

Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский технический университет связи и информатики»

На правах рукописи

Либеровский Никита Юрьевич

**Разработка слепого алгоритма разделения
радиосигналов в системах когнитивного радио**

Специальность 2.2.13 –

Радиотехника, в том числе системы и устройства телевидения

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук,
доцент Чиров Д. С.

Москва, 2022

Оглавление

Введение.....	4
1 Анализ методов разделения радиосигналов в системах когнитивного радио....	12
1.1 Формализация и постановка задачи исследования	12
1.2 Анализ слепых методов разделения сигналов	15
1.3 Выводы по разделу	47
2 Разработка слепого алгоритма разделения двух комплексных цифровых сигналов.....	49
2.1 Анализ статистических величин, используемых в алгоритме слепого разделения сигналов	49
2.2 Формулировка критерия разделения сигналов.....	55
2.3 Общее решение задачи декорреляции двух комплексных случайных сигналов.....	57
2.4 Решение задачи приведения смешанного кумулянта четвертого порядка двух комплексных случайных сигналов к нулю.....	60
2.5 Выводы по разделу	66
3 Оценка эффективности алгоритма разделения цифровых сигналов.....	67
3.1 Критерии эффективности разделения сигналов.....	67
3.2 Сравнение алгоритма разделения цифровых сигналов с существующими методами	69
3.3 Предложения по практической реализации разработанных алгоритмов	78
3.4 Выводы по разделу	79

Заключение	81
Список сокращений и условных обозначений.....	84
Список литературы	86
Приложение А. Программный код разработанного алгоритма слепого разделения двух комплексных сигналов на языке C++ 20.....	100
Приложение Б. Программный код разработанного алгоритма слепого разделения двух комплексных сигналов на языке C++ 20 с применением библиотеки OpenCL 2.1	103

Введение

Актуальность темы исследования.

Активное развитие инфокоммуникационных систем в последние десятилетия привело к возникновению дефицита радиочастотного ресурса и, как следствие, усложнению электромагнитной обстановки. В результате работа любого радиоприемного устройства (РПУ) осложняется наличием разнообразных мешающих сигналов и помех. Особенно актуальным данный вопрос стал в условиях развития систем когнитивного радио, когда один и тот же частотный ресурс может быть использован как лицензированным (ЛП), так и нелицензированным пользователем (НЛП). В этом случае возможна ситуация, когда на входе РПУ возникает смесь сигналов ЛП и НЛП, причем сигнал НЛП будет считаться помехой сигналу ЛП.

Теоретической основой организации оптимального приема сигнала на фоне помех является статистическая радиотехника, развитию которой посвящены фундаментальные труды Левина Б.Р., Стратановича Р.Л., Тихонова В.И., Д. Миддлтона и другие [18,25,34,36]. Однако для реализации большинства методов оптимального приема сигналов необходимо априорное знание о характеристиках принимаемого сигнала и помехи, что не всегда реализуемо на практике. Также, на смешивание полезного сигнала и помехи влияют параметры антенной системы, зависящие от многих факторов. Одним из перспективных способов решения таких задач являются методы слепого разделения сигналов (СРС), позволяющие оценить смешивающие коэффициенты и разделить полезный сигнал от помех, используя только входные смеси сигналов.

Методы слепого разделения сигналов (МСРС) активно применяются во многих областях. Наиболее естественное применение методы слепого разделения сигналов находят в задаче разделения акустических сигналов [110]. Довольно часто

возникает ситуация, когда приходится одновременно воспринимать несколько источников звука. Например, при студийной записи музыкальных произведений требуется повышенное разделение отдельных музыкальных инструментов для качественной студийной обработки. Также МСРС используются в задаче фильтрации помех при осуществлении телефонных разговоров или в процессе автоматического распознавания [60]. Помимо аудио селекции МСРС применяются в медицине. В частности при обследовании головного мозга слепые методы позволяют повысить точность электромагнитных исследований [43]. Связано это с тем, что сигналы, записанные на уровне скальпа представляют собой смеси различных источников [39, 89].

Обширной областью применения СРС являются системы ММО (Multiple input - multiple output) [47, 53, 104, 108, 118, 130, 131]. ММО является одной из ключевых технологий в реализации стандартов 5G и 6G, позволяющих существенно увеличить спектральную эффективность передачи данных. За счет большого количества передающих антенн базовая станция способна формировать несколько узконаправленных сигналов в сторону абонентов, а МСРС увеличивают помехоустойчивость приема сигналов от абонентов.

Степень разработанности темы исследования.

Первые исследования, посвященные теории СРС, появились в конце 80-х годов прошлого века. В конце 00-х годов публикационная активность по данной теме достигла максимума (444 публикации в 2010-м году), а в течение 10-х годов составляет примерно 250-300 статей в год. На рисунке 1 представлена диаграмма распределения публикации статей по теме СРС по годам. Ниже представлены основные работы по данной тематике. Основные наиболее цитируемые работы, посвященные базовым принципам СРС, опубликованы преимущественно в конце 90-х – начале 00-х гг.

Основным направлением развития МСРС систем связи является разработка статистических методов декорреляции и критериев независимости, основанных на оценке моментов или кумулянтов высших порядков входных сигналов. В самом простейшем случае используются значения кросскорреляционных статистик

между сигналами с различным временным сдвигом, а задача алгоритма разделения сигналов сводится к одновременной диагонализации корреляционных матриц [17,29,48,52,79]. Также за счет спектрального анализа ковариационной матрицы разработаны алгоритмы оценки количества независимых сигналов [119].

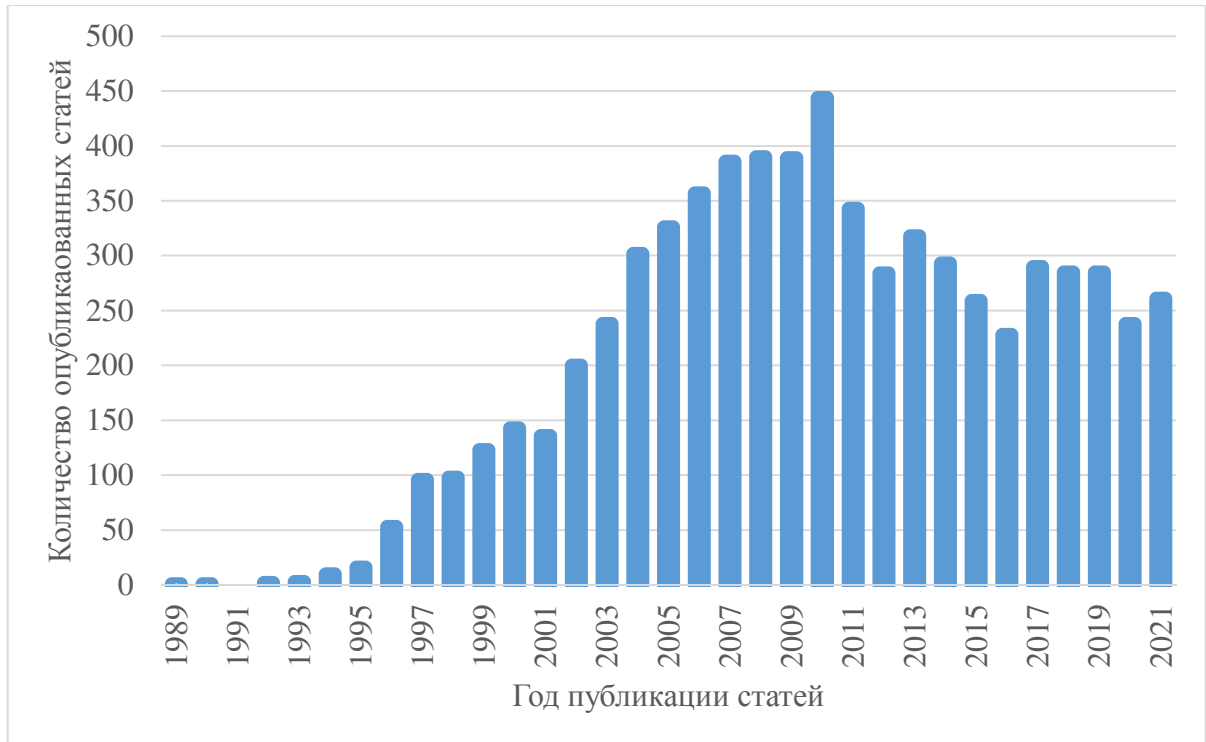


Рисунок 1 – График распределения публикации статей в издательстве IEEE по годам, связанные с темой SRC

Альтернативой статистическим методам одновременной декорреляции сдвиговых статистик второго порядка является группа методов независимого анализа компонент (Independent component analysis, ICA). ICA методы используют в качестве критериев независимости сигналов оптимизацию информационных величин, например минимизацию показателя взаимной информации или максимизация негэнтропии [54,56,85,112]. Решение таких задач в основном осуществляется посредством использования методов градиентного спуска [45,51]. Подбор оптимальных параметров шага спуска позволяет найти решения, близкие к оптимальным.

Анализ существующих алгоритмов SRC показывает, что в настоящее время отсутствуют алгоритмы, позволяющие получить аналитическое решение задачи разделения сигналов с использованием статистик входных сигналов за априори

известное количество арифметических операций. Наиболее близким к разработанному в диссертации алгоритму является метод разделения сдвиговых статистик второго порядка [29], так как в нем используется матрица ковариации. Однако при этом при одновременной диагонализации нескольких матриц второго порядка используется итерационный метод градиентного спуска. Наличие в алгоритме итерационных методов сопряжено с необходимостью подбора оптимальных параметров либо максимального числа проводимых итераций при неизвестной в итоге точности разделения или наоборот, установки определенной точности сходимости алгоритма при неизвестном числе итераций. Поэтому **задача разработки новых алгоритмов** разделения радиосигналов, обеспечивающих получение решения за конечное число операций является актуальной.

В настоящей работе предложен алгоритм разделения сигналов двух комплексных радиосигналов.

Цель исследования – повышение помехоустойчивости передачи цифровых сигналов в системах когнитивного радио посредством использования алгоритма слепого разделения сигналов, основанного на декорреляции и приведении к нулю смешанного кумулянта четвертого порядка за конечное число арифметических операций.

Задача исследования – разработка алгоритма слепого разделения комплексных сигналов за конечное количество вычислений с использованием кумулянтов высших порядков, а также сравнение разработанного алгоритма с существующими.

Для достижения поставленной цели и решения научной задачи в работе были проведены следующие исследования:

1. Выбор математической модели смешивания исходных сигналов. Постановка предположений о исходных сигналах. Анализ существующих методов слепого разделения сигналов.

2. Разработка слепого алгоритма разделения двух комплексных сигналов с использованием кумулянтов четвертого порядка.

3. Сравнение разработанного алгоритма с существующими методами слепого разделения сигналов.

Объектом исследования являются действительные и комплексные цифровые сигналы.

Предметом исследования являются алгоритмы слепого разделения сигналов.

Методология и методы исследования. При проведении исследования использовались методы цифровой обработки сигналов, теории электрической связи, теории случайных процессов, теории вероятностей, статистической радиотехники, методы вычислительного эксперимента.

Научная новизна исследования.

1. Разработан алгоритм слепого разделения двух комплексных сигналов, использующий в качестве критерия независимости сигналов кумулянты четвертого порядка, отличающийся от известных тем, что он выполняется за априори известное количество арифметических операций и приводит смешанный кумулянт четвертого порядка выходных сигналов к нулю за счет получения аналитического решения частного случая полиномиального уравнения четвертого порядка.

2. Получено общее решение декорреляции двух комплексных сигналов за конечное число арифметических операций, основанное на системе уравнений второго порядка, приводящее дисперсии выходных сигналов к единице, а коэффициент ковариации к нулю, что обеспечивает помехоустойчивость систем когнитивного радио за счет разделения полезного сигнала и помехи.

Достоверность результатов и выводов обеспечивается корректностью применения математических методов и соответствием результатов, полученных путем аналитических расчетов и численного моделирования.

Теоретическая и практическая значимость работы. Теоретическая значимость работы состоит в разработке нового алгоритма слепого разделения сигналов на основе новых математических выражений для решения задачи декорреляции сигналов и решения задачи сведения кумулянтов четвертого порядка к нулю аналитическим методом. Практическая значимость работы состоит в

повышении ОСП на выходе приемника при детектировании и дальнейшей обработке цифровых сигналов без дополнительной априорной информации. Результаты диссертационной работе реализованы в грантах РФФИ 19-37-90010 «Разработка программного комплекса селекции сигналов, основанный на методе слепого разделения радиосигналов» и 19-29-06006 «Разработка фундаментальных основ методов обнаружения и идентификации беспилотных летательных аппаратов с использованием радиолокационных средств с всенаправленными антеннами и шумоподобным радиоизлучением», СЧ ОКР «Кварта» по ТЗ Госзаказчика и в учебном процессе МТУСИ в дисциплине «Радиотехнические системы».

Апробация работы.

Результаты, изложенные в диссертации, были обсуждены на следующих конференциях:

1. Технологии информационного общества (Москва, 2017) [19].
2. Технологии информационного общества (Москва, 2018) [24].
3. Технологии информационного общества (Москва, 2020) [20].
4. Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (Казань, 2017) [57].
5. Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (Светлогорск, 2020) [95].
6. Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (Светлогорск, 2021) [101].
7. Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (Архангельск, 2022) [98].
8. Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications (Москва, 2019) [94].
9. Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications (Москва, 2021) [99].
10. Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (Санкт-Петербург, 2021) [102].

11. Telecommunications Forum (Белград, 2021) [100].

Публикации результатов.

По теме диссертации было опубликовано четырнадцать работ [19,20,21,22,23,24,57,94,95,98, 99,100,101,102]. Из них три опубликованы в журнале из списка ВАК [21, 22, 23] и восемь работ проиндексированы в SCOPUS [57,94,95,98,99,100,101,102].

Личный вклад автора.

