый надежный путь, лежит через узлы 1–4–6–9–12 и включает три резервируемых участка: 1–4–6, 4–6–9 и 6–9–12. В свою очередь каждый резервируемый участок состоит из резервирующих путей, которые имеют общие элементы с резервирующими путями соседних участков, а это приводит к уменьшению результирующих защитных свойств.

При организации двух требуемых маршрутов передачи, анализ представлен на рисунке 4.13, также видно значительный рост надежности. Но при этом для повышения надежности необходимо использовать архитектуру с двумя альтернативными путями – 2:2, поскольку, при всех прочих равных условиях, она приводит к наилучшим результатам. Основная причина – большая вариативность в выборе альтернативных маршрутов, что естественно сказывается в сложности администрирования. Отставание по надежности резервирования маршрутов

объясняется существованием, по сути, максимум двух независимых маршрутов между истоком и стоком.

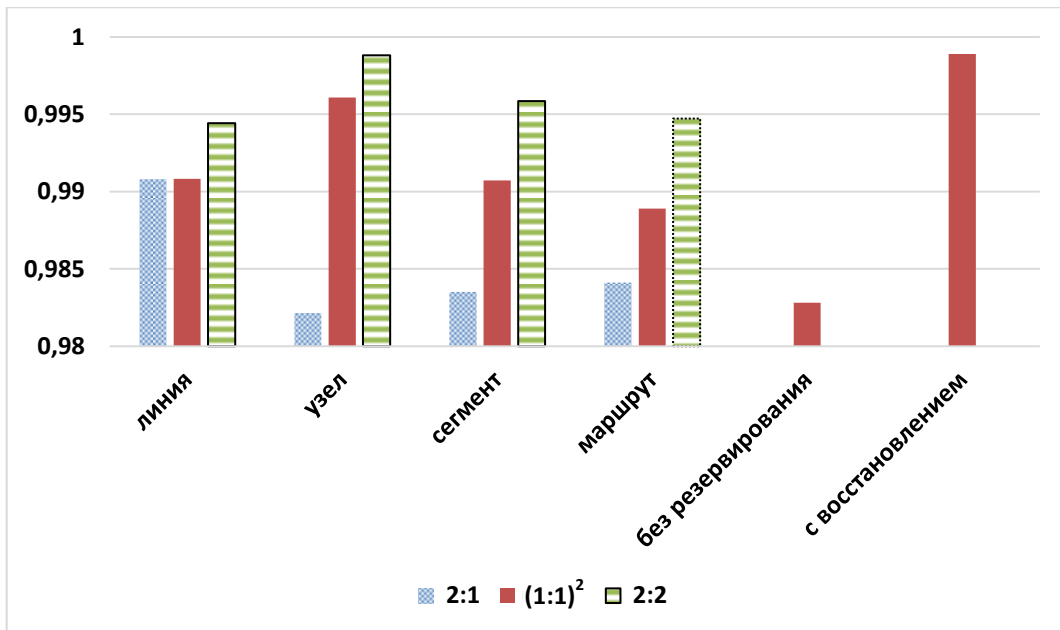


Рисунок 4.13 – Надежность сети с двумя альтернативными маршрутами

Отметим интересный парадокс: значение коэффициента готовности при резервировании узлов по схеме 2:1 меньше, чем в случае без резервирования. Это объясняет тем, что механизмы повышения отказоустойчивости на локальных участках ориентированы только на повышение надежности рассматриваемого участка, а не всего маршрута в целом, следовательно, возможны топологии, в которых отказоустойчивые решения являются неэффективными.

Механизмы обеспечения отказоустойчивости с архитектурами кольцо и р-циклов для двух альтернативных участков (колец или р-циклов) демонстрируют подобную же зависимость: использование архитектуры с двумя резервирующими участками оказывается предпочтительным (рисунок 4.14). Здесь также проявляется более высокая вариативность в выборе альтернатив.

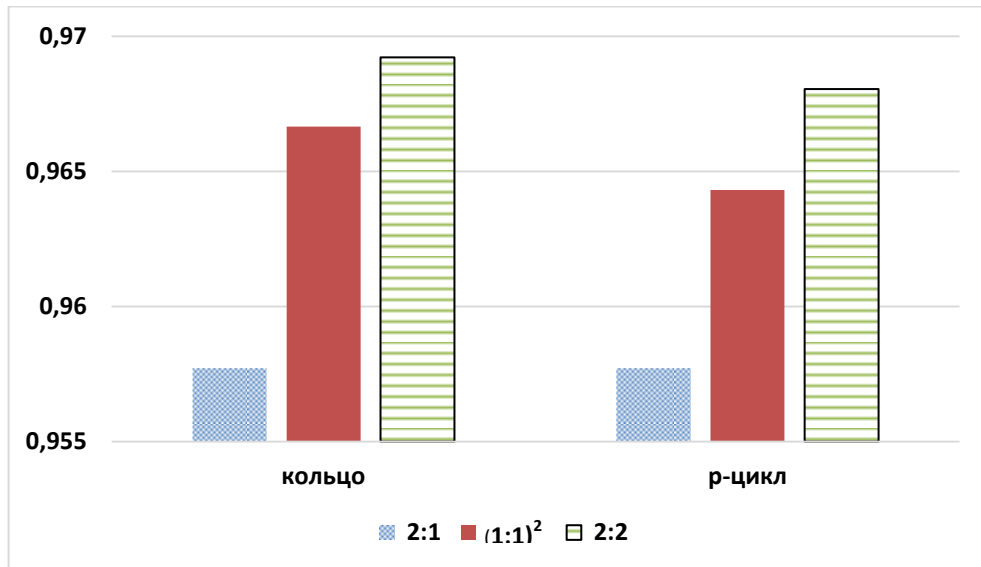


Рисунок 4.14 – Надежность сети с двумя альтернативными участками

В итоге можно заключить, что применяемые в телекоммуникационных сетях механизмы обеспечения отказоустойчивости, являются одним из значимых способов в повышении структурной надежности сетей при отказах ее элементов. Но непосредственное применение этих механизмов в конкретном случае организации сетевого взаимодействия требует проведения анализа топологии сети и показателей надежности ее элементов. А это обеспечивается, в том числе и с помощью предложенных процедур формирования простейших подграфов для сетей различных типов связности и разработанных методов оценки надежности.

Подчеркнем, что вопросы, касающиеся оперативности переключения на резервные маршруты, и эффективности использования ресурсов в данном исследовании не рассматривались и требуют дальнейших исследований.

4.4. Выводы по четвертому разделу

1. В разделе рассмотрено влияние показателей телекоммуникационной сети на ее результирующую надежность относительно – коэффициента готовности.

2. Предложен метод расчета вероятностей связности телекоммуникационной сети, поддерживающей механизмы обеспечения отказоустойчивости. Метод, использует разбиение элементов основного

и резервного маршрутов на три группы участков: первая – фиксированные, вторая – резервируемые, третья – резервирующие. Участки рассматриваются как набор ребер и вершин случайного графа исследуемой сети с максимальными коэффициентами готовности. Подобное представление совместно с применением метода многопеременной инверсии позволяет учесть эффекты дублирования элементов в различных маршрутах и, как следствие, устранить неточности оценки коэффициента готовности относительно методов, использующих допущение о независимости путей передачи информации.

3. Представлен анализ надежности телекоммуникационной сети, основой которой является магистральная кабельная сеть юга России, поддерживающая механизмы обеспечения отказоустойчивости. Из которого следует, что механизмы отказоустойчивости являются значимым способом в повышении структурной надежности сети.

Заключение

В диссертационной работе решена актуальная научная задача, заключающаяся в разработке методов расчета надежности сети на основе метода многопеременных инверсий, для всех мер связности, с использованием разработанных процедур формирования множеств простейших подграфов и метода расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети, поддерживающей механизмы обеспечения отказоустойчивости.

Основные результаты диссертационного исследования сведены к следующему.

1. Проведенный анализ механизмов обеспечения отказоустойчивости, подтвердил высокую значимость их применение для повышении итоговой надежности сети при защите информации в случаи отказов.

2. Проведенный анализ существующих аналитических методов точной оценки коэффициента готовности (вероятности связности) телекоммуникационных сетей, показал, что определение показателей надежности является трудноразрешимой задачей и не все существующие методы способны ее решить для большого количества элементов сети за приемлемое время и различных мер связности.

3. Предложены и разработаны процедуры формирования множеств простейших подграфов телекоммуникационной сети для двух-, все- и многополюсной связности, позволяющие в отличие от известных:

– формировать множества путей телекоммуникационной сети между произвольными истоком и стоком на основе отбора альтернатив с соответствующим стоком;

- формировать множества остовых деревьев телекоммуникационной сети на основе перебора декартовых произведений вершинных сечений, проверок на уникальность ребер и связность результирующих подграфов;
- формировать множества многополюсных деревьев для произвольного набора полюсов телекоммуникационной сети учитывая свойство принадлежности листьев подграфов только множеству полюсов;
- формировать множества минимальных двухполюсных сечений телекоммуникационной сети с заданными истоком и стоком включая этап проверки добавляемого сечения на минимальность;
- упростить процедуру формирования множеств минимальных всеполюсных сечений телекоммуникационной сети, на основе анализа добавляемого сечения на уникальность.

В результате для сложноразветвленной телекоммуникационной сети выигрыш во времени вычисления в среднем по проведенным экспериментам достигает до 1,8 раза относительно известных методов.

4. Разработана рекурсивная процедура приведения событий несвязности к объединению независимых событий, позволяющая в отличие от известных на основе метода многопеременных инверсий отрицания пересечения событий связности графа получать простые формы перехода логических функций к замещению, используемые для расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети.

5. Разработаны методы расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети на основе многопеременной инверсии отрицания пересечения событий связности (несвязности) графа, формируемых на основе множеств подграфов путей (сечений). В результате число анализируемых подграфов в ходе процесса редукции исходного графа уменьшается относительно известных методов в два раза при значительном количестве вершин (для более, чем восемнадцати вершин погрешность менее 0,1%).

6. Разработан метод расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети, поддерживающей механизмы

обеспечения отказоустойчивости: защитного переключения (protection) и динамического восстановления (restoration), гарантирующий наличие от одного до нескольких маршрутов передачи между заданными источником и стоком, позволяющий учесть эффекты дублирования элементов и снять ограничение о независимости путей передачи информации в сложноразветвленных сетях.

7. Проведен анализ надежности телекоммуникационной сети, на примере магистральной кабельной сети юга России, поддерживающей механизмы обеспечения отказоустойчивости с использованием предложенного метода расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети.

На основании представленных выше положений можно сделать вывод о том, что цель диссертационной работы достигнута, научная задача решена

Список сокращений и условных обозначений

| | |
|--|--|
| ЕСЭ | Единая сеть электросвязи |
| МСЭ-Т | Международный союз электросвязи по телефонии |
| ТфОП | Телефонная сеть общего пользования |
| APS (Automatic Protection Switching) | Автоматическая защита переключением |
| BGP (Border Gateway Protocol) | Протокол пограничного шлюза |
| CP (Card Protection) | Защита карт |
| D&C (Drop and Continue) | Схема падения и продолжения |
| DVA (Distance Vector Algorithm) | Дистанционно-векторные алгоритмы |
| EPS (Equipment Protection Switching) | Защитное переключение оборудования |
| ECMP (Equal Cost Multi-Path) | Выбор маршрута от его стоимости |
| EIGRP (Enhanced Interior Gateway Routing Protocol) | Усовершенствованный протокол маршрутизации внутреннего шлюза |
| EGP (Exterior Gateway Protocol) | Протоколы внешнего шлюза |
| FRR (Fast ReRoute) | Быстрая перемаршрутизация |
| FIS (Fault Indication Signal) | Сигнала индикации неисправности |
| IGP (Interior Gateway Protocol) | Протоколы внутреннего шлюза |
| IGRP (Interior Gateway Routing Protocol) | Протокол маршрутизации внутреннего шлюза |
| IS-IS (Intermediate System-to-Intermediate System) | Протокол взаимодействие промежуточных систем |

| | |
|---|--|
| LDP (Label Distribution Protocol) | Протокол распределения меток |
| LFA (Loop Free Alternate) | Механизм поиска циклов |
| LSA (Link State Algorithm) | Алгоритмы состояния связей |
| LSP (Label Switching Path) | Проложенный путь с коммутацией по меткам |
| LSR (Label Switching Router) | Маршрутизатор с коммутацией по меткам |
| MPLS (Multi-Protocol Label Switching) | Многопротокольная коммутация по меткам |
| MRT (Maximally Redundant Trees) | Механизмы построения максимально избыточных деревьев |
| MSP (Multiplex Section Protection) | Защита мультиплексной секции |
| MS-DP Rings (Multiplex Section – Dedicated Protection Rings) | Кольцо выделенной защиты секции мультиплексирования |
| MS-SP Rings (Multiplex Section – Shared Protection Rings) | Кольцо общей защиты секции мультиплексирования |
| MVI (Multiple Variable Inversion) | Много переменная инверсия |
| NMS (Network Management System) | Система управления сетью |
| OCh (Optical Channel) | Оптический канал |
| OCh-DPRing (OCh-Dedicated Path Protection Ring) | Оптический канал в кольцевой сети с выделенной защитой |
| OCh-SPRing (OCh-Shared Protection Ring) | Оптический канал в кольцевой сети с общей защитой |
| ODU (Optical Channel Data Unit) | Блок данных оптического канала |
| OTN (Optical Transport Network) | Оптические транспортные сети |
| OMS (Optical Multiplex Section) | Оптическая секция мультиплексирования |
| OMS-DP Ring (Optical Multiplex Section Dedicated Protection Ring) | Оптическая мультиплексная секция с кольцом выделенной защиты |
| OMS-SPRing (Optical Multiplexed) | Оптическая мультиплексная секция с кольцом |