Все выносимые на защиту научные результаты получены соискателем лично. Автор принимал непосредственное участие в планировании и проведении работы, обработке и обсуждении полученных результатов, подготовке публикаций.

Соответствие паспорту специальности.

Проведенное автором исследование входит в направление исследования «Разработка и исследование методов и алгоритмов обработки сигналов и информации в радиотехнических устройствах и системах различного назначения, включая системы телевидения и передачи информации, при наличии помех с целью повышения помехоустойчивости.» (п. 6 паспорта научной специальности).

Положения, выносимые на защиту.

1. Полученное аналитическое выражение приводит смешанный кумулянт четвертого порядка выходных сигналов к нулю за счет решения частного случая полиномиального уравнения четвертого порядка за конечное количество вычислений.

2. Алгоритм слепого разделения двух комплексных сигналов на основе новых математических выражений для решения задачи сведения смешанных кумулянтов четвертого порядка к нулю аналитическим методом обеспечивает относительный выигрыш в размере выборки отсчетов для расчета статистик не менее 3 раз по сравнению с алгоритмом FastICA при детектировании ЧМ-2 сигналов в диапазоне частоты битовых ошибок от 0,0001 до 0,01.

3. Алгоритм слепого разделения двух комплексных сигналов на основе новых математических выражений для решения задачи сведения смешанных кумулянтов четвертого порядка к нулю аналитическим методом обеспечивает

выигрыш ОСП не менее 12 дБ за конечное количество вычислений при детектировании ЧМ-2 сигналов в диапазоне частоты битовых ошибок от 0,0001 до 0,1.

Структура работы.

Диссертация состоит из введения, трех разделов, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы и двух приложений. Основная часть изложена на 69 страницах машинописного текста, содержит 13 рисунков и 1 таблицу; список литературы состоит из 131 наименований. Приложения изложены на 10 страницах машинописного текста.

1 Анализ методов разделения радиосигналов в системах когнитивного радио

1.1 Формализация и постановка задачи исследования

Методы слепого разделения сигналов (МСРС) могут быть использованы для пространственно-поляризационного различения сигналов ИРИ. Области применения МСРС в настоящее время являются: автоматическая фокусировка изображений радиолокаторов с синтезированной апертурой, дистанционное зондирование Земли, обработка спутниковых изображений [8]; мультимедийные приложения, распознавание текстов и изображений [63,91]; медицинские исследования на основе данных магнитной энцефалографии, магнитно-резонансной томографии или спектроскопии [77,96]; анализ смесей в химии и спектрографии [49]; исследование числовых рядов в финансовой математике [42,109], социологии, статистике.

МСРС оперируют моделью мгновенного смешивания сигналов (1), схожей с моделью сигнально-помеховой обстановки

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \hat{\mathbf{N}}(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \dots \\ \mathbf{x}_N(t) \end{pmatrix}$ – вектор наблюдений;

$\mathbf{S} = \mathbf{S}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1(t) \\ \dots \\ \mathbf{s}_M(t) \end{pmatrix}$ – вектор источников, подлежащий оценке;

\mathbf{A} – неизвестная смешивающая матрица размера $N \times M$;

$\hat{\mathbf{N}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{n}}_1(t) \\ \dots \\ \hat{\mathbf{n}}_N(t) \end{bmatrix}$ – аддитивный белый гауссовый шум.

В процессе работы МСРС не делают различий между полезным и помеховыми сигналами. Это означает, что МСРС параллельно могут оценивать сразу несколько сигналов.

МСРС решает задачу определения вектора источников \mathbf{S} используя только вектора наблюдений \mathbf{X} при ограничении на число сигналов $N \leq M$. В большинстве алгоритмов слепого разделения сигналов на сигналы $s_i(t)$ накладывают требование статистической независимости.

Решением задачи слепого разделения является размешивающая матрица \mathbf{W} , удовлетворяющая условию

$$\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (2)$$

Если размешивающая матрица \mathbf{W} найдена, то вектор источников определяют следующим образом

$$\mathbf{S} = \mathbf{W}\mathbf{X}. \quad (3)$$

Недостаток модели мгновенного смешивания связан с её неоднозначностью относительно перестановок и мощности сигналов $s_i(t)$. Введём перестановочно-масштабирующую матрицу \mathbf{P} , такую, что $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{I}$. Тогда уравнение (1) можно переписать в виде

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \hat{\mathbf{N}} = \mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{S} + \hat{\mathbf{N}} = \mathbf{A}'\mathbf{S}' + \hat{\mathbf{N}},$$

где $\mathbf{A}' = \mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$ – смешивающая матрица;

$\mathbf{S}' = \mathbf{P}\mathbf{S}$ – вектор источников.

Видно, что после перестановки сигналов и изменения их мощности модель не изменилась.

Методы слепого разделения сигналов не имеют собственных механизмов для разрешения данной неоднозначности, поскольку используют только свойство статистической независимости сигналов.

Искомая размешивающая матрица \mathbf{W} определяется посредством нахождения экстремума целевого критерия разделения, который может быть основан на различных принципах, таких как «мера негауссовости», некоррелированность,

количество взаимной информации, суммарная энтропия выделяемых сигналов, максимум функции правдоподобия [28,87] и другим критериям.

В общем случае МСРС включают в себя четыре шага [88], показанных на рисунке 2. Процедура центрирования данных важна для работоспособности МСРС, и состоит в обнулении постоянной составляющей вектора наблюдений [88].

Беление данных заключается в том, что вектор наблюдения $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \dots \\ \mathbf{x}_N(t) \end{pmatrix}$ линейно преобразуется в вектор наблюдений $\mathbf{X}' = \mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_1(t) \\ \dots \\ \mathbf{x}'_N(t) \end{pmatrix}$.

Компоненты вектора \mathbf{x}' обладают следующими свойствами: $\mathbf{x}'_i(t)$ не коррелированы между собой и имеют единичную дисперсию. На шаге беления данных оценивают число сигналов и выполняют процедуру редукции (уменьшения) размерности [88]. Для беления данных применяют метод анализа главных компонент [1].

Процедура контрастирования вектора \mathbf{x}' представляет собой поиск такого его линейного преобразования, при котором достигается экстремум *оценочной функции* [87, 88]. Контрастная функция отражает меру независимости получаемых компонент, поэтому методы МСРС являются комбинацией той или иной контрастной функции и метода её оптимизации [88]. Очень часто в методах слепого разделения сигналов на этапе контрастирования используют математический аппарат методов анализа независимых компонент (АНК).

В настоящее время разработано большое количество методов слепого различения сигналов [2,41,77,78,80,81,82,83,84,85,87,88]. В общем случае можно разделить три большие группы, работающие в условиях априорной неопределенности параметров сигналов, характеристик и геометрии антенной решетки (АР): методы декорреляции, методы максимизации негауссовости и энтропийные методы.

Следует отметить, что МСРС создавались путем итеративного совершенствования, поэтому каждый из описанных ниже методов слепого различения необходимо рассматривать как семейство методов.

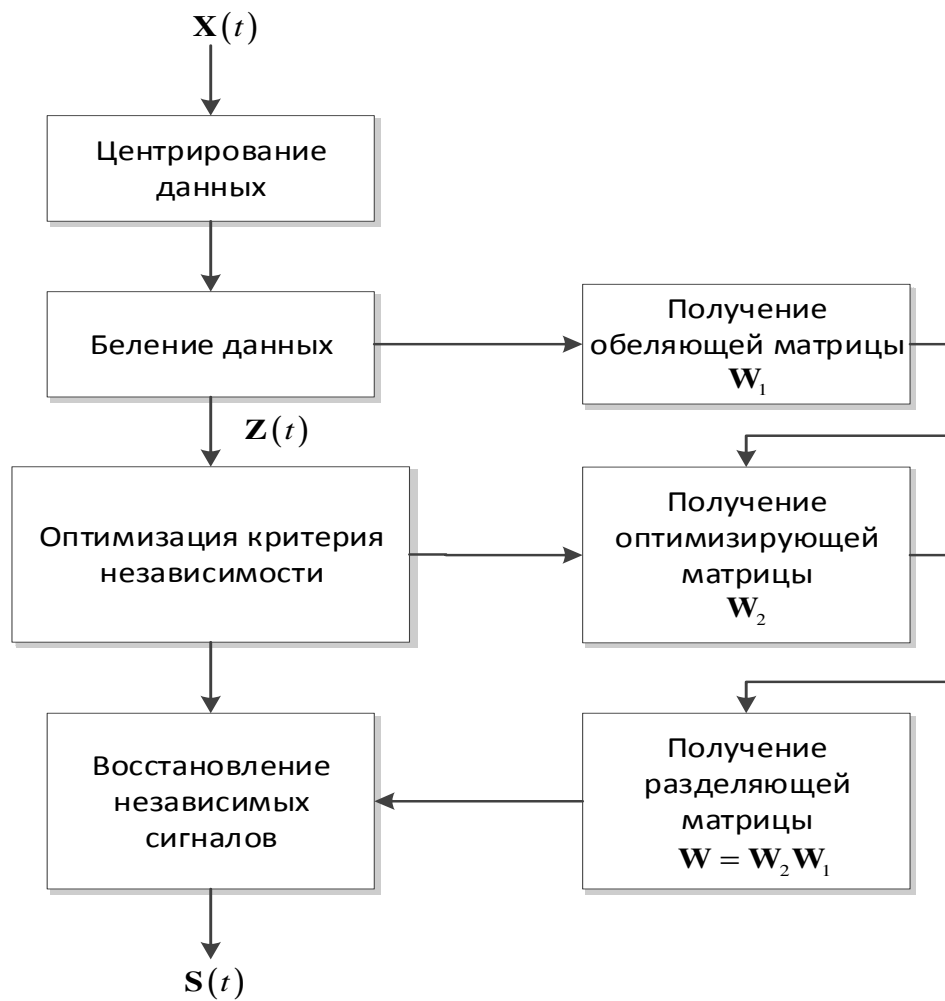


Рисунок 2 – Схема работы методов слепого разделения сигналов

1.2 Анализ слепых методов разделения сигналов

В условиях систем когнитивного радио возможна ситуация, когда либо частично, либо полностью у принимающей стороны нет априорной информации о принимаемых сигналах, которые надо обнаружить и параметры которых надо оценить [35]. При этом пространственно-поляризационные параметры этих сигналов могут быть непостоянными и меняться с течением времени. Такие изменения могут быть следствием как движения источника радиосигналов, так и изменением среды их распространения.

Таким образом использование различных алгоритмов синтеза амплитудно-фазовых коэффициентов в условиях априорной неопределенности параметров сигналов [13] может приводить к систематическим ошибкам.

Для решения задачи эффективного обнаружения полезного сигнала могут быть выбраны адаптивные методы управления АР. При адаптации, направленные свойства АР подстраиваются под текущую сигнально-помеховую обстановку [10,26].

На рисунке 3 представлена общая структурная схема работы адаптивной антенной решетки. Управление поляризационной диаграммой или диаграммой направленности антенной решетки осуществляется подстройкой весовых коэффициентов (ВК) [10], устройством управления ВК. Подстройка ВК может выполняться как в стационарной, так и в изменяющейся сигнально-помеховой обстановке.

Сигнальный процессор на основе входных сигналов АР и заданной априорной информации осуществляет расчет ВК.

Базовый принцип адаптивных методов настройки и управления антенных решеток состоит в нахождении таких весовых коэффициентов [5,6,7,10,12,26,32,75], который бы максимизировал мощность полезного сигнала относительно мощностей помех и шумов. При расчете весового вектора в общем случае используется априорная информация о полезном сигнале, помехах, характеристиках и геометрии АР.

1.2.1 Методы статистического определения коэффициентов размешивающей матрицы

Задача методов адаптивного приема сигналов состоит в нахождении оптимальных весовых коэффициентов, при котором достигается максимально эффективный прием полезного сигнала [37]. Процесс поиска ВК может быть

осуществлен при использовании различных критериев качества [5,6,7,10,12,26,32,37,75], основанных на статистике входных сигналов АР. Рассмотрим особенности применяемых критериев.

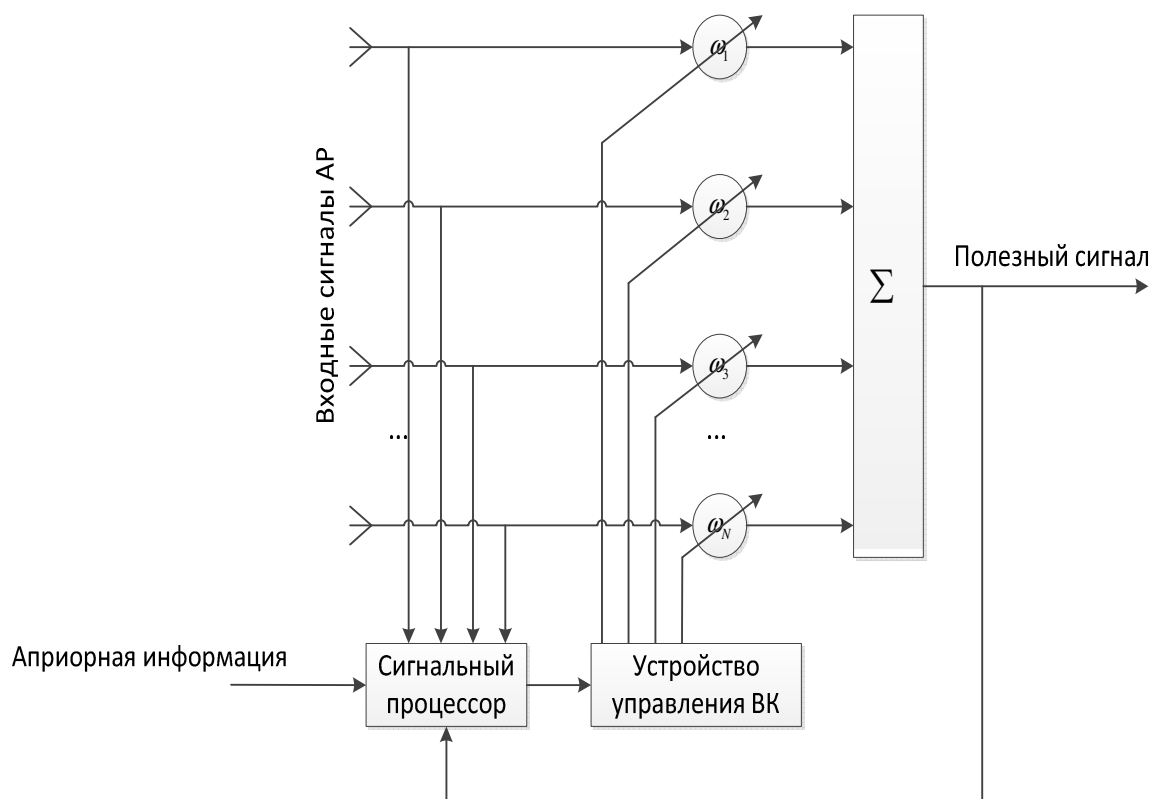


Рисунок 3 – Структурно-функциональная схема адаптивной антенной решетки

Критерий среднеквадратического отклонения состоит в подборе таких ВК, которые бы на выходе давали сигнал, как можно меньше отличающийся от заранее известного опорного сигнала. Оптимальный весовой вектор по данному критерию определяется как решение Винера-Хопфа [26]

$$\mathbf{w}_{opt}^{CKO} = s \mathbf{R}_{YY}^{-1} \mathbf{r}_{YD}^* , \quad (4)$$

где s – мощность полезного сигнала;

\mathbf{R}_{YY} – корреляционная матрица входных сигналов АР;

\mathbf{r}_{YD} – вектор корреляции опорного и входных сигналов АР;

$(\bullet)^{-1}$ – операция обращения матрицы;

$(\bullet)^*$ – операция комплексного сопряжения.

При этом основным требованием к опорному сигналу является высокий уровень корреляции с полезным сигналом и низкий уровень корреляции с помехами, что не означает тождественного равенства опорного и полезного сигналов [3].

К преимуществам критерия среднеквадратичного отклонения можно отнести отсутствие необходимости знания о параметрах распространения информационного сигнала и параметрах антенной системы. Однако в системах когнитивного радио характеристики полезного сигнала в общем случае неизвестны для приемной стороны и могут значительно отличаться [31]. Поэтому надо его считать неизвестным в некотором смысле [26]. Например, если полезный сигнал имеет амплитудную модуляцию, то в качестве опорного сигнала можно использовать его несущее колебание. Другой недостаток данного метода заключается в том, что формирование точного опорного сигнала базируется на недостаточных данных в приемнике [3].

В критерии отношения сигнал/шум [58] вычисление корреляционной матрицы шумов выполняется невырожденное преобразование системы координат таким образом, чтобы шумовые составляющие на выходах всех каналов были некоррелированными и имели одинаковую мощность. Оптимальный весовой вектор по данному критерию определяется как

$$\mathbf{w}_{opt}^{ОСШ} = \alpha \mathbf{R}_{NN}^{-1} \mathbf{v}^*, \quad (5)$$

где α – константа;

\mathbf{R}_{NN}^{-1} – корреляционная матрица шумов и помех.

Критерий максимума правдоподобия [59] использует предположение, что составляющие шума имеют многомерное нормальное распределение. В этом случае оптимальный вектор определяется как

$$\mathbf{w}_{opt}^{МП} = \frac{\mathbf{R}_{NN}^{-1} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^H \mathbf{R}_{NN}^{-1} \mathbf{v}}, \quad (6)$$

где $(\bullet)^H$ – операция комплексного сопряжения и транспонирования.

Критерий минимума мощности [26] используется в ситуациях, когда мощность полезного сигнала намного меньше мощности шума. Тогда можно зафиксировать один весовой коэффициент, сделав равным его, например, единице, а другие подобрать так, чтобы минимизировать общую мощность выходного сигнала. В этом случае оптимальный вектор определяется как

$$\mathbf{w}_{opt}^{МДШ} = \frac{\mathbf{R}_{NN}^{-1} \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \mathbf{R}_{NN}^{-1} \mathbf{1}}, \quad (7)$$

где $\mathbf{1}$ – вектор, все элементы которого равны единице;

$(\bullet)^T$ – операция транспонирования.

Алгоритм минимальной вариации с линейным ограничением является улучшением критерия минимизации среднеквадратичного отклонения [3]. Весовые коэффициенты, полученные согласно данному критерию, обеспечивают минимизацию выходной мощности/дисперсии с учетом ограничений, задаваемых управляющим вектором. Оптимальный весовой вектор определяется как [3]

$$\mathbf{w}_{opt}^{МВЛО} = g^* \frac{\mathbf{R}_{YY}^{-1} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^H \mathbf{R}_{YY}^{-1} \mathbf{v}}, \quad (8)$$

где g – вектор ограниченного отклика.

Преимущества использования данного критерия, применительно к системам когнитивного радио, заключаются в том, что его использование не требует знаний корреляционной матрицы полезного сигнала, корреляционной матрицы шумов и помех или опорного сигнала.

Частным случаем критерия минимальной вариации с линейным ограничением является критерий отклика без искажений с минимальной дисперсией (ОБИМД), также известный как метод наименьшей вариации Кейпона [105]

$$\mathbf{w}_{opt}^{ОБИМД} = \frac{\mathbf{R}_{YY}^{-1} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^H \mathbf{R}_{YY}^{-1} \mathbf{v}}. \quad (9)$$

Метод наименьшей вариации Кейпона [105] активно используется при синтезе методов пространственно-поляризационного разделения (ППР), что объясняется его применимостью для AP произвольной геометрии. Однако к его

недостаткам можно отнести чувствительность работы алгоритма от погрешности выбранного направления, а также сложность операции обращения ковариационной матрицы \mathbf{R}_{YY} .

Для вычисления весовых векторов по формулам (4)-(9), по совокупности критериев, необходимы статистики второго порядка как полезного сигнала, так и помех с шумом, знания пространственно-поляризационных и временных параметров полезного сигнала и помех. Статистические данные в общем случае неизвестны, но с учетом наличия эргодичности, они могут быть получены на основе имеющихся данных [3].

В системах когнитивного радио существует априорная неопределенность относительно пространственно-поляризационных параметров полезного сигнала и его форме. Поэтому применение классических методов адаптивного управления АР [5,6,7,10,12,26,32,37,75] (методы по критерию наименьших средних квадратов, рекурсивные по критерию наименьших квадратов, обращения матрицы отсчетов, метод сопряженных градиентов, метод аффинных проекций, квазиньютоновский алгоритм) осложнено в связи с используемыми ими предположениями.

В настоящее время существует много исследований методов адаптивного управления антенной решеткой [32]. Систематическое изложение наиболее известных решений можно найти в работах отечественных ученых В.И. Джигана [10] и М.В. Ратынского [12], западных ученых Л.Ч. Годара [75], Т.У. Миллера, Р.А. Монзинго [26], С. Стирнза, Б. Уидроу [37].

В отличие от классических алгоритмов адаптивного управления антенной решетки существуют методы разделения сигналов, работающие в условиях априорной неопределенности информации о принимаемых сигналах. Данные методы можно условно разделить на две группы. Первую группу образуют методы, для работы которых необходимо предварительное обучение. Вторая группа представлена «слепыми» методами (т.е. предварительное обучение не требуется).

1.2.2 Методы разделения сигналов с предварительным расчетом пространственно-поляризационных параметров

Данная группа методов состоит из двух основных этапов [3,4,11,14,16,32,38,72,74].

На первом этапе определяются пространственно-поляризационные параметры сигналов [14,27,58,59,72,73,92,93,103,111,113,115,116,123,124,125,126].

Сравнительная характеристика известных методов определения ППП представлена в таблице 1.

Наиболее популярными методами являются: [3,4,11,38,114,115]:

- методы наименьшей вариации Кейпона [3,32];
- методы множественной классификации сигналов [3,14,111,116,125].

Классический метод наименьшей вариации Кейпона построен на решении оптимизационной задачи (9). Определение пространственно-поляризационных параметров (ППП) сигнала осуществляется по пикам спектра при сканировании по параметру α [3]

$$P_{\text{Кейпона}}(\alpha) = \frac{1}{a^H(\alpha) \mathbf{R}_{\text{YY}}^{-1} a(\alpha)}, \quad (10)$$

где $a(\alpha)$ – отклик антенной решетки на сигнал с ППП, характеризуемому вектором α .

Так как переходные сигналы вдали от направлений на источники постоянной мощности появляются случайным образом, то они могут быть не обнаружены данным методом из-за отсутствия временных провалов чувствительности [3].

К множеству подпространственных методов относятся метод множественной классификации сигналов, а также его модификации [3,32,72,113]. Метод основан на том, что отклики AP на сигналы ортогональны по отношению к подпространству

шума. Подпространства сигналов и шума определяют с помощью спектрального разложения ковариационной матрицы (КМ) входных сигналов AP. Подпространство шума определено собственными векторами КМ,

Таблица 1 – Сравнительная характеристика методов определения ППП

Название метода	Тип используемой AP	Максимальное число ИРИ, работающих в перекрывающихся областях частот (L - число элементов AP)	Априорная информация о сигналах ИРИ
1	2	3	4
MUSIC	Любая	$L-1$	не требуется
Root-MUSIC	Линейная		не требуется
Cyclic-MUSIC	Любая	$L-1$ сигналов с одинаковой циклической частотой	циклическая частота сигналов ИРИ
Smooth-MUSIC	Линейная	$\frac{L}{2}$	не требуется
ESPRIT	Любая		не требуется
LS-ESPRIT	с возможностью разделения на две одинаковых неперекрывающихся	$\frac{L}{2}$	
TLS-ESPRIT			
Метод аналитической пеленгации [27]	круговая	1	не требуется

Название метода	Тип используемой AP	Максимальное число ИРИ, работающих в перекрывающихся областях частот (L - число элементов AP)	Априорная информация о сигналах ИРИ
1	2	3	4
Методы наименьшей вариации Кейпона	любая	не ограничено	не требуется

соответствующим наименьшим собственным значениям спектрального разложения, равных (в идеальном случае) мощности шума. Определение параметров сигналов связано с поиском пиков при сканировании по параметру α

$$P_{MUSIC}(\alpha) = \frac{a^H(\alpha)a(\alpha)}{a^H(\alpha)\mathbf{E}_n\mathbf{E}_n^H a(\alpha)}, \quad (11)$$

где $a(\alpha)$ – отклик антенной решетки на сигнал с ППП, характеризуемыми вектором α ;

\mathbf{E}_n – матрица подпространства шума.

К достоинствам данного метода можно отнести его применимость к антенным решеткам произвольной геометрии. Также этот метод может оценивать несколько параметров сигналов, таких как направление прихода сигналов, его поляризационные параметры и т.п. Однако для эффективной работы алгоритма необходимо наличие априорных знаний о вероятностных характеристиках шума [3].

Использование вышеприведенных методов основывается на отклике антенной решетки, зависящей от пространственных и поляризационных параметров сигналов. В частности, для трехмерной AP с пространственным разнесением антенных элементов, управляющий вектор для радиосигнала с

пространственными параметрами θ , характеризуемыми двумя углами (азимут θ и углом места ψ), в общем случае имеет следующий вид [11,30,114]

$$\mathbf{a}(\theta) = \begin{bmatrix} G_1(\theta) e^{-jk(\theta)r_1} \\ \dots \\ G_N(\theta) e^{-jk(\theta)r_N} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где $\mathbf{k}(\theta)$ – векторное волновое число радиоволны с пространственными параметрами θ в декартовой системе координат;

$\mathbf{r}_i = [x_i, y_i, z_i]$ – пространственный радиус-вектор i -го элемента АР;

$G_i(\theta)$ – коэффициент усиления i -го элемента АР в направлении θ .

Из формулы (12) видно, что любое неучтенное изменение таких параметров как расположение антенных элементов АР, направленные свойства антенных элементов АР, волновое число радиоволны в системах когнитивного радио будет приводить к неустранимым ошибкам в определении пространственных параметров полезных сигналов и помех, что, в свою очередь, будет снижать значения результирующего ОСПШ, обеспечиваемого методами данной группы.

В частности, к факторам, приводящим к неконтролируемому изменению пространственно-поляризационных параметров сигналов, можно отнести отражение сигналов от подстилающей поверхности. Известно, что свойства подстилающей поверхности (диэлектрическая проницаемость, электропроводность) оказывают заметное влияние на форму диаграммы направленности (ДН) антенных систем [31,33], что связано с интерференцией пришедшей радиоволны и ее отражения от подстилающей поверхности. Свойства подстилающей поверхности влияют также на фазовую скорость поверхностной радиоволны [31,33]. Существуют специальные карты поправок фазовой скорости радиоволн в зависимости от параметров подстилающей поверхности, однако, поскольку эти параметры меняются в зависимости от времени года и суток и даже погоды, полностью исключить ошибки при расчете управляющего вектора, вызванные изменением волнового числа радиоволн, практически невозможно [15,31,33]. Также значения управляющего вектора могут изменяться в зависимости

от взаимного расположения антенных элементов антенной решетки [3]. Наличие рядом с АР неучтенных рассеивающих тел будет приводить к изменению ДН антенных элементов. Таким образом, методы с использованием вектора отклика антенной решетки имеют существенный недостаток – они не учитывают возможное изменение параметров АР и свойств подстилающей поверхности.

На втором этапе методов разделения сигналов с предварительным расчетом пространственно-поляризационных параметров выполняется расчет и обновление весовых коэффициентов [3,44,68,74,92,105,114,116,117,120,127]. Для расчета ВК часто используют критерий ОБИМД (9) [3]. Использование ОБИМД определяет высокую чувствительность данных методов ППС к ошибкам калибровки [3,72].