| | |
|--|------------------------------------|
| Section Shared Protection Ring) | общей защиты |
| OSPF (Open Shortest Path First) | Открытый протокол кратчайшего пути |
| QoS (Quality of Service) | Качество обслуживания |
| PLR (Point of Local Repair) | Точка локального восстановления |
| RIP (Routing Information Protocol) | Протокол маршрутной информации |
| RSVP (Resource Reservation Protocol) | Протокол резервирования ресурсов |
| SDP (Sum of Disjoint Product) | Сумма несовместных событий |
| $G = (V, L)$ | Случайный граф |
| v_s | Вершина истока графа |
| v_t | Вершина стока графа |
| \mathbf{X} | Матрица |
| \mathbf{x} | Вектор |
| S | Множество |
| s | Событие |
| $P(S)$ | Вероятность связности |
| $\mathbf{1}_v = \{u_i\}_{i=1, \dots, v}$ | Единичный вектор длины v |
| \top | Оператор транспонирования |
| \cup | Операция поглощения |
| \sqcup | Операция расщепления |
| \otimes | Кронекеровское произведение |
| \odot | Произведение Адамара |

Список литературы

1. Ананьев, А. Н. Разработка и исследование методов расчета надежности корпоративных сетей региональных операторов связи/ А. Н. Ананьев// Электросвязь. – 2002. – № 10. – С. 30–33.
2. Афанасьев, В. В. Влияние основных факторов на показатели структурной и балансовой надежности электроэнергетической системы/ В. В. Афанасьев// Актуальные вопросы технических наук: материалы международной научной конференции. – Пермь, 2011. – С. 203–210.
3. Барлоу, Р. Математическая теория надежности/ Р. Барлоу, Ф. Прошан. – М.: Сов. Радио, 1969. – 488 с.
4. Батенков, К. А. Точные и граничные оценки вероятностей связности сетей связи на основе метода полного перебора типовых состояний/ К. А. Батенков// Труды СПИИРАН. – 2019. – Т. 18, № 5. – С. 1093–1118.
5. Батенков, К. А. Устойчивость сетей связи: моногр./ К. А. Батенков. – Орел: Академия ФСО России, 2017. – 277 с.
6. Балашова, Т. И. Анализ надежности и функционирования сложных объектов на примере систем различного рода/ Т. И. Балашова, П. А. Пашковская// Материалы международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии (ИСТ-2012)»/ НГТУ. – Н. Новгород, 2012. – С. 255–256.
7. Балашова, Т. И. Модели, методы и алгоритмы повышения структурной надежности сетей передачи данных [Текст]: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01/ Балашова Татьяна Ивановна. – Нижний Новгород, 2015. – 166 с.
8. Белоусов, А. И. Дискретная математика: учеб. для вузов/ А. И. Белоусов, С. Б. Ткачев; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко; МГТУ им. Н. Э. Баумана. – 3-е изд., стереотип. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 744 с.

9. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов/ И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – 13-е изд., исправленной. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.
10. Будылдина, Н. В. Оптимизация сетей с многопротокольной коммутацией по меткам/ Н. В. Будылдина, Д. С. Трибунский, В. П. Шувалов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2010. – 144 с.
11. Величко, В. В. Современные транспортные сети строятся на базе ВОЛС/ В. В. Величко, Е. А. Субботин, В. П. Шувалов, А. Ф. Ярославцев. – М.: Горячая линия – Телеком, 2005. – 711 с.
12. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей: учеб. для вузов/ Е. С. Вентцель. – 7-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с.
13. Гнеденко, Б. В. Математические методы в теории надежности: Основные характеристики надежности и их статистический анализ/ Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев и др. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2017. – 584 с.
14. Гольдштейн, А. Б. Транспортные сети IP/MPLS. Технология и протоколы: учеб. пособие/ А. Б. Гольдштейн, А. В. Никитин, А. А. Шкрыль. – СПб.: СПбГУТ, 2016. – 80 с.
15. Гольдштейн, Б. С. Сети связи пост-NGN/ Б. С. Гольдштейн, С. В. Кучерявый. – СПб.: БХВ Петербург, 2014. – 160 с.
16. ГОСТ Р 53111–2008. Устойчивость функционирования сети связи общего пользования. Требования и методы проверки. – М.: Стандартинформ, 2009. – 16 с.
17. ГОСТ Р 55389–2012. Система национальных стандартов в области качества услуг связи. Соглашение об уровне обслуживания (SLA). – М.: Стандартинформ, 2019. – 12 с.
18. ГОСТ Р 53724–2009. Качество услуг связи. Общие положения. – М.: Стандартинформ, 2011. – 12с.
19. ГОСТ Р 53727–2009. Качество услуги «местная телефонная связь». Показатели качества. – М.: Стандартинформ, 2011. – 11 с.
20. ГОСТ 34332.3–2021 Безопасность функциональная систем, связанных с безопасностью зданий и сооружений. – М.: Стандартинформ, 2021. – 76 с.

21. ГОСТ Р 27.102–2021. Надежность объекта. Термины и определения. – Введ. 2022–01–01. – М.: Российский институт стандартизации, 2021. – 40 с.
22. Грязев, А. Н. Оценка надежности транспортной сети телекоммуникационной системы при использовании систем резервирования/ А. Н. Грязев [и др.]// Информация и Космос. – 2017. – № 4. – С. 126–132.
23. Дудник, Б. Я. Надежность и живучесть системы связи/ Б. Я. Дудник, В. Ф. Овчаренко и др. – М.: Радио и связь, 1984. – 216с.
24. Дудник, Б. Я. Применение метода двудольных графов для оценки надежности сложных систем/ Б. Я. Дудник, Б. П. Филин// Автоматика и телемеханика. – 1981. – № 12. – С. 154-167.
25. Егунов, М. М. Анализ структурной надежности транспортной сети/ М. М. Егунов, В. П. Шувалов// Вестник СибГУТИ. – 2012. – №1. – С. 54–60.
26. Ефимов, В. В. Вероятные направления эволюции телекоммуникационной системы/ В. В. Ефимов, Н. А. Соколов, А. В. Федоров// Труды ЦНИИС. Санкт-Петербургский филиал. – 2016. – Т.1(2). – С.11–23.
27. Ефимов, В. В. Модификация кольцевых механизмов резервирования для неравномерных потоковых структур транспортных сетей связи/ В. В. Ефимов, С. А. Ясинский, А. Н. Зюзин// Электросвязь. – 2016. – № 12. – С. 68–70.
28. Ефимов, В. В. Подход к поиску отказоустойчивой структуры транспортной сети телекоммуникационной системы на основе p -циклов/ В. В. Ефимов, [и др.]// Информация и Космос. – 2016. – № 3. – С. 36–39.
29. Зыков, А. А. Основы теории графов/ А. А. Зыков – М.: Наука, Гл. ред физ.-мат. лит., 1987. – 384 с.
30. Зыков, А.А. Основы теории графов/ А.А. Зыков.– М.: Вузовская книга, 2004. – 664 с.
31. Калимулина, Э. Ю. Моделирование и анализ надежности корпоративной сети/ Э. Ю. Калимулина// Стандарты и качество. – 2008. – № 8. – С. 96–112.
32. Кучерявый, Е. А. Управление трафиком и качество обслуживания в сети Internet/ Е. А. Кучерявый. – СПб.: Наука и техника, 2004. – 336 с.

33. Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход/ Н. Кристофидес; пер. с англ.; под ред. Г. П. Гаврилова. – М.: Мир, 1978. – 432 с.
34. Лабутин, А. Г. Использование приведенных оценок Эзари–Промана для анализа надежности сети/ А. Г. Лабутин, Б. П. Филин// Надежность. – 2017. – Т. 17, № 3. – С. 24–31.
35. Ломоносов, М. В. Верхняя граница надежности информационных сетей/ М. В. Ломоносов, В. П. Полесский// Проблемы передачи информации. – 1971. – Т. 7, № 4. – С. 78–81.
36. Ломоносов, М. В. Нижняя оценка надежности сетей/ М. В. Ломоносов, В. П. Полесский// Проблемы Передачи Информации. – 1972. – Т. 8, № 2. – С. 47–53.
37. Магнус, Я. Р. Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике/ Я. Р. Магнус, Х. Нейдеккер; пер. с англ.; под ред. С. А. Айвазяна. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 496 с.
38. Макаренко, С. И. Время сходимости протоколов маршрутизации при отказах в сети/ С. И. Макаренко// Системы управления, связи и безопасности. – 2015. – № 2. – С. 45–98.
39. Мигов, Д. А. Декомпозиция сети по сечениям при расчете ее надежности/ Д. А. Мигов// Прикладная дискретная математика. – 2020. – № 47. – С. 62–86.
40. Мигов, Д. А. Формулы для быстрого расчета вероятности связности подмножества вершин в графах небольшой размерности/ Д. А. Мигов// Проблемы информатики. – 2010. – № 2. – С. 10–17.
41. Модернизация корпоративных сетей: причины, стратегии, эффективность [Электронный ресурс]// Круглый стол «Сетевого журнала», с участием представителей компаний IBS, «Тауэр-Сети», ЛАНИТ, RaceCommunications. – Сетевой журнал, 2001, № 2. – Режим доступа: <http://www.setevoi.ru/cgi-bin/text.pl/magazines/2001/2/1>, свободный.
42. Мур, Э. Надежные схемы из ненадежных реле/ Э. Мур, К. Шеннон// Кибернетический сборник. – М.: ИЛ. – 1960. – Вып. 1. – С. 109–148.

43. Нетес, В. А. Виртуализация, облачные услуги и надежность/ В. А. Нетес// Вестник связи. – 2016. – № 8. – С. 7–9.
44. Нетес, В. А. О нормативных требованиях к надежности сетей электросвязи/ В. А. Нетес// Вестник связи. – 2022. – № 5. – С. 6–11.
45. Нетес, В. А. Основы теории надежности: учеб. пособие для вузов/ В. А. Нетес. – М.: Горячая линия – Телеком, 2019. – 102 с.
46. Нетес, В. А. Соглашение об уровне обслуживания и надежность/ В. А. Нетес// Надежность. – 2017. – Т. 17, № 4. – С. 27–30.
47. Нетес, В. А. Что нужно для успешного применения SLA/ В. А. Нетес// Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. – 2015. – Т. 9, № 7. – С. 16–20.
48. Нетес, В. А. Цифровой экономике – надежную инфраструктуру/ В. А. Нетес// Вестник связи. – 2019. – № 12. – С. 39–43.
49. Нетес, В. А. Ethernet операторского класса: учеб. пособие для вузов/ В. А. Нетес. – М.: Горячая линия – Телеком, 2023. – 128 с.
50. Носов, М. В. Методы полного разложения мостиковых соединений в задачах анализа связности структурно-сложных двухполюсных сетей/ М. В. Носов// Надежность. – 2015. – № 4. – С. 68–74.
51. Нормы на электрические параметры каналов тональной частоты магистральной и внутризоновых первичных сетей: Утв. М-вом связи РФ 15.04.96. – М.: МК-Полиграф, 1996. – 96 с.
52. Нормы на электрические параметры сетевых трактов магистральной и внутризоновых первичных сетей. I часть: Утв. М-вом связи РФ 08.01.1997. – М.: МК-Полиграф, 1996. – 134 с.
53. Нормы на электрические параметры линейных трактов магистральной и внутризоновых первичных сетей. II часть: Утв. М-вом связи РФ 08.01.1997. – М.: МК-Полиграф, 1996. – 168 с.
54. Обоскалов, В. П. Структурная надежность электроэнергетических систем: учеб. пособие/ В. П. Обоскалов. – Екатеринбург: УрФУ, 2012. – 194 с.
55. Общая эксплуатация сети, телефонная служба, функционирование служб и человеческие факторы. Качество услуг электросвязи: концепции, модели,

цели и планирование надежности работы – Термины и определения, связанные с качеством услуг электросвязи: рекомендация МСЭ-Т серии Е. 800// Сектор стандартизации электросвязи МСЭ. – 2008. – 8 с.

56. Олифер, В. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы: учеб. для вузов/ В. Олифер, Н. Олифер. –5-е изд. – СПб.: Питер, 2016. – 992 с.