Также для того, чтобы снизить погрешность пространственных параметров сигналов используются альтернативные методы формирования ВК, среди которых можно выделить методы управления «нулями» диаграммы направленности Годара [75], Мэйлу-Затмана [106,120,129], Таффернера [120], Гершмана [74], Роба [114], метода линейной системы [38], метода нелинейной системы [38] и метода Щелкунова [38]. Методы Годара, Мэйлу-Затмана, Таффернера, Гершмана, Роба, линейной системы, нелинейной системы, Щелкунова применимы для линейных эквидистантных АР (ЛЭАР). Метод Годара не чувствителен к уровню белого гауссового шума (БГШ), и обеспечивает субоптимальную оценку весового вектора $\mathbf{w}_{opt}^{ОСШ}$ [75]. При высоком уровне БГШ, получаемый весовой вектор, близок к оптимальному вектору по критерию ОБИМД [75]. К недостаткам использования альтернативных методов формирования ВК можно отнести необходимость оценки пространственных параметров помех.

1.2.3 Алгоритм постоянного модуля

Принцип работы алгоритма постоянного модуля (Constant Modulus Algorithm, CMA) [10,105] основан на минимизации разницы модуля оценки

полезного сигнала $\mathbf{s}(t)$ и известным значением модуля информационных символов s , возведенных в степень q

$$F_{pq} = \mathbf{E} \left[\left| s^p - |\mathbf{s}(t)|^p \right|^q \right], \quad (13)$$

где $\mathbf{E}[\bullet]$ – операция усреднения.

В основном используются значения $p=q=2$, так как в этом случае можно применять классические методы оптимизации квадратичных функций и другие методы адаптивной фильтрации (например, методы по критерию наименьших квадратов) [10].

Оптимизационный критерий F_{pq} может рассматриваться как альтернативный способ оценки ОСПШ полезного сигнала. В частности, минимизация этой функции при $p=q=2$ эквивалентна минимизации эксцесса κ_s выходного сигнала

$$\kappa_s \triangleq \frac{\langle |\mathbf{s}(n)|^4 \rangle}{\langle |\mathbf{s}(n)|^2 \rangle^2}. \quad (14)$$

FM сигнал в (14), имеет эксцесс, равный единице. В то же время у комплексного Гауссового шума он равен двум. ОСПШ сигнала на выходе алгоритма можно рассчитать с помощью эксцесса следующим образом

$$SINR = \frac{2 - \kappa_s + \sqrt{2 - \kappa_s}}{\kappa_s - 1}. \quad (15)$$

Из формулы (15) следует, что при $\kappa_s \rightarrow 1$, $SINR \rightarrow \infty$, а при $\kappa_s \rightarrow 2$, $SINR \rightarrow 0$. Таким образом, если фоновый шум является Гауссовым, СМА-метод способен выделить любой сигнал с эксцессом меньше двух.

Преимуществами методов постоянства модуля являются отсутствие необходимости предварительной оценки несущей частоты полезного сигнала и возможность применения к сигналам с непостоянной амплитудой, при условии, что их эксцесс не превышает двух. Также данные методы нечувствительны к ошибкам символьной синхронизации, неизбежно возникающим при приеме радиосигналов с цифровыми видами модуляции. Например, наличие ошибок символьной

синхронизации при приеме PSK-сигнала будет приводить к тому, что принимаемый сигнал не будет иметь постоянную огибающую, а его эксцесс будет больше одного. Однако κ_s все еще будет меньше двух, поэтому СМА можно применять при таких условиях.

Основным способом оптимизации выражения (13) в СМА-алгоритмах в основном применяется метод стохастического градиентного спуска (Stochastic Gradient Descent, SGD). На каждой итерации весовой вектор \mathbf{w} вычисляется следующим образом

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - \mu \hat{\nabla}_{\mathbf{w}} F_{pq}, \quad (16)$$

где μ – положительный размер шага спуска и $\hat{\nabla}_{\mathbf{w}}$ – градиент функции по вектору \mathbf{w} . Если используется СМА алгоритм с параметрами $p=q=2$, то выражение (16) будет иметь следующий вид

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - \mu \left(|\mathbf{s}(k)|^2 - 1 \right) \mathbf{Y}(k) \mathbf{s}^*(k), \quad (17)$$

где $\mathbf{s}(k) = \mathbf{w}^H(k) \mathbf{Y}$ – выходной (оцениваемый) сигнал на k -ой итерации. Если же используется СМА алгоритм с параметрами $p=1, q=2$, то весовой вектор вычисляется следующим образом

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - \mu \mathbf{Y}(k) \left(\mathbf{s}(k) - \frac{\mathbf{s}(k)}{|\mathbf{s}(k)|} \right)^*. \quad (18)$$

Несмотря на простоту работы градиентных методов, к основным их недостаткам можно отнести низкую скорость сходимости алгоритма. Поэтому в СМА-алгоритмах нередко применяют другие техники оптимизации. Например, в основе ортогонального алгоритма слепого выравнивания для сигналов с постоянной амплитудой (Orthogonalized СМА, О-СМА) лежит принцип минимизации функции ошибок с параметрами $p=1, q=2$, при котором расчет весового вектора производится согласно следующей формуле

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \mu \mathbf{R}^{-1}(k+1) \mathbf{Y}(k) \mathcal{E}^*(k), \quad (19)$$

где

$$\varepsilon^*(k) = \mathbf{s}(k) / |\mathbf{s}(k)| - \mathbf{s}(k), \quad (20)$$

и

$$\mathbf{R}^{-1}(k+1) = \frac{\mathbf{R}^{-1}(k)}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{\alpha \mathbf{R}^{-1}(k) \mathbf{Y}(n) \mathbf{Y}^H(n) \mathbf{R}^{-1}(k)}{(1-\alpha) + \alpha \mathbf{Y}^H(n) \mathbf{R}^{-1}(k) \mathbf{Y}(n)} \right]. \quad (21)$$

По сравнению с SGD-алгоритмами О-СМА сходится быстрее. Другим алгоритмом, имеющим высокую скорость сходимости, является алгоритм слепого выравнивания сигналов с постоянной амплитудой методом наименьших квадратов (Least Squares CMA, LSCMA). LSCMA обладает очень высокой скоростью сходимости и также устойчивостью. Алгоритм LSCMA обрабатывает входной сигнал блоками. Количество отсчетов в блоке является параметром алгоритма. На основе выбранного блока вычисляется нормированный сигнал $\mathbf{d}(n)$:

$$\mathbf{d}(n) = \frac{\mathbf{s}(n)}{|\mathbf{s}(n)|}. \quad (22)$$

Операцию нормировки (22) можно рассматривать как проекцию входного сигнала на набор сигналов, обладающих свойством постоянства амплитуды. Уточненный весовой вектор находится путем минимизации средней квадратичной ошибки между $\mathbf{d}(n)$ и новой оценкой полезного сигнала

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xd}, \quad (23)$$

где

$$\mathbf{r}_{xd} = \langle \mathbf{Y}(n) \mathbf{d}^*(n) \rangle. \quad (24)$$

Основным параметром, влияющим на скорость сходимости LSCMA, является размер анализируемого блока. Чем меньше размер блока, тем выше скорость сходимости алгоритма, а также ошибка оценки полезного сигнала. Размер блока обычно выбирают в интервале 30-1000 отсчетов. К недостаткам СМА-методов можно отнести то, что они оказываются неприменимы в случае наличия в полосе приема помеховых сигналов, удовлетворяющих требованию постоянства модуля комплексной огибающей. Существуют модификации, основанные на

использовании линейных ограничений [5,6,7,10], позволяющие преодолеть данный недостаток. Недостаток применения линейных ограничений состоит в том, что необходима априорная информация о геометрии и характеристиках приемной АР.

1.2.4 Методы слепого разделения сигналов, ограниченные по времени или частоте

Большинство реальных радиотехнических сигналов либо ограничены по времени, либо они занимают ограниченный частотный интервал. Например, короткий телефонный звонок ограничен по времени, любой узкополосный сигнал ограничен в частоте. Данные свойства радиосигналов лежат в основе семейства методов на основе временной/частотной ограниченности сигнала.

Ниже описан базовый принцип работы данных методов [40,44,105,127]. В отсутствие полезного сигнала алгоритм оценивает ковариационную матрицу шума и помех \mathbf{R}_{off} . При наличии полезного сигнала производится оценка ковариационной матрицы полезного сигнала, помех и шумов \mathbf{R}_{on} . Алгоритм осуществляет поиск такого весового вектора \mathbf{w} , который бы максимизировал величину

$$F = \frac{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{on} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{off} \mathbf{w}}. \quad (25)$$

Решение задачи максимизации выражения (25) приводит к максимизации ОСПШ полезного сигнала, так как

$$\mathbf{R}_{on} = \sigma_s^2 \mathbf{a} \mathbf{a}^H + \mathbf{R}_{ii}, \quad (26)$$

$$\mathbf{R}_{off} = \mathbf{R}_{ii}, \quad (27)$$

и соответственно

$$F = SINR + 1. \quad (28)$$

Задача максимизации выражения (25) может быть сведена с обобщенной задаче на собственные значения:

$$\mathbf{R}_{on} \mathbf{w} = \lambda \mathbf{R}_{off} \mathbf{w}, \quad (29)$$

где оптимальный вектор равен собственному вектору, соответствующему максимальному собственному значению. Данный алгоритм может быть использован для решения задачи обнаружения нового неизвестного сигнала. Для этого на каждом очередном цикле работы алгоритма производится оценка ковариационных матриц \mathbf{R}_{on} и \mathbf{R}_{off} для текущего и предыдущего блока входных данных соответственно. Если новый сигнал не появляется, то максимальное собственное значение будет примерно равно единице. Если же появляется новый сигнал, то тогда максимальное собственное значение будет примерно равно выходному ОСПШ для нового сигнала.

1.2.5 Методы слепого разделения сигналов с использованием критерия декорреляции

Данные методы основаны на предположении, что исходные сигналы не коррелированы между собой при различных временных сдвигах. Методы оперируют со статистиками второго порядка (матрицы ковариации, сдвиговые статистики и т.д.), которые в предположении некоррелированности выделяемых сигналов связаны с канальной матрицей соотношением [121]

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A} \Phi_s \mathbf{A}^H,$$

где \mathbf{A} – неизвестная смешивающая матрица;

Φ_s – диагональная матрица, связанная с параметрами оцениваемых сигналов.

Возможна ситуация, при которой количество исходных независимых сигналов меньше количества наблюдаемых смесей. В таком случае число источников может быть оценено посредством анализа собственных значений

матрицы ковариации Λ . С целью упрощения математических выкладок в методах слепого разделения пренебрегают наличием шумов. Если этого не сделать, то размерность вектора источников (куда включаются и шумовые вектора) всегда превосходит размерность вектора наблюдений, и задача определения разделяющей матрицы W даже формально не может иметь единственного решения.

Основными представителями методов слепого разделения сигналов с использованием критериев декорреляции являются метод извлечения множества неизвестных сигналов на основе обобщенной задачи на собственные значения (ИМНСОСЗ) [121,122] и анализ независимых компонент на основе статистик второго порядка (АНКСВП).

Метод ИМНСОСЗ состоит из следующих этапов:

1. Центрирование входных данных.
2. Вычисление ковариационной матрицы Φ_Y .
3. Вычисление сдвиговой статистики при заданном параметре τ

$$Q_Y^\tau = E[Y(t)Y(t-\tau)^H]. \quad (30)$$

4. Нахождение размешивающей матрицы W из уравнения

$$\Phi_Y W = Q_Y^\tau W \Lambda, \quad (31)$$

где Λ – диагональная матрица.

5. Нахождение сигналов.

Уравнение (31) представляет собой обобщенную задачу на собственные значения, для решения которой разработано множество стандартных математических алгоритмов [2,87]. К достоинствам алгоритма ИМНСОСЗ можно отнести низкую вычислительную сложность [121]. Параметр сдвига τ обычно полагают равным периоду дискретизации входных сигналов [121].

Метод АНКСВП является обобщением метода ИМНСОСЗ. Вместо диагонализации двух матриц, АНКСВП решает задачу одновременной диагонализации нескольких матриц второго порядка [2,28]. Метод оперирует с набором из K сдвиговых статистик вида (30), полученных при разных значениях параметров τ_i . Метод АНКСВП состоит из следующих этапов:

1. Центрирование входных данных.
2. Вычисление ковариационной матрицы Φ_Y .
3. Оценка обеляющей матрицы w_1^H , определение числа сигналов и переход в базис главных компонент Z .
4. Расчет набора сдвиговых статистик $\{Q_Z^{\tau_i}\}_{i=1}^K$ для заданных параметров $\tau_i \neq 0$.
5. Приведение элементов набора сдвиговых статистик к эрмитову виду

$$\tilde{Q}_Z^{\tau_i} = \frac{Q_Z^{\tau_i} + (Q_Z^{\tau_i})^H}{2}.$$

6. Поиск унитарной матрицы w_2^H , приводящей набор сдвиговых статистик $\{\tilde{Q}_Z^{\tau_i}\}_{i=1}^K$ к диагональному виду

$$\tilde{Q}_Z^{\tau_i} = W_2^H \tilde{Q}_S^{\tau_i} W_2.$$

7. Определение размешивающей матрицы w^H

$$w^H = W_2^H W_1^H.$$

8. Нахождение сигналов.

Преимуществом АНКСВП можно отнести возможность работы в условиях цветного шума [28]. Однако данный метод имеет низкую эффективность разделения сигналов с похожими спектральными характеристиками [28] и чувствительность к ошибке определения числа сигналов. При использовании АНКСВП на точность восстановления размешивающей матрицы значительное влияние оказывает выбор параметров K и τ_i [28,121]. Методики выбора числа статистик и параметров сдвигов отсутствуют, их разрабатывают индивидуально для каждой решаемой задачи.

В пункте 6 метода АНКСВП размешивающая матрица w_2^H рассчитывается посредством приведения набора матриц $\{\tilde{Q}_Z^{\tau_i}\}_{i=1}^K$ к диагональному виду. Существует множество алгоритмов одновременного приведения набора матриц к

диагональному виду. Ниже приведены возможные к использованию в данной задаче алгоритмы совместной диагонализации матриц.

1.2.5.1 Комплексная совместная диагонализация

Данный алгоритм комплексной совместной диагонализации (Complex Joint Diagonalization, CJD) [107] использует следующие две матрицы элементарного поворота: $\mathbf{S}_{ij}(\phi, y)$ и $\mathbf{G}_{ij}(\alpha, \theta)$. Это комплексные матрицы размерностью $N \times N$, которые равны соответствующей единичной матрице, кроме элементов $[i, i]$, $[i, j]$, $[j, i]$, $[j, j]$. Эти элементы равны:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S}_{ij}(\phi, y)[i, i] = \cosh(y) & \mathbf{S}_{ij}(\phi, y)[i, j] = e^{J\phi} \sinh(y) \\ \mathbf{S}_{ij}(\phi, y)[j, i] = e^{-J\phi} \sinh(y) & \mathbf{S}_{ij}(\phi, y)[j, j] = \cosh(y) \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_{ij}(\alpha, \theta)[i, i] = \cos(\theta) & \mathbf{G}_{ij}(\alpha, \theta)[i, j] = e^{J\alpha} \sin(\theta) \\ \mathbf{G}_{ij}(\alpha, \theta)[j, i] = -e^{-J\alpha} \sin(\theta) & \mathbf{G}_{ij}(\alpha, \theta)[j, j] = \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

где J – мнимая единица.

Размещивающую матрицу \mathbf{W} вычисляется в виде следующего произведения:

$$\mathbf{W} = \prod_s \mathbf{H}_{2, i_{\max}^s, j_{\max}^s}(\theta_2^s, y_2^s) \mathbf{H}_{1, i_{\max}^s, j_{\max}^s}(\theta_1^s, y_1^s), \quad (33)$$

где s – номер итерации, i_{\max}^s, j_{\max}^s – индексы элементов входных матриц, наиболее сильно влияющих на недиагональность матриц $\tilde{\mathbf{M}}^k$, $\mathbf{H}_{1, i_{\max}^s, j_{\max}^s}(\theta_1^s, y_1^s), \mathbf{H}_{2, i_{\max}^s, j_{\max}^s}(\theta_2^s, y_2^s)$ – матрицы элементарного поворота, определение которых будет дано позднее.

Алгоритм CJD можно разбить на несколько шагов. На первом шаге \mathbf{W} делаем равной единичной матрице, каждую матрицу \mathbf{M}_k представляем в эрмитовом виде:

$$\tilde{\mathbf{M}}^k = \frac{1}{2}(\mathbf{M}^k + (\mathbf{M}^k)^H) . \quad (34)$$

На каждой итерации вначале необходимо найти такую пару чисел i_{\max}, j_{\max} , $1 \leq i_{\max} \neq j_{\max} \leq N$, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\max_{1 \leq i \neq j \leq N} \sum_{k=1}^K |\tilde{\mathbf{M}}^k[i, j]|^2 = \sum_{k=1}^K |\tilde{\mathbf{M}}^k[i_{\max}, j_{\max}]|^2 . \quad (35)$$

Далее необходимо преобразовать набор матриц $\tilde{\mathbf{M}}^k$ к набору матриц

$$\tilde{\mathbf{M}}'^k = \mathbf{H}_{1, i_{\max} j_{\max}}(\theta_1, y_1) \tilde{\mathbf{M}}^k \mathbf{H}_{1, i_{\max} j_{\max}}(\theta_1, y_1)^H , \quad (36)$$

где

$$\mathbf{H}_{1, i_{\max} j_{\max}}(\theta_1, y_1) = \mathbf{S}_{i_{\max} j_{\max}}(0, y_1) \mathbf{G}_{i_{\max} j_{\max}}(0, \theta_1) . \quad (37)$$

Причем необходимо подобрать такие значения θ_1 и y_1 , чтобы величина

$$C'_{i_{\max} j_{\max}} = \sum_{k=1}^K |\tilde{\mathbf{M}}'^k[i_{\max}, j_{\max}]|^2 \quad (38)$$

была минимальной.

Для того, чтобы решить эту задачу, представим $\tilde{\mathbf{M}}'^k[i_{\max}, j_{\max}]$ через элементы матрицы $\tilde{\mathbf{M}}^k$:

$$\tilde{\mathbf{M}}'^k[i_{\max}, j_{\max}] = \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} \frac{\tilde{\mathbf{M}}^k[i_{\max}, i_{\max}] + \tilde{\mathbf{M}}^k[j_{\max}, j_{\max}]}{2} \\ \frac{\tilde{\mathbf{M}}^k[i_{\max}, i_{\max}] - \tilde{\mathbf{M}}^k[j_{\max}, j_{\max}]}{2} \\ \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{M}}^k[i_{\max}, j_{\max}]) \end{bmatrix} + J \operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{M}}^k[i_{\max}, j_{\max}]) , \quad (39)$$

где

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \sinh(2y_1) \\ -\sin(2\theta_1) \cosh(2y_1) \\ \cos(2\theta_1) \cosh(2y_1) \end{bmatrix} . \quad (40)$$

При этом на вектор \mathbf{v} наложено следующее ограничение:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{J} \mathbf{v} = 1 , \quad (41)$$

где

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Тогда критерий $C'_{i_{\max} j_{\max}}$ можно представить следующим образом:

$$C'_{i_{\max} j_{\max}} = \mathbf{v}^T \mathbf{R} \mathbf{v}, \quad (43)$$

где

$$\mathbf{R} = \mathbf{V} \mathbf{V}^T, \quad (44)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{\mathbf{M}}_1[i_{\max}, i_{\max}] + \tilde{\mathbf{M}}_1[j_{\max}, j_{\max}]}{2} & \dots & \frac{\tilde{\mathbf{M}}_K[i_{\max}, i_{\max}] + \tilde{\mathbf{M}}_K[j_{\max}, j_{\max}]}{2} \\ \frac{\tilde{\mathbf{M}}_1[i_{\max}, i_{\max}] - \tilde{\mathbf{M}}_1[j_{\max}, j_{\max}]}{2} & \dots & \frac{\tilde{\mathbf{M}}_K[i_{\max}, i_{\max}] - \tilde{\mathbf{M}}_K[j_{\max}, j_{\max}]}{2} \\ \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{M}}_1[i_{\max}, j_{\max}]) & \dots & \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{M}}_K[i_{\max}, j_{\max}]) \end{bmatrix}. \quad (45)$$

То есть, нам необходимо найти такое \mathbf{v} , чтобы выполнялись следующие условия:

$$\mathbf{v} = \arg \min_{\mathbf{v}^T \mathbf{J} \mathbf{v} = 1} \{ \mathbf{v}^T \mathbf{R} \mathbf{v} \}. \quad (46)$$

Решением (46) является нормированный согласно (41) собственный вектор матрицы $\mathbf{J} \mathbf{R}$, чье собственное значение положительно и минимально, а также его третья компонента была неотрицательной. Зная \mathbf{v} , находим θ_1 и y_1 следующим образом:

$$\begin{cases} \cosh(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + v_1^2}} \\ \sinh(y_1) = \frac{v_1}{2 \cosh(y_1)} \\ \cos(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{v_3}{\sqrt{1 + v_1^2}}} \\ \sin(\theta_1) = -\frac{v_2}{2 \cos(\theta_1) \sqrt{1 + v_1^2}} \end{cases}. \quad (47)$$

Тем самым, мы можем составить матрицу $\mathbf{H}_{1,i_{\max}j_{\max}}(\theta_1, y_1)$ и преобразовать $\tilde{\mathbf{M}}^k$ в $\tilde{\mathbf{M}}'^k$. Однако, как видно из (39), матрица $\mathbf{H}_{1,i_{\max}j_{\max}}(\theta_1, y_1)$ не меняет мнимую часть элемента $\tilde{\mathbf{M}}'^k[i_{\max}, j_{\max}]$. Для того, чтобы минимизировать мнимую компоненту, необходимо преобразовать $\tilde{\mathbf{M}}'^k$ в $\tilde{\mathbf{M}}''^k$ следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{M}}''^k = \mathbf{H}_{2,i_{\max}j_{\max}}(\theta_2, y_2)\tilde{\mathbf{M}}'^k\mathbf{H}_{2,i_{\max}j_{\max}}(\theta_2, y_2)^H, \quad (48)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}''^k[i_{\max}, j_{\max}] = \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{M}}'^k[i_{\max}, j_{\max}]) + \mathbf{J}\mathbf{v}^T \begin{bmatrix} \frac{\tilde{\mathbf{M}}'^k[i_{\max}, i_{\max}] + \tilde{\mathbf{M}}'^k[j_{\max}, j_{\max}]}{2} \\ \frac{\tilde{\mathbf{M}}'^k[i_{\max}, i_{\max}] - \tilde{\mathbf{M}}'^k[j_{\max}, j_{\max}]}{2} \\ \operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{M}}'^k[i_{\max}, j_{\max}]) \end{bmatrix}, \quad (49)$$

где

$$\mathbf{H}_{2,i_{\max}j_{\max}}(\theta_2, y_2) = \mathbf{S}_{i_{\max}j_{\max}}\left(\frac{\pi}{2}, y_2\right)\mathbf{G}_{i_{\max}j_{\max}}\left(\frac{\pi}{2}, \theta_2\right). \quad (50)$$

Параметры θ_2 и y_2 находятся аналогично θ_1 и y_1 , при этом матрица \mathbf{v} должна быть определена следующим образом:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{\mathbf{M}}'_1[i_{\max}, i_{\max}] + \tilde{\mathbf{M}}'_1[j_{\max}, j_{\max}]}{2} & \dots & \frac{\tilde{\mathbf{M}}'_K[i_{\max}, i_{\max}] + \tilde{\mathbf{M}}'_K[j_{\max}, j_{\max}]}{2} \\ \frac{\tilde{\mathbf{M}}'_1[i_{\max}, i_{\max}] - \tilde{\mathbf{M}}'_1[j_{\max}, j_{\max}]}{2} & \dots & \frac{\tilde{\mathbf{M}}'_K[i_{\max}, i_{\max}] - \tilde{\mathbf{M}}'_K[j_{\max}, j_{\max}]}{2} \\ \operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{M}}'_1[i_{\max}, j_{\max}]) & \dots & \operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{M}}'_K[i_{\max}, j_{\max}]) \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Далее можно переобозначить $\tilde{\mathbf{M}}''_k \rightarrow \tilde{\mathbf{M}}_k$, $\mathbf{H}_{2,i_{\max}j_{\max}}(\theta_2, y_2)\mathbf{H}_{1,i_{\max}j_{\max}}(\theta_1, y_1)\mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}$ и переходим к новой итерации. Алгоритм заканчиваем, если число итераций достигло заранее определенного максимального значения, или же выполнилось следующее условие:

$$\max\{\sin(\theta_1), \sinh(y_1), \sin(\theta_2), \sinh(y_2)\} < \tau, \quad (52)$$

где τ – заранее определенная точность выполнения алгоритма.

Итоговый алгоритм диагонализации набора матриц в псевдокоде:

Дано:

$$\{\mathbf{M}_k \in \mathbb{C}^{N \times N}\}_{k=1}^K, \tau, \text{maxiteration}$$

Инициализация:

$$\left\{ \tilde{\mathbf{M}}^k = \frac{1}{2} (\mathbf{M}^k + (\mathbf{M}^k)^H) \right\}_{k=1}^K$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{I}_N$$

$$\text{iteration} = 0$$

do

$$(i_{\max}, j_{\max}) = \arg \max_{1 \leq i \neq j \leq N} \sum_{k=1}^K |\tilde{\mathbf{M}}^k[i, j]|^2$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{\mathbf{M}}_1[i_{\max}, i_{\max}] + \tilde{\mathbf{M}}_1[j_{\max}, j_{\max}]}{2} & \dots & \frac{\tilde{\mathbf{M}}_K[i_{\max}, i_{\max}] + \tilde{\mathbf{M}}_K[j_{\max}, j_{\max}]}{2} \\ \frac{\tilde{\mathbf{M}}_1[i_{\max}, i_{\max}] - \tilde{\mathbf{M}}_1[j_{\max}, j_{\max}]}{2} & \dots & \frac{\tilde{\mathbf{M}}_K[i_{\max}, i_{\max}] - \tilde{\mathbf{M}}_K[j_{\max}, j_{\max}]}{2} \\ \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{M}}_1[i_{\max}, j_{\max}]) & \dots & \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{M}}_K[i_{\max}, j_{\max}]) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{V} \mathbf{V}^T$$

$$(\theta_1, y_1) = \arg \min_{\mathbf{v}^T \mathbf{J} \mathbf{v} = 1} \{ \mathbf{v}^T \mathbf{R} \mathbf{v} \}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \sinh(2y) \\ -\sin(2\theta) \cosh(2y) \\ \cos(2\theta) \cosh(2y) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{H}_{1, i_{\max} j_{\max}}(\theta_1, y_1) \mathbf{W}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^k \leftarrow \mathbf{H}_{1, i_{\max} j_{\max}}(\theta_1, y_1) \tilde{\mathbf{M}}^k \mathbf{H}_{1, i_{\max} j_{\max}}(\theta_1, y_1)^H$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{\mathbf{M}}'_1[i_{\max}, i_{\max}] + \tilde{\mathbf{M}}'_1[j_{\max}, j_{\max}]}{2} & \dots & \frac{\tilde{\mathbf{M}}'_K[i_{\max}, i_{\max}] + \tilde{\mathbf{M}}'_K[j_{\max}, j_{\max}]}{2} \\ \frac{\tilde{\mathbf{M}}'_1[i_{\max}, i_{\max}] - \tilde{\mathbf{M}}'_1[j_{\max}, j_{\max}]}{2} & \dots & \frac{\tilde{\mathbf{M}}'_K[i_{\max}, i_{\max}] - \tilde{\mathbf{M}}'_K[j_{\max}, j_{\max}]}{2} \\ \operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{M}}'_1[i_{\max}, j_{\max}]) & \dots & \operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{M}}'_K[i_{\max}, j_{\max}]) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{V} \mathbf{V}^T$$

$$(\theta_2, y_2) = \arg \min_{\mathbf{v}^T \mathbf{J} \mathbf{v} = 1} \{ \mathbf{v}^T \mathbf{R} \mathbf{v} \}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \sinh(2y) \\ -\sin(2\theta) \cosh(2y) \\ \cos(2\theta) \cosh(2y) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{H}_{2, i_{\max} j_{\max}}(\theta_1, y_1) \mathbf{W}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^k \leftarrow \mathbf{H}_{2, i_{\max} j_{\max}}(\theta_1, y_1) \tilde{\mathbf{M}}^k \mathbf{H}_{1, i_{\max} j_{\max}}(\theta_1, y_1)^H$$

iteration ++

end do until $(\max\{\sin(\theta_1), \sinh(y_1), \sin(\theta_2), \sinh(y_2)\} < \tau) \parallel (\textit{iteration} \geq \textit{maxiteration})$

1.2.5.2 Быстрая приближенная совместная диагонализация

В алгоритме быстрой приближенной совместной диагонализации (Fast Approximate Joint Diagonalization, FAJD) для поиска размешивающей матрицы \mathbf{W} выполняется минимизация следующего критерия [97]:

$$J(\mathbf{W}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N |\mathbf{W}^H \tilde{\mathbf{M}}^k \mathbf{W}[i, j]|^2 - \beta \ln |\det(\mathbf{W})|, \quad (53)$$

где $\alpha_k, 1 \leq k \leq K$ и β – заранее определенные положительные веса, $\det(\mathbf{W})$ – определитель матрицы \mathbf{W} . Второе слагаемое правой части (53) добавлено для того, чтобы исключить из решения вырожденные матрицы.