57. Острейковский, В. А. Теория надежности: учеб. для вузов/ В. А. Острейковский. – М.: Высш. шк., 2003. – 463 с.

58. Перегуда, А. И. Методы расчета показателей надежности ЭВМ: учеб. пособие по курсу «Надежность, контроль и диагностика ЭВМ»/ А. И. Перегуда, А. А. Повякло.– Обнинск: ИАТЭ, 1996. – 63 с.

59. Полесский, В. П. Об одном способе построения структурно-надежной сети/ В. П. Полесский.– М.: Наука,1970. – 134с.

60. Полесский, В. П. Об одной нижней границе надежности информационных сетей/ В. П. Полесский// Тезисы докладов I Всесоюзного Симпозиума «Оценка надежности сетей связи и их элементов».– 1970. – С.64–65.

61. Полесский, В. П. Оценки структурной надежности сети передачи данных [Текст]: дис. ... докт. физ.-мат. наук: 05.13.17/ В. П. Полесский – М., 2000. – 199с.

62. Половко, А. М. Основы теории надежности/ А. М. Половко, С. В. Гуров. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 704 с.

63. Попков, В. К. Математические модели связности/ В. К. Попков; отв. ред. А. С. Алексеев.– 2-е изд., испр. и доп. – Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2006. – 490 с.

64. Поповский, В. В. Обзор и сравнительный анализ основных моделей и алгоритмов многопутевой маршрутизации в мультисервисных телекоммуникационных сетях/ В. В. Поповский, А. В. Лемешко, Л. Н. Мельникова, Д. В. Андрушко// Прикладная радиоэлектроника.–2005.– Т. 4, № 4. – С. 372–382.

65. Распоряжение Правительства Российской Федерации от 28 июля 2017 г. № 1632-р. Национальная программа «Цифровая экономика Российской Федерации»// Правительство Российской Федерации: официальный сайт. – Москва – URL: [HTTP://GOVERNMENT.RU/DOCS/28653](http://GOVERNMENT.RU/DOCS/28653)

66. Пугачев, В. С. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие/ В. С. Пугачев. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 496 с.
67. Райгородский, А. М. Модели случайных графов/ А. М. Райгородский. – М.: МЦНМО, 2011.– 136 с.
68. Райгородский, А. М. Экстремальные задачи теории графов и анализ данных/ А. М. Райгородский. – М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2009.– 120 с.
69. Рекомендация Y.3001. Будущие сети: целевые установки и цели проектирования – 2011–05. – Женева: МСЭ-Т, 2012. – 18 с.
70. Росляков, А. В. Сети связи: учеб. пособие по дисциплине «Сети связи и системы коммутации»/ А. В. Росляков. – Самара: ФГБОУ ВО ПГУТИ, 2017. – 166 с.
71. Росляков, А. В. Будущие сети (Future network)/ А. В. Росляков, С. В. Ваняшин. – Самара: ПГУТИ, 2015. – 274 с.
72. Росляков, А. В. Интернет вещей: учеб. пособие/ А. В. Росляков, С. В. Ваняшин, А. Ю. Гребешков. – Самара: ПГУТИ, 2015. – 200 с.
73. Рябинин, И. А. Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем/ И. А. Рябинин, Г. Н. Черкесов. – М.: Радио и связь, 1981. – 264 с.
74. Рябинин, И. А. Надежность и безопасность структурно-сложных систем/ И. А. Рябинин. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб.: СПбГУ, 2007. – 276 с.
75. Семенов, Ю. В. Проектирование сетей связи следующего поколения/ Ю.В. Семенов. – СПб.: Наука и Техника, 2005. – 240 с.
76. Сергеева, Т. П. Методы повышения надежности в сетях SDN/ Т. П. Сергеева, Н. Н. Тетекин// Т-Comm. –2014.– № 6. – С. 53–55.
77. Татт, У. Теория графов/ У. Татт; пер. с англ.; под ред. Г.П. Гаврилова. – М.: Мир, 1988. – 424 с.
78. Трегубов, Р. Б. Применение алгебры логики для формализации и решения задач анализа надежности структурно-сложных распределенных систем/ Р. Б. Трегубов, И. А. Саитов// Наукоеведение. – 2016. – Т. 8, № 3. – С. 1–14.

79. Трегубов, Р. Б. Теоретические основы анализа и оптимизации иерархических многоуровневых маршрутизирующих систем: моногр./ Р. Б. Трегубов, И. А. Сайтов. – Орел: Академия ФСО России, 2017. – 585 с.

80. Тютин, Н. Н. Методы расчета структурной надежности многоцелевых территориальных мультисервисных систем связи/ Н. Н. Тютин, И. М. Успенский, С. М. Чудинов, О. Н. Кривошеев// «Научные ведомости» БелГУ. – 2009. – № 1(56). – С. 59–68.

81. Ушаков, И. А. Курс теории надежности систем: учеб. пособие для вузов/ И. А. Ушаков.– М.: Дрофа, 2008. – 239 с.

82. Филин, Б. П. Методы анализа структурной надежности сетей связи/ Б. П. Филин.– М.: Радио и связь, 1988. – 208 с.

83. Фокин, А. Б. Анализ вероятности связности телекоммуникационной сети на основе инверсий ее состояний/ А. Б. Фокин, А. А. Батенков, К. А. Батенков// Управление, вычислительная техника и информатика. – 2022. – № 59. – С. 91–98.

84. Фокин, А. Б. Вероятность связности телекоммуникационной сети на основе приведения нескольких событий несвязности к объединению независимых событий/ А. Б. Фокин, К. А. Батенков, А. А. Батенков// Информационно-управляющие системы. – 2021. – № 6 (115). – С. 53–63.

85. Фокин, А. Б. Защита трафика в транспортных сетях при авариях с применением методов восстановления и переключения/ А. Б. Фокин, К. А. Батенков// Общество. Наука. Инновации. НПК-2022: Сборник статей XXII Всероссийской научно-практической конференции./ ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет». – Киров, 2022. – С. 268–275.

86. Фокин, А. Б. Исследование математической модели узла коммутации защищенной корпоративной мультисервисной сети связи/ А. Б. Фокин, Д. В. Шелковый, С. А. Корнилов// Экономика и менеджмент систем управления. – 2017. – № 2 (24). – С. 291–300.

87. Фокин, А.Б. Метод расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети, поддерживающей механизмы обеспечения

отказоустойчивости/ А.Б. Фокин// Информационные системы и технологии. – 2023.– № 4 (138). – С. 83–91.