На первом шаге \mathbf{W} делаем равной единичной матрице для первого набора статистик, или же равной решению для предыдущего набора статистик. Сделано это было из-за того, чтобы уменьшить время сходимости итераций.

Далее необходимо привести статистики \mathbf{M}_k к эрмитовому виду:

$$\tilde{\mathbf{M}}^k = \frac{1}{2} (\mathbf{M}^k + (\mathbf{M}^k)^H). \quad (54)$$

Суть алгоритма заключена в том, что каждая итерация разбита на N подытераций. На i -ой подытерации необходимо изменить i -ый столбец матрицы \mathbf{W} таким образом, чтобы критерий $J(\mathbf{W})$ уменьшился на как можно большую величину. При этом остальные столбцы фиксированы. Для решения этой задачи необходимо представить критерий $J(\mathbf{W})$ в виде двух частей. Одна часть зависит от i -ого столбца матрицы \mathbf{W} , который в дальнейшем будем обозначать \mathbf{w}_i , а другая от \mathbf{w}_i не зависит. Для этого перепишем $J(\mathbf{W})$ следующим образом:

$$J(\mathbf{W}) = \mathbf{w}_i^H \mathbf{Q}_i \mathbf{w}_i - \beta \ln |\det(\mathbf{W})| + C_i, \quad (55)$$

где

$$\mathbf{Q}_i = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1, j \neq i}^N \alpha_k \left[\tilde{\mathbf{M}}^k \mathbf{w}_j \mathbf{w}_j^H (\tilde{\mathbf{M}}^k)^H + (\tilde{\mathbf{M}}^k)^H \mathbf{w}_j \mathbf{w}_j^H \tilde{\mathbf{M}}^k \right], \quad (56)$$

а C_i не зависит от \mathbf{w}_i . Далее необходимо так же разделить слагаемое $-\beta \ln |\det(\mathbf{W})|$. Для этого воспользуемся перестановочной матрицей $\mathbf{E}_{s,t}$, определенной следующим образом:

$$\mathbf{E}_{s,t}[i, j] = \begin{cases} 1, (i = s, j = t) \text{ или } (i = t, j = s) \\ 1, (i = j) \text{ и } (i \neq s, t) \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}. \quad (57)$$

Используя матрицу перестановки $\mathbf{E}_{i,N}$, меняем местами i -ый и N -ый столбцы местами:

$$\mathbf{W}\mathbf{E}_{i,N} = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{i-1}, \mathbf{w}_N, \mathbf{w}_{i+1}, \dots, \mathbf{w}_{N-1}, \mathbf{w}_i]. \quad (58)$$

Далее умножаем матрицу $\mathbf{W}\mathbf{E}_{i,N}$ слева на матрицу $\mathbf{E}_{s,N}$ и представляем ее следующим образом:

$$\mathbf{E}_{s,N} \mathbf{W}\mathbf{E}_{i,N} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{u} \\ \mathbf{b}^H & v \end{bmatrix}. \quad (59)$$

Строку s необходимо выбрать таким образом, чтобы матрица \mathbf{B} была невырожденной. Заметим, что столбец \mathbf{w}_i можно представить следующим образом:

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{E}_{s,N} [\mathbf{u}^T, v]^T. \quad (60)$$

Затем преобразуем $|\det(\mathbf{W})|$, используя составные элементы матрицы из правой части (59):

$$|\det(\mathbf{W})| = |\det(\mathbf{E}_{s,N} \mathbf{W}\mathbf{E}_{i,N})| = |\det(\mathbf{B})(v - \mathbf{b}^H \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u})|. \quad (61)$$

Введем вспомогательный вектор:

$$\mathbf{c}_s^H = [-\mathbf{b}^H \mathbf{B}^{-1}, 1] \mathbf{E}_{s,N}, \quad (62)$$

и приведем выражение $(v - \mathbf{b}^H \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u})$ к следующему виду:

$$v - \mathbf{b}^H \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u} = [-\mathbf{b}^H \mathbf{B}^{-1}, 1] \mathbf{E}_{s,N} \mathbf{E}_{s,N} [\mathbf{u}^T, v]^T = \mathbf{c}_s^H \mathbf{w}_i. \quad (63)$$

Соответственно выражение (61) можно переписать следующим образом:

$$|\det(\mathbf{W})| = |\det(\mathbf{B})| \prod \mathbf{c}_s^H \mathbf{w}_i | . \quad (64)$$

Подставляя (64) в (55), получаем:

$$J(\mathbf{W}) = \mathbf{w}_i^H \mathbf{Q}_i \mathbf{w}_i - \beta \ln |\mathbf{c}_s^H \mathbf{w}_i | + C_{i,s} , \quad (65)$$

где $C_{i,s}$ не зависит от \mathbf{w}_i . Тем самым критерий $J(\mathbf{w})$ был представлен в виде выражения, зависящего от \mathbf{w}_i , и некой константы, значение которой не влияет на ход алгоритма, поскольку задача минимизации $J(\mathbf{w})$ приводится к задаче минимизации выражения $\mathbf{w}_i^H \mathbf{Q}_i \mathbf{w}_i - \beta \ln |\mathbf{c}_s^H \mathbf{w}_i |$.

Оптимальным решением минимизации критерия (65) является следующее выражение:

$$\mathbf{w}_i^{opt} = \frac{\sqrt{\beta} \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{c}_s}{\sqrt{2 \mathbf{c}_s^H \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{c}_s}} . \quad (66)$$

Заменяем столбец \mathbf{w}_i матрицы \mathbf{W} на столбец и переходим к следующей подытерации.

Алгоритм заканчиваем, если число итераций достигло заранее определенного максимального значения, или же выполнилось следующее условие:

$$|J(\mathbf{W}^{[m+1]}) - J(\mathbf{W}^{[m]})| \leq \varepsilon , \quad (67)$$

где ε – малое положительное число, $\mathbf{W}^{[m]}$ – размещивающая матрица, полученная на m итерации.

Итоговый алгоритм диагонализации набора матриц в псевдокоде:

Дано:

$$\{\mathbf{M}_k \in \mathbb{C}^{N \times N}\}_{k=1}^K, \tau, maxiteration, \{\alpha_k\}_{k=1}^K, \beta$$

Инициализация:

$$\left\{ \tilde{\mathbf{M}}^k = \frac{1}{2} (\mathbf{M}^k + (\mathbf{M}^k)^H) \right\}_{k=1}^K$$

$$iteration = 0$$

$$i = 0$$

$$J_2 = \sum_{k=1}^K \alpha_k \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N |\mathbf{W}^H \tilde{\mathbf{M}}^k \mathbf{W}[i, j]|^2 - \beta \ln |\det(\mathbf{W})|$$

если первая пачка статистики, то $\mathbf{W} = \mathbf{I}_N$

do

$$J_1 = J_2$$

$$\mathbf{Q}_i = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1, j \neq i}^N \alpha_k \left[\tilde{\mathbf{M}}^k \mathbf{w}_j \mathbf{w}_j^H (\tilde{\mathbf{M}}^k)^H + (\tilde{\mathbf{M}}^k)^H \mathbf{w}_j \mathbf{w}_j^H \tilde{\mathbf{M}}^k \right]$$

do $s = 1, N - 1$

$$\mathbf{E}_{s,N} \mathbf{W} \mathbf{E}_{i,N} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{u} \\ \mathbf{b}^H & v \end{bmatrix}$$

если $\det(\mathbf{B}) \neq 0$, то break

end do

$$\mathbf{c}_s^H = [-\mathbf{b}^H \mathbf{B}^{-1}, 1] \mathbf{E}_{s,N}$$

$$\mathbf{w}_i^{opt} = \frac{\sqrt{\beta} \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{c}_s}{\sqrt{2 \mathbf{c}_s^H \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{c}_s}}$$

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i^{opt}$$

$$J_2 = \sum_{k=1}^K \alpha_k \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N |\mathbf{W}^H \tilde{\mathbf{M}}^k \mathbf{W}[i, j]|^2 - \beta \ln |\det(\mathbf{W})|$$

$$i = i \bmod N + 1$$

iteration ++

end do until $(|J_2 - J_1| < \tau) \parallel (iteration \geq maxiteration)$

1.2.6 Методы слепого разделения сигналов с использованием информационных критериев

В данной группе методов можно выделить два основных направления: МСРС с использованием меры негауссовости как критерия разделения сигналов и МСРС с использованием энтропии сигналов.

Методы с использованием меры негауссовости опираются на тот факт, что сумма нескольких независимых случайных величин имеет вероятностное распределение, близкое к нормальному [18]. Таким образом, распределение СВ, представляющего собой линейную комбинацию нескольких произвольных СВ, ближе к распределению Гаусса, нежели к распределениям исходных СВ. Из этого следует, что искомая размещивающая матрица \mathbf{W}^H должна определять максимум меры негауссовости величины $\mathbf{W}^H \mathbf{Y}$. Методы данной группы оценивают размещивающую матрицу с использованием кумулянтов четвертого порядка [87]

$$\mathcal{C}_X = \mathbf{E}[\mathbf{X}^4] - \mathbf{E}[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H] \cdot \mathbf{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^H] - \mathbf{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}] \mathbf{E}[\mathbf{X}^H \mathbf{X}^H] - \mathbf{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^H] \cdot \mathbf{E}[\mathbf{X}^H \mathbf{X}]. \quad (68)$$

Кумулянт обладает свойством линейности [87]. Также стоит отметить, что для нормальной случайной величины все ее кумулянты порядка трех и выше равны нулю. Тем самым данный метод позволяет разделить не более одного нормально распределенной случайной величины. Если исходные сигналы статистически независимы, то кумулянт абсолютно диагонален [87] (имеет ненулевые элементы только при $i = j = k = l$). Это означает, что кумулянт вектора наблюдений \mathbf{Y} может быть представлен через диагональный кумулянт источников \mathcal{C}_S

$$\mathcal{C}_Y = \mathcal{C}_S \times_1 \mathbf{A} \times_2 \mathbf{A} \times_3 \mathbf{A} \times_4 \mathbf{A}, \quad (69)$$

где символом \times_k обозначено произведение тензора на матрицу вдоль k -го индекса.

Таким образом, размещивающую матрицу можно найти, рассчитав по вектору наблюдений \mathbf{Y} статистику \mathcal{C}_Y и матрицу ковариации Φ_Y , после чего найти такую размещивающую матрицу \mathbf{W} , что тензоры

$$\bar{\Phi} = \mathbf{W}\Phi_Y\mathbf{W}^H \text{ и } \tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}_Y \times_1 \mathbf{W}^H \times_2 \mathbf{W}^H \times_3 \mathbf{W}^H \times_4 \mathbf{W}^H$$

наиболее близки к диагональным. Статистику $\bar{\Phi}$ приводят к диагональному виду при помощи метода анализа главных компонент. После перехода в базис главных компонент задача приведения тензора \mathcal{C}_Z в общем случае не имеет точного

решения [87]. Поэтому ее решают в смысле минимизации нормы отклонения тензора C_Z от ближайшего диагонального [87].

Таким образом, методы данной группы можно разбить на следующие этапы [28]:

1. Центрирование входных данных.
2. Вычисление ковариационной матрицы Φ_Y . Оценка обеляющей матрицы W_1^H . Определение числа сигналов и переход в базис главных компонент Z .
3. Расчет кумулянта

$$C_Z(z_i, z_j, z_k, z_l) = E[z_i z_j z_k z_l] - E[z_i z_j]E[z_k z_l] - E[z_i z_k]E[z_j z_l] - E[z_i z_l]E[z_j z_k].$$

4. Поиск унитарной матрицы W_2^H , приводящей кумулянт C_Z к диагональному виду

$$\tilde{C} = C_Z \times_1 W_2^H \times_2 W_2^H \times_3 W_2^H \times_4 W_2^H,$$

где \tilde{C} – диагональный тензор.

5. Определение размешивающей матрицы

$$W^H = W_2^H W_1^H.$$

6. Нахождение сигналов.

Приведение тензора C_Z к диагональному виду в данном случае означает минимизацию некоторой функции $\mathfrak{M}(C_Z)$, отражающей меру его недиагональности.