88. Фокин, А. Б. Методы формирования множеств состояний телекоммуникационных сетей для различных мер связности/ А. Б. Фокин, А. А. Батенков, К. А. Батенков// Труды СПИИРАН. – 2020. – Т. 19, № 3. – С. 644–673.

89. Фокин, А. Б. Программный модуль для нахождения k -минимальных остовых деревьев: свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2021614146 от 10.03.2021 г. РФ/ А. Б. Фокин [и др.] – № 2021612829; заявл. 10.03.2021 г.; зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 19.03.2021 г.

90. Фокин, А. Б. Расчет надежности сети методом объединения связанных подграфов с поглощением/ А. Б. Фокин, К. А. Батенков, Д. Ю. Шелковый// Труды Северо-Кавказского филиала Московского технического университета связи и информатики. – Ростов-на-Дону: СКФ МТУСИ. – 2019. – № 1. – С. 66–71.

91. Фокин, А. Б. Методы защиты передаваемого трафика от влияния аварий на транспортных сетях связи/ А. Б. Фокин, К. А. Батенков// «СТНО-2022»: Сборник трудов V Международного научно-технического форума/ Рязанский государственный радиотехнический университет.– Рязань, 2022. – Т. 1. – С. 129–133.

92. Фокин, А. Б. Способ расчета надежности сложно разветвленных систем/ А. Б. Фокин// Информационные системы и технологии. – 2019. – № 6 (116). – С. 101–108.

93. Фокин, А. Б. Способ регулирования надежности сложно разветвленных систем: Пат. 2713849 Российская Федерация Н04L 12/801/ А. Б. Фокин [и др.]; заявитель и патентообладатель ФГКВОУ ВО Академия ФСО России. – № 2019112469; заявл. 24.04.2019; опубл. 07.02.2020, бюл. № 4.

94. Фокин, А. Б. Формирование множества деревьев в телекоммуникационных сетях с всеполюсной связностью/ А. Б. Фокин// «СТНО-2020»: межд. науч.-техн. форум/ Рязанский государственный радиотехнический университет. – Рязань, 2020. – С. 163–169.

95. Фокин, А. Б. Формирование множества многополюсных деревьев в телекоммуникационных сетях/ А. Б. Фокин, К. А. Батенков, А. Н. Орешин//

«АПИНО-2020»: межд. науч.-техн. и науч.-метод. конф./ Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича. – Санкт-Петербург, 2020. – С. 115-119.

96. Фокин, А. Б. Формирование множества путей в телекоммуникационных сетях с двухполюсной связностью/ А. Б. Фокин, К. А. Батенков, А. Н. Переверзев// «ИСТ-2020»: межд. науч.-практ. конф./ Институт радиоэлектроники и информационных технологий Нижегородского государственного технического университета. – Нижний Новгород, 2020. – С. 486-492.

97. Фокин, А. Б. Формирование сечений телекоммуникационных сетей для анализа их устойчивости с различными мерами связности/ А. Б. Фокин, К. А. Батенков, А. А. Батенков// Информатика и автоматизация. – 2021. – Т. 20, № 2. – С. 371–406.

98. Фокин, В. Г. Проектирование оптической мультисервисной транспортной сети: учеб. пособие/ В. Г. Фокин. – Новосибирск: Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2019. – 241 с.

99. Харари, Ф. Теория графов/ Ф. Харари; пер. с англ. и предисл. В. П. Козырева; под ред. Г. П. Гаврилова; изд. 2-е. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 296 с.

100. Цициашвили, Г. Ш. Асимптотика вероятности связности графа с низконадежными ребрами/ Г. Ш. Цициашвили, М. А. Осипова, А. С. Лосев// Прикладная дискретная математика. – 2013. – № 1(19). – С. 93–98.

101. Шубинский, Н. Б. Структурная надежность информационных систем. Метод анализа/ Н. Б. Шубинский. – М.: Журнал Надежность, 2012. – 295 с.

102. Шувалов, В. П. Методы резервирования и восстановления в телекоммуникационных сетях/ В. П. Шувалов, С. В. Тимченко// Межвузовский тематический сборник научных трудов. – Омск, 2009. – С. 40–43.

103. Шувалов, В. П. Резервирование и восстановление в телекоммуникационных сетях/ В. П. Шувалов, М. М. Егурнов// Вестник СибГУТИ. – 2012. – № 2. – С. 3–10.

104. Abraham, J. A. An Improved Algorithm for Network Reliability/ J. A. Abraham// IEEE Transaction on Reliability. – 1979. – Vol. R–28(1). – pp. 58–61.
105. Aggarwal, K. K. Modification of Cut-sets for Reliability Evaluation of Communication Systems/ K. K. Aggarwal, Y. C. Chopra, J. S. Wajwa// Microelectronics and Reliability. – 1982. – vol. 22(3). – pp. 337–340.
106. Aggarwal, K. K. Reliability Evaluation in Computer Communication Networks/ K. K. Aggarwal, S. Rai// IEEE Transaction on Reliability. – 1981. – Vol. R–30(1) – pp. 237–243.
107. Ahmad, S. H. Enumeration of Minimal Cut-sets of an Undirected Graph/ S. H. Ahmad// Microelectronics Reliability. – 1990. – vol. 30(1). – pp. 23–26.
108. Arijs, P. Planning of WDM ring networks/ P. Arijs, M. Gryseels, P. Demeester// Photonic Network Communications Magazine. – 2000. –vol. 2, no. 1. – pp. 33–51.
109. Atlas, A. RFC 5286. Basic specification for IP fast reroute: Loop-free alternates/ A. Atlas, A. Zinin// Internet Engineering Task Force, Request for Comments (Standards Track). – 2008. – 68 p.
110. Atlas, A. RFC 7811. An Algorithm for Computing IP/LDP Fast Reroute Using Maximally Redundant Trees (MRT-FRR)/ A. Atlas, G. Enyedi, A. Csaszar, C. Bowers, A. Gopalan// Internet Engineering Task Force (IETF). – 2016. – 118 p.
111. Atlas, A. RFC 7812. An Architecture for IP/LDP Fast Reroute Using Maximally Redundant Trees (MRT-FRR)/ A. Atlas, C. Bowers, G. Enyedi// Internet Engineering Task Force (IETF). – 2016. – 44 p.
112. Atlas, A. U-turn alternates for IP/LDP fast-reroute/ A. Atlas// Network Working Group, Internet-Draft (Experimental). – 2006. – 34 p.
113. Ball, M. O. Complexity of network reliability computations/ M.O. Ball// Networks. – 1980. – vol. 10. – pp. 153–165.
114. Ball, M. O. Network Reliability/ M.O. Ball, C.J. Coulborn, J.S. Provan// In: Handbooks in OR and MS.– New York, etc: Elsevier Science B.V. – 1995 – 244 p.

115. Ball, M. O. Bounds on the reliability polynomial for shellable independence systems/ M.O. Ball, J.S. Provan// *SIAM J. on Algebraic and Discrete Methods*. – 1982. – vol. 3. – pp. 166–181.
116. Bonenfant, P. Short course on optical networking, architectures, standards, protection & restoration/ P. Bonenfant// *European Conference on Optical Networking (ECOC)*. – 2001.– Amsterdam, The Netherlands.
117. Bryant, S. RFC 7490. Remote Loop-Free Alternate (LFA) Fast Reroute (FRR)/ S. Bryant, C. Filsfil, S. Previdi, M. Shand, N. So// *Internet Engineering Task Force (IETF)*. – 2015. – 29 p.
118. Bryant, S. RFC 5714. IP fast reroute framework/ S. Bryant, M. Shand// *Internet Engineering Task Force, Request for Comments (Informational)*. – 2010. – 24 p.
119. Bircan, G. Design strategies for meeting unavailability targets using dedicated protection in DWDM networks/ G. Bircan, J. Cannington, E.A. Ortynski and G. Spiride// *IEEE/OSA J. Lightwave Technolody* – 2007 – vol. 25, no. 5. – pp. 1120–1129.
120. Chaturvedi, S. K. Network Reliability Measures and Evaluation/ Sanjay K. Chaturvedi. – Scrivener Publishing LLC, 2016. – 237 p.
121. Davie, B. MPLS: Technology and Applications/ B. Davie, Y. Rekhter. – Morgan Kaufmann, 2000. – 287 p.
122. Ellinas, G. Routing and restoration architectures in mesh optical networks/ G. Ellinas// *Optical Network Magazine*. – 2003. – vol. 4, no. 1. – pp. 91–106.
123. Erdos, P. On random graphs/ P. Erdos, A. Rényi// *Publ. Math. Debrecen*. – 1959. – vol. 6. – pp. 290–297.
124. Erdos, P. On the evolution of random graphs/ P. Erdos, A. Rényi// *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.* – 1960. – vol. 5. – pp. 17–61.
125. Gao, D. Routing pre-configuration for fast and scalable path restoration in DWDM networks/ D. Gao, H. Zhang// *Photonic Network Commun.* – 2006. – vol. 12, no. 3. – pp. 321–327.
126. Goyal, M. Improving Convergence Speed and Scalability in OSPF: A Survey/ M. Goyal, M. Soperi, E. Baccelli, G. Choudhury, A. Shaikh, S. H. Hosseini, K. Trivedi// *IEEE Communications Surveys & Tutorials*. – 2012. – no. 14(2). – pp. 443–463.

127. Grover, W. D. Mesh-Based Survivable Networks: Options and Strategies for Optical, MPLS, SONET, and ATM Networking/ W. D. Grover. – New Jersey: Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, 2003. – 880 p.
128. Heidtmann, K. D. Smaller Sums of Disjoint Products by Sub Product Inversion/ K. D. Heidtmann// IEEE Transaction on Reliability. – 1989. –vol. R-38(3). – pp. 305–311.
129. Housni, K. An efficient algorithm for enumerating all minimal paths of graph/ K. Housni// International Journal of Advanced Science and Applications. – 2019. – 10(1). – pp. 450–460.
130. IEC 60050-192:2015. International Electrotechnical vocabulari – Part 192: Dependability.
131. Kalofolias, S.V. Robust principal component analysis on graphs/ S.V. Kalofolias, X. Bresson, M.M. Bronstein, P. Vandergheynst// CoRR. – 2015. – vol. abc/1504.06151. – URL: <http://arxiv.org/abc/1504.06151>.
132. Lamalen, Y. New and fast algorithm to enumerate all minimal paths starting from s to t/ Y. Lamalen// Journal of Advanced Research in Dynamical and control systems. – 2020. – 12(04). – pp. 1101–1113.
133. Lemeshko, O. Design schemes for MPLS Fast ReRoute/ O. Lemeshko, A. Romanyuk, H. Kozlova// IEEE 2013 12-th International Conference on the Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM). – 2013. – pp. 202–203.
134. Rec. E.860. Framework of a service level agreement. – 2002–06. – Geneva : ITU-T, 2003. – 30 p.
135. Rec. G.911. Parameters and calculation methodologies for reliability and availability of fibre optic systems (Previously CCITT Recommendation). – 1997–04. – ITU-T. – 39 p.
136. Rec. G.1010. End-user multimedia QoS categories. – 2001–11. – Geneva: ITU-T, 2002. – 18 p.

137. Rec. G.8201. Error performance parameters and objectives for multi-operator international paths within optical transport networks. – 2011–04. – Geneva: ITU-T, 2012. – 24 p.

138. Rosen, E. RFC 3031. Multiprotocol label switching architecture/ E. Rosen, A.Viswanathan, R. Callon// Internet Engineering Task Force, Request for Comments (Standards Track). – 2001 – 18 p.

139. MPLS Label Stack Encoding RFC 3032. [Электронный ресурс]. – URL:<http://ietf.org/rfc/rfc3032.txt>.

140. Mishra, R. A Cutsets based Unified Framework to Evaluate Network Reliability Measures/ R. Mishra, S. K. Chaturvedi// IEEE Transaction on Reliability. – 2009. – vol. 56(4). – pp. 658–666.

141. Mishra, R. Global Reliability Evaluation using g-Minimal Cutsets/ R. Mishra, S. K. Chaturvedi// International Journal of Performability Engineering. – 2009. – vol. 5(3). – pp. 251–258.

142. Misra, K. B. New Trends in System Reliability Evaluation/ Krishna B. Misra. – Amsterdam etc.: Elsevier, 1993. – 732 p.

143. Misra, K. B. Reliability Analysis and Prediction: A Methodology Oriented Treatment/ Krishna B. Misra. – Amsterdam etc.: Elsevier, 1992. – 889 p.

144. Mukherjee, B. Optical WDM Networks/ B. Mukherjee. – Springer. 2006. – 956 p.

145. Pan, P. RFC 4090. Fast reroute extensions to RSVP-TE for LSP tunnels/ P. Pan, G. Swallow, A. Atlas// Internet Engineering Task Force, Request for Comments (Standards Track). – 2005. – 24 p.

146. Papán, J. Analysis of existing IP Fast Reroute mechanisms/ J. Papán, P. Segeč, P. Palúch// IEEE 2015 International Conference on Information and Digital Technologies (IDT). – 2015. – pp. 291–297.