Существуют множество методов диагонализации тензора C_Z [56,58,59,61,62,64,67,68,69,70,71,72,73,74,75,76]. Метод слепого разделения сигналов, предложенный в работе [55], использует алгоритм, в основе которого лежит свойство инвариантности следа тензора C_Z относительно унитарных конгруэнтных преобразований. Это означает, что в случае унитарного конгруэнтного преобразования (69) след тензора, т.е. сумма его диагональных элементов, не будет зависеть от матрицы преобразования W_2^H . К недостаткам

метода можно отнести невозможность работы с сигналами, имеющими распределение Гаусса [55]. Для работы данного метода необходимо, чтобы коэффициент эксцесса у всех выделяемых сигналов имел одинаковый, и известный знак, что не всегда достижимо.

В методе приближенной совместной диагонализации собственных матриц (ПСДСМ) [55] основан на использовании унитарных вращений тензора. Для диагонализации тензора \mathcal{C}_Z в методе ПСДСМ предложена следующая переформулировка условия: тензор \mathcal{C}_Z размера $M \times M \times M \times M$ рассматривается как семейство из m^2 матриц

$$\mathcal{C}_Z = \left[(c^\beta)_{kl} \right] = (\mathcal{C}_Z)_{(ij)kl}, \quad (ij) \longleftrightarrow \beta. \quad (70)$$

Из (69) с учетом того, что матрица \mathbf{W}_2^H является унитарной, β срезка тензора \mathcal{C}_Z будет иметь вид

$$c^\beta = \mathbf{W}_2^H \Delta_\beta \mathbf{W}_2, \quad (71)$$

где Δ_β – диагональная матрица.

Соотношение (71) позволяет определить следующую меру недиагональности тензора \mathcal{C}_Z

$$\mathfrak{M}(\mathcal{C}_Z) = \sum_{\beta=1}^M \sum_{i,j=1, i \neq j}^M (c_{ij}^\beta), \quad (72)$$

подлежащую минимизации.

Минимизация (72) может быть выполнена несколькими способами. В частности, можно использовать метод вращений Якоби [50].

Основным недостатком метода является невозможность выделения более одного сигнала с распределением Гаусса [55]. Также метод имеет высокую вычислительную сложность и высокую чувствительность к ошибке определения числа сигналов.

Оптимизационным критерием методов с использованием энтропии сигналов является негэнтропия [56,86,88,90]

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}) \sim (\mathbf{E}[G(\mathbf{X})] - \mathbf{E}[G(\mathbf{V})])^2, \quad (73)$$

где $G(\bullet)$ – неквадратичная аппроксимизационная функция,

\mathbf{v} – СП с распределением гаусса и единичной дисперсией.

Формула (73) используется в быстром методе анализа независимых компонент (БМАНК) [85]. Данный метод имеет высокую скорость оценки независимости компонент (в 10-100 раз по сравнению с классическими методами АНК [85]). Метод позволяет выделять один сигнал с распределением Гаусса [85].

На первом шаге БМАНК [85] выполняют центрирование данных. На втором шаге выполняют беление данных и переход в пространство главных компонент \mathbf{Z} .

Корреляционная матрица главных компонент равна единице [87], т.е. выполняется равенство

$$\mathbf{E}[\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H] = \mathbf{W}_1^H \mathbf{W}_1 = \mathbf{I},$$

где $\mathbf{E}[\bullet]$ – операция усреднения.

В силу этого, матрица \mathbf{B} , переводящая вектор источников в принципиальные компоненты

$$\mathbf{Z} = \mathbf{W}_1^H \mathbf{Y} = \mathbf{W}_1^H \mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{B}\mathbf{S},$$

обладает свойством унитарности

$$\mathbf{E}[\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H] = \mathbf{B}\mathbf{E}[\mathbf{S}\mathbf{S}^H]\mathbf{B}^H = \mathbf{B}\mathbf{B}^H = \mathbf{I}. \quad (74)$$

Свойство унитарности приводит к большей устойчивости многих методов слепого разделения сигналов [56]. Для БМАНК переход в базис принципиальных компонент необходим для возможности определения сигналов последовательно

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}^H \mathbf{Z}, \quad s_i = \sum_{j=1}^M b_{ji} z_j = (\mathbf{b}_i)^H \mathbf{Z}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (75)$$

где \mathbf{b}_i – i -й столбец матрицы \mathbf{B} .

Ключевой идеей БМАНК является поиск такой линейной комбинации компонент \mathbf{z} , что суммарная степень их негауссовости максимальна.

Коэффициенты этой суммы определяют столбец матрицы \mathbf{V} . В качестве аппроксимации (73) в алгоритме БМАНК рассматривают функции вида [85]

$$\mathfrak{M}_{ng}(\mathbf{W}) = \mathbf{E}[G(|\mathbf{W}^H \mathbf{Z}|^2)],$$

где $G(\bullet)$ – функция контраста, подбираемая из особенностей конкретной задачи.

При $G(y) = y^2$ мерой негауссовости будет коэффициент эксцесса (68).

Процесс максимизации меры негауссовости выделяемых компонент строится на теореме Куна-Таккера [85]. Для поиска точки экстремума применяют метод Ньютона [85].

БМАНК состоит в последовательном применении следующих шагов [85].

1. Центрирование входных данных.
2. Вычисление ковариационной матрицы Φ_y . Оценка обеляющей матрицы \mathbf{W}_1^H . Определение числа сигналов и переход в базис принципиальных компонент \mathbf{Z} .
3. Задание начальных значений: $\mathbf{w}_{\{0\}}$ – вектор единичной нормы, $k = 0$, $\mathbf{V} = 0$.
4. Вычисление

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\{k+1\}} = & \mathbf{E}[\mathbf{Z}(\mathbf{w}_{\{k\}}^H \mathbf{Z})^H g(|\mathbf{w}_{\{k\}}^H \mathbf{Z}|^2)] - \\ & - \mathbf{E}[g(|\mathbf{w}_{\{k\}}^H \mathbf{Z}|^2) + |\mathbf{w}_{\{k\}}^H \mathbf{Z}|^2 g'(|\mathbf{w}_{\{k\}}^H \mathbf{Z}|^2)] \mathbf{w}_{\{k\}}, \end{aligned}$$

где $g(\bullet) = G'(\bullet)$ – производная от функции контраста $G(\bullet)$;

g' – производная от функции $g(\bullet)$.

5. Ортогонализация вектора $\mathbf{w}_{\{k+1\}}$ к пространству, заданному столбцами матрицы \mathbf{V}

$$\mathbf{w}_{\{k+1\}} = (\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^H) \mathbf{w}_{\{k+1\}}.$$

6. Ортонормирование $\mathbf{w}_{\{k+1\}}$ на единицу

$$\mathbf{w}_{\{k+1\}} = \mathbf{w}_{\{k+1\}} / \|\mathbf{w}_{\{k+1\}}\|.$$

7. Проверка близости $\mathbf{W}_{\{k+1\}}$ к $\mathbf{W}_{\{k\}}$. Если значение $\mathbf{W}_{\{k+1\}}$ близко $\mathbf{W}_{\{k\}}$, то завершим поиск $\mathbf{W}_{\{k\}}$.
8. Включение найденного вектора $\mathbf{w}_{\{k\}}$ в виде столбца ортогональной матрицы ортогональной матрицы

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B} \mathbf{w}_{\{k+1\}}].$$
9. Если оценены не все столбцы матрицы \mathbf{B} , то выполняем переход на третий шаг.
10. Определение размешивающей матрицы $\mathbf{W} = \mathbf{B}$.
11. Нахождение сигналов согласно (3).

1.3 Выводы по разделу

В разделе 1 была сформулирована постановка задачи слепого разделения сигналов. Представлена модель линейного смешивания сигналов в присутствии аддитивных шумов. Предполагается, что исходные сигналы являются стационарными случайными процессами и обладают свойством статистической независимости относительно друг друга. Показана неоднозначность восстановления исходных сигналов с точностью до их масштаба и перестановок. Показана общая схема работы методов слепого разделения сигналов, включающая в себя центрирование данных, беление данных, оптимизация критерия независимости сигналов, формирование разделяющей матрицы и восстановление сигналов.

Также в разделе был проведен анализ существующих методов разделения сигналов. Показаны основные методы статистического определения коэффициентов размешивающей матрицы, основанные на частичном использовании априорной информации о полезном сигнале или о направлении его прихода. Представлены алгоритмы разделения сигналов с предварительным

расчетом пространственно-поляризационных параметров сигналов, зависящие от априорной информации о строении антенной решетки. Рассмотрены методы слепого разделения сигналов с использованием критерия декорреляции. Показано, что данные методы зависят от выбора временного сдвига между сигналами.

2 Разработка слепого алгоритма разделения двух комплексных цифровых сигналов

2.1 Анализ статистических величин, используемых в алгоритме слепого разделения сигналов

В данной работе в качестве основы СРС было использовано приведение смешанных кумулянтов случайных величин к нулю. Кумулянты непосредственно связаны с характеристической функцией случайных величин. Характеристическая функция двух случайных величин представляет собой следующее выражение:

$$\Phi_{(x,y)}(x, y) \triangleq E \left[\exp(j(xX + yY)) \right], \quad (76)$$

где X и Y – случайные величины, $E[...]$ – оператор усреднения. Характеристическая функция $\Phi_{(x,y)}(x, y)$ связана с начальными моментами следующим соотношением:

$$\Phi_{(x,y)}(x, y) = \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} \left(\frac{j}{2} \right)^{n_1+n_2} \frac{x^{n_1} y^{n_2}}{n_1! n_2!} \alpha_{n_1 n_2}, \quad (77)$$

где $\alpha_{n_1 n_2} = E \left[X^{n_1} Y^{n_2} \right]$ – начальный момент порядка $n_1 + n_2$. Из уравнения (77) следует, что начальные моменты $\alpha_{n_1 n_2}$ можно выразить через частные производные характеристической функции $\Phi_{(x,y)}(x, y)$:

$$\alpha_{n_1 n_2} = \left(\frac{2}{j} \right)^{n_1+n_2} \frac{\partial^{n_1+n_2} \Phi_{(x,y)}}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2}}(0, 0). \quad (78)$$

Кумулянтная функция $\Psi_{(x,y)}(x, y)$ представляет собой логарифм характеристической функции $\Phi_{(x,y)}(x, y)$

$$\Psi_{(x,y)}(x, y) \triangleq \text{Log} \left[\Phi_{(x,y)}(x, y) \right], \quad (79)$$

а коэффициенты при степенном разложении $\Psi_{(x,y)}(x, y)$ являются кумулянтами случайных величин X и Y :

$$\Psi_{(X,Y)}(x,y) = \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} \left(\frac{j}{2}\right)^{n_1+n_2} \frac{x^{n_1} y^{n_2}}{n_1! n_2!} \kappa_{n_1 n_2}, \quad (80)$$

где $\kappa_{n_1 n_2}$ – кумулянт порядка $n_1 + n_2$. Аналогично (78) кумулянты можно представить как

$$\kappa_{n_1 n_2} = \left(\frac{2}{j}\right)^{n_1+n_2} \frac{\partial^{n_1+n_2} \Psi_{(X,Y)}(0,0)}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2}}. \quad (81)$$

Кумулянт $\kappa_{n_1 n_2}$ называется смешанным, если $n_1 > 0$ и $n_2 > 0$. Если X и Y – независимые случайные величины, то

$$\Psi_{(X,Y)}(x,y) = \Psi_X(x) + \Psi_Y(y), \quad (82)$$

где $\Psi_X(x) \triangleq \text{Log}[\Phi_X(x)]$; $\Phi_X(x) \triangleq E[\exp(j(xX))]$; $\Psi_Y(y) \triangleq \text{Log}[\Phi_Y(y)]$; $\Phi_Y(y) \triangleq E[\exp(j(yY))]$. Пусть \hat{x} и \hat{y} – линейные комбинации случайных величин X и Y :

$$\begin{aligned} \hat{X} &= w_{11}X + w_{12}Y \\ \hat{Y} &= w_{21}X + w_{22}Y. \end{aligned} \quad (83)$$

Тогда характеристическую и кумулянтную функции \hat{x} и \hat{y} можно представить через характеристическую и кумулянтную функции X и Y :

$$\begin{aligned} \Phi_{(\hat{x},\hat{y})}(\hat{x},\hat{y}) &= E\left[\exp\left(j(\hat{x}\hat{X} + \hat{y}\hat{Y})\right)\right] = \\ &= E\left[\exp\left(\frac{j}{2}\left(\hat{x}(w_{11}\hat{X} + w_{12}\hat{Y}) + \hat{y}(w_{21}\hat{X} + w_{22}\hat{Y})\right)\right)\right] = \\ &= E\left[\exp\left(\frac{j}{2}\left((w_{11}\hat{x} + w_{21}\hat{y})\hat{X} + (w_{12}\hat{x} + w_{22}\hat{y})\hat{Y}\right)\right)\right] = \\ &= \Phi_{(X,Y)}(w_{11}\hat{x} + w_{21}\hat{y}, w_{12}\hat{x} + w_{22}\hat{y}) \\ \Psi_{(\hat{x},\hat{y})}(\hat{x},\hat{y}) &= \text{Log}\left(\Phi_{(\hat{x},\hat{y})}(\hat{x},\hat{y})\right) = \text{Log}\left(\Phi_{(X,Y)}(w_{11}\hat{x} + w_{21}\hat{y}, w_{12}\hat{x} + w_{22}\hat{y})\right) = \\ &= \Psi_{(X,Y)}(w_{11}\hat{x} + w_{21}\hat{y}, w_{12}\hat{x} + w_{22}\hat{y}). \end{aligned} \quad (84)$$

Общие принципы СРС для комплексных цифровых сигналов аналогичны процессу разделения действительных сигналов. Исходя из полученных сигналов рассчитываются оценки статистик входных сигналов, связанные либо с определенной степенью коррелированности сигналов, либо с их независимостью. Затем на основе полученных статистик выбирается критерий независимости

сигналов. Используя этот критерий вычисляется размещивающая матрица, приводящая критерий к минимуму.