147. Paredes, R. Network Reliability Estimation in Theory and Practice/ R. Paredes, L. Duenas–Osorio, K. S. Meel, M. Y. Vardi . – Preprint submitted to Reliability Engineering & System Safety, 2018. – 26 p.

148. Phillips, D. *Fundamentals of Network Analysis*. Prentice-Hall/ D. Phillips, A. Garcia-Diaz. – Englewood Cliffs, 1981. – 474 p.
149. Pino, W. *Comparison between Two All-Terminal Reliability Algorithms/* W.Pino, T. Gomes, R. Kooij// *Journal of Advances in Computer Networks*. – 2015. – pp. 284–290.
150. Rath, D. *A Simple Method for Generating k-Trees of a Network/* D. Rath, K. P. Soman// *Microelectronics and Reliability*. – 1993. – vol. 33(9). – pp. 1241–1244.
151. *Recommendation G.808. Terms and definitions for network protection and restoration. Amendment 1*. – 2018–03. – Geneva: ITU-T, 2018. – 20 p.
152. *Recommendation Y.2001. General overview of NGN*. – 2004–12. – Geneva: ITU-T, 2005. – 10 p.
153. Silva, J. *An effective algorithm for computing all-terminal reliability bounds/* J. Silva, T. Gomes, D. Tipper// *Networks*. – 2015. – vol. 66, issue 4. – pp. 282–295.
154. Vasseur, J. P. *Network Recovery. Protection and Restoration of Optical, SONET-SDH, IP and MPLS/* J. P. Vasseur, M. Pickavet, P. Demeester. – San Francisco, CA: Elsevier, 2004. – 542 p.
155. Wosinska, L. *Fiber Access Networks: Reliability Analysis and Swedish Broadband Market/* L. Wosinska, J. Chen, C. P. Larsen// *IEICE TRANS. COMMUN*. – vol. e92–b, no. 10. – 2009. – pp. 3006–3014.
156. Zhang, H.C. *Connection effect on amplitude death stability of multi-module floating airport/* H.C. Zhang, D.L. Xu, C. Lu// *Ocean Eng*. – 2017. – vol. 129. – pp. 46–56.

Приложение. Акты о внедрении и использовании результатов диссертационной работы

Утверждаю
Проректор по научно-технологической
деятельности и аттестации научных
кадров ФГБОУ ВО
«ОГУ имени И.С. Тургенева»
С.Ю.Радченко
2023 года

Акт о внедрении результатов диссертационной работы Фокина А.Б.
«ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЕЙ НА ОСНОВЕ
ИНВЕРСИЙ ИХ СОСТОЯНИЙ»

Комиссия ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева» в составе: председателя Еременко В.Т., д.т.н., профессора и членов комиссии – к.т.н., доцента Савва Ю.Б., заведующего Кафедрой информационной безопасности, к.ю.н., доцента Мишина Д.С., составил и настоящий акт в том, что в университете внедрены в учебный процесс на кафедре информационной безопасности следующие результаты диссертационной работы Фокина А.Б.:

1. Процедуры формирования множеств простейших подграфов (путь, дерево, сечение) телекоммуникационной сети, позволяют описать тип связности сети: двух-, все- или многополосную.

2. Методы расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети на основе многопеременных инверсий событий связности или несвязности графа, позволяют производить расчеты структурной надежности сети с использованием процедур формирования простейших подграфов для любых типов связности сети.

3. Метод расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети, позволяет определить надежность сети с учетом реализованных на ней механизмов обеспечения отказоустойчивости.

Указанные выше результаты диссертационной работы Фокина А.Б. используются на кафедре «Информационная безопасность» ОГУ им. И.С. Тургенева при выполнении практических занятий, лабораторных работах и курсовых проектов по дисциплинам «Теория телетрафика» и «Сети связи следующего поколения» бакалаврами дневного отделения направления подготовки 10.03.01 «Информационная безопасность», а также при выполнении выпускных квалификационных работ.

Председатель
д.т.н., профессор



Еременко В.Т.

Члены комиссии:

Зав. кафедрой ИБ
к.ю.н., доцент



Мишин Д.С.

к.т.н., доцент



Савва Ю.Б.

«24» 05 2023 года

Утверждаю

Генеральный директор ООО
«Ассоциация специалистов по
безопасности»,
к.т.н., доцент

Солодянников А.В.;

2023 года



Акт о внедрении результатов диссертационной работы

Фокина Александра Борисовича

На тему

«Оценка надежности телекоммуникационных сетей на основе инверсий их состояний»

Научно-техническая комиссия в составе: генеральный директор ООО «Ассоциация специалистов по безопасности» Солодянников А.В. начальник отдела ООО «Ассоциация специалистов по безопасности» Журавель Е.П., заместитель начальника испытательной лаборатории в Системе сертификации Минобороны России ООО «Ассоциация специалистов по безопасности» Сидоров Е.С. составила настоящий акт в том, что **результаты** диссертационной работы «Оценка надежности телекоммуникационных сетей на основе инверсий их состояний» представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук, **использованы** при проектировании систем связи для определения структурной надежности сети с применением разработанных методов расчетов вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационных сетей, поддерживающих механизмы обеспечения отказоустойчивости на основе многопеременных инверсий, с использованием предложенных процедур, формирующие множества простейших подграфов сетей с различной степенью связности.

Разработанные процедуры, формирующие множество простейших подграфов телекоммуникационных сетей с различной степенью связности действительно обеспечивают выигрыш по времени вычисления относительно

известных методов. Предложенные методы расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационных сетей на основе многопеременных инверсий, поддерживающие механизмы обеспечения отказоустойчивости, позволяют проводить анализ надежности различных архитектур, защищаемых участков и требуемого количества маршрутов.

Полученный эффект расчетов множеств простейших подграфов с применением разработанных процедур и расчетов вероятности связности (коэффициента готовности) телекоммуникационных сетей предложенными методами соответствует представленным в диссертации результатам исследования.

ООО «Ассоциация специалистов по безопасности» рекомендует продолжить исследования направленные на оптимизацию расчетов надежности телекоммуникационных сетей с использованием новых перспективных методов.

Генеральный директор ООО «Ассоциация специалистов по безопасности», к.т.н. , доцент, Солодянников А.В. _____;

начальник отдела ООО «Ассоциация специалистов по безопасности» Журавель Е.П., к.т.н. доцент _____;

заместитель начальника испытательной лаборатории в Системе сертификации Минобороны России ООО «Ассоциация специалистов по безопасности» Сидоров Е.С. _____.

«10» сентября 2023 года