Классический подход к анализу комплексных СВ (КСВ) сводится к их разложению на две действительные СВ [9]. В таких случаях используются статистики отдельно действительной и мнимой частей КСВ, а также взаимные статистики между этими частями.

Однако к недостаткам такого подхода можно отнести повышенную вычислительную сложность применяемых алгоритмов за счет повышенного числа статистик. Использование действительных статистик при анализе КСВ приводит к громоздким выражениям, усложняющим дальнейший анализ. Более желаемым подходом является разработка и использование комплексных статистик, являющихся аналогами привычных моментов и кумулянтов в случае с действительными СВ.

Эта проблема была исследована в работах [65,66]. В них авторы последовательно определяют основные характеристики КСВ аналогично случаю с действительными СВ.

КСВ Z определяется как $Z \triangleq X + jY$, где X и Y – действительные СВ; j – мнимая единица. Основной характеристикой Z является функция распределения СВ $F_Z(z)$, определяемая как вероятность того, что действительная и мнимая части Z окажутся одновременно меньше соответствующих частей комплексного числа $z = x + jy$:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) \triangleq P((X \leq x) \wedge (Y \leq y)) = F_{(X,Y)}(x, y), \quad (85)$$

где $P(A)$ – вероятность исхода события A .

Под математическим ожиданием КСВ Z понимается следующее выражение:

$$E_Z[Z] \triangleq E_X[X] + jE_Y[Y], \quad (86)$$

где $E_X[X]$ и $E_Y[Y]$ – математические ожидания СВ X и Y соответственно.

Тогда характеристическую функцию $\Phi_Z(z)$ можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned}\Phi_Z(z) &\triangleq \Phi_{(x,y)}(x,y) = E_{(x,y)}[\exp(j(xX + yY))] = \\ &= E_Z[\exp(j \operatorname{Re}\{z^*Z\})] = E_Z\left[\frac{j}{2}(z^*Z + zZ^*)\right],\end{aligned}\quad (87)$$

где $\operatorname{Re}\{z\}$ – действительная часть комплексного числа z ; $\exp(\dots)$ – комплексная экспонента; \dots^* – операция комплексного сопряжения. В этом случае кумулянтная функция определяется как $\Psi_Z(z) \triangleq \operatorname{Log}[\Phi_Z(z)]$, где $\operatorname{Log}(\dots)$ – главная ветвь комплексного логарифма.

В общем случае $\Phi_Z(z)$ и $\Psi_Z(z)$ не являются аналитическими функциями [66], поэтому их нельзя разложить в ряд Тейлора в окрестности нуля только по степеням z . Для разложения этих функций также необходимо также использовать степени z^* :

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{j}{2}\right)^{n+m} \frac{z^{*n} z^m}{n!m!} \alpha_{nm} \\ \Psi(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{j}{2}\right)^{n+m} \frac{z^{*n} z^m}{n!m!} \kappa_{nm},\end{aligned}\quad (88)$$

где α_{nm} – начальный момент $(n+m)$ -го порядка; κ_{nm} – кумулянт $(n+m)$ -го порядка. Начальный момент α_{nm} так же может быть представлен как $\alpha_{nm} = E_Z[Z^n Z^{*m}]$.

Из формулы (88) следует, что начальные моменты α_{nm} и кумулянты κ_{nm} могут быть выражены через значения частных производных функций $\Phi_Z(z)$ и $\Psi_Z(z)$ в нуле:

$$\begin{aligned}\alpha_{nm} &= \left(\frac{2}{j}\right)^{m+n} \frac{\partial^{m+n} \Phi_Z}{\partial z^m \partial z^{*n}}(0) \\ \kappa_{nm} &= \left(\frac{2}{j}\right)^{m+n} \frac{\partial^{m+n} \Psi_Z}{\partial z^m \partial z^{*n}}(0).\end{aligned}\quad (89)$$

В случае с двумя КСВ основные функции определяются путем добавления новых переменных и условий:

$$\begin{aligned}
F_{(z_1, z_2)}(z_1, z_2) &\triangleq P((Z_1 \leq z_1) \wedge (Z_2 \leq z_2)) \\
\Phi_{(z_1, z_2)}(z_1, z_2) &\triangleq E_{(z_1, z_2)} \left[\exp \left(j \left(\operatorname{Re} \{ z_1^* Z_1 \} + \operatorname{Re} \{ z_2^* Z_2 \} \right) \right) \right] \\
\Phi_{(z_1, z_2)}(z_1, z_2) &= \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{m_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} \sum_{m_2=0}^{+\infty} \left(\frac{j}{2} \right)^{n_1+m_1+n_2+m_2} \frac{z_1^{*n_1} z_1^{m_1} z_2^{*n_2} z_2^{m_2}}{n_1! m_1! n_2! m_2!} \alpha_{n_1 m_1 n_2 m_2} \\
\alpha_{n_1 m_1 n_2 m_2} &= \left(\frac{2}{j} \right)^{n_1+m_1+n_2+m_2} \frac{\partial^{n_1+m_1+n_2+m_2} \Phi_{(z_1, z_2)}}{\partial z_1^{m_1} \partial z_1^{*n_1} \partial z_2^{m_2} \partial z_2^{*n_2}}(0, 0) = E_{(z_1, z_2)} \left[Z_1^{n_1} Z_1^{*m_1} Z_2^{n_2} Z_2^{*m_2} \right] \\
\Psi_{(z_1, z_2)}(z_1, z_2) &\triangleq \operatorname{Log} \left[\Phi_{(z_1, z_2)}(z_1, z_2) \right] \\
\Psi_{(z_1, z_2)}(z) &= \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{m_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} \sum_{m_2=0}^{+\infty} \left(\frac{j}{2} \right)^{n_1+m_1+n_2+m_2} \frac{z_1^{*n_1} z_1^{m_1} z_2^{*n_2} z_2^{m_2}}{n_1! m_1! n_2! m_2!} \kappa_{n_1 m_1 n_2 m_2} \\
\kappa_{n_1 m_1 n_2 m_2} &= \left(\frac{2}{j} \right)^{n_1+m_1+n_2+m_2} \frac{\partial^{n_1+m_1+n_2+m_2} \Psi_{(z_1, z_2)}}{\partial z_1^{m_1} \partial z_1^{*n_1} \partial z_2^{m_2} \partial z_2^{*n_2}}(0, 0).
\end{aligned} \tag{90}$$

Из представления начальных моментов $\alpha_{n_1 m_1 n_2 m_2}$ и кумулянтов $\kappa_{n_1 m_1 n_2 m_2}$ через частные производные характеристической функции $\Phi_{(z_1, z_2)}$ и кумулянтной функции $\Psi_{(z_1, z_2)}$ следует свойство симметричности [65]:

$$\begin{aligned}
\alpha_{n_1 m_1 n_2 m_2} &= \alpha_{m_1 n_1 m_2 n_2}^* \\
\kappa_{n_1 m_1 n_2 m_2} &= \kappa_{m_1 n_1 m_2 n_2}^*.
\end{aligned} \tag{91}$$

Если КСВ z_1 и z_2 независимы, то тогда $\Phi_{(z_1, z_2)}$ и $\Psi_{(z_1, z_2)}$ можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Phi_{(z_1, z_2)}(z_1, z_2) &= \Phi_{z_1}(z_1) \cdot \Phi_{z_2}(z_2) \\
\Psi_{(z_1, z_2)} &= \Psi_{z_1}(z_1) + \Psi_{z_2}(z_2).
\end{aligned} \tag{92}$$

Из выражений (92) следует, что если z_1 и z_2 независимы, то тогда их смешанные кумулянты $\kappa_{n_1 m_1 n_2 m_2}$ при $(n_1 + m_1) > 0$ и $(n_2 + m_2) > 0$ равны нулю. Это свойство в дальнейшем можно использовать в качестве критерия разделения цифровых сигналов.

Помимо полученных выражений (90) необходимо также рассмотреть вопрос о преобразованиях вероятностных характеристик КСВ при их линейном смешивании. Пусть \hat{Z}_1 и \hat{Z}_2 – КСВ, являющиеся линейными комбинациями КСВ z_1 и z_2 :

$$\begin{aligned}\hat{Z}_1 &= w_{11}Z_1 + w_{12}Z_2 \\ \hat{Z}_2 &= w_{21}Z_1 + w_{22}Z_2.\end{aligned}\tag{93}$$

Тогда характеристическую функцию $\Phi_{(\hat{z}_1, \hat{z}_2)}$ можно представить через $\Phi_{(Z_1, Z_2)}$

:

$$\begin{aligned}\Phi_{(\hat{z}_1, \hat{z}_2)}(\hat{z}_1, \hat{z}_2) &= E\left[\exp\left(j\left(\operatorname{Re}\{\hat{z}_1^* \hat{Z}_1\} + \operatorname{Re}\{\hat{z}_2^* \hat{Z}_2\}\right)\right)\right] = \\ &= E\left[\exp\left(\frac{j}{2}\left(\hat{z}_1^* \hat{Z}_1 + \hat{z}_1 \hat{Z}_1^* + \hat{z}_2^* \hat{Z}_2 + \hat{z}_2 \hat{Z}_2^*\right)\right)\right] = \\ &= E\left[\exp\left(\frac{j}{2}\left(\hat{z}_1^* (w_{11}Z_1 + w_{12}Z_2) + \hat{z}_1 (w_{11}^*Z_1^* + w_{12}^*Z_2^*) + \hat{z}_2^* (w_{21}Z_1 + w_{22}Z_2) + \hat{z}_2 (w_{21}^*Z_1^* + w_{22}^*Z_2^*)\right)\right)\right] = \\ &= E\left[\exp\left(\frac{j}{2}\left((w_{11}^*\hat{z}_1 + w_{21}^*\hat{z}_2)^* Z_1 + (w_{11}^*\hat{z}_1 + w_{21}^*\hat{z}_2) Z_1^* + (w_{12}^*\hat{z}_1 + w_{22}^*\hat{z}_2)^* Z_2 + (w_{12}^*\hat{z}_1 + w_{22}^*\hat{z}_2) Z_2^*\right)\right)\right] = \\ &= E\left[\exp\left(j\left(\operatorname{Re}\{(w_{11}^*\hat{z}_1 + w_{21}^*\hat{z}_2)^* Z_1\} + \operatorname{Re}\{(w_{12}^*\hat{z}_1 + w_{22}^*\hat{z}_2)^* Z_2\}\right)\right)\right] = \\ &= \Phi_{(Z_1, Z_2)}(w_{11}^*\hat{z}_1 + w_{21}^*\hat{z}_2, w_{12}^*\hat{z}_1 + w_{22}^*\hat{z}_2).\end{aligned}\tag{94}$$

Аналогично кумулянтная функция $\Psi_{(\hat{z}_1, \hat{z}_2)}$ тогда можно выразить через $\Psi_{(Z_1, Z_2)}$:

$$\begin{aligned}\Psi_{(\hat{z}_1, \hat{z}_2)}(\hat{z}_1, \hat{z}_2) &= \operatorname{Log}\left(\Phi_{(\hat{z}_1, \hat{z}_2)}(\hat{z}_1, \hat{z}_2)\right) = \\ &= \operatorname{Log}\left(\Phi_{(Z_1, Z_2)}(w_{11}^*\hat{z}_1 + w_{21}^*\hat{z}_2, w_{12}^*\hat{z}_1 + w_{22}^*\hat{z}_2)\right) = \Psi_{(Z_1, Z_2)}(w_{11}^*\hat{z}_1 + w_{21}^*\hat{z}_2, w_{12}^*\hat{z}_1 + w_{22}^*\hat{z}_2),\end{aligned}\tag{95}$$

а начальные моменты $\hat{\alpha}_{n_1 m_1 n_2 m_2}$ и кумулянты $\hat{\kappa}_{n_1 m_1 n_2 m_2}$ через их частные производные:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{n_1 m_1 n_2 m_2} &= \left(\frac{2}{j}\right)^{n_1+m_1+n_2+m_2} \frac{\partial^{n_1+m_1+n_2+m_2} \Phi_{(\hat{z}_1, \hat{z}_2)}(0,0)}{\partial \hat{z}_1^{m_1} \partial \hat{z}_1^{*n_1} \partial \hat{z}_2^{m_2} \partial \hat{z}_2^{*n_2}} = E_{(Z_1, Z_2)} \left[\hat{Z}_1^{n_1} \hat{Z}_1^{*m_1} \hat{Z}_2^{n_2} \hat{Z}_2^{*m_2} \right] \\ \hat{\kappa}_{n_1 m_1 n_2 m_2} &= \left(\frac{2}{j}\right)^{n_1+m_1+n_2+m_2} \frac{\partial^{n_1+m_1+n_2+m_2} \Psi_{(\hat{z}_1, \hat{z}_2)}(0,0)}{\partial \hat{z}_1^{m_1} \partial \hat{z}_1^{*n_1} \partial \hat{z}_2^{m_2} \partial \hat{z}_2^{*n_2}}.\end{aligned}\tag{96}$$

Основным принципом СРС является подбор критерия независимости сигналов. Используя выбранный критерий можно решить задачу подбора оптимальных для него весовых размещивающих коэффициентов. В задаче слепого разделения двух действительных сигналов необходимо выбрать такой критерий, который бы приводил к нахождению единственного решения четырех

размещивающих коэффициентов. Таким образом необходимо наложить четыре ограничения.

Из (82) и (92) следует, что любой смешанный кумулянт $\kappa_{n_1 n_2}$ для независимых случайных величин X и Y равен нулю. Именно это свойство будет использоваться в предложенном алгоритме СРС.

2.2 Формулировка критерия разделения сигналов

Воспользовавшись вероятностным аппаратом для КСВ в качестве критерия разделения выходных сигналов были взяты комплексные аналоги кумулянтов для случая действительных сигналов:

$$\begin{cases} \hat{\kappa}_{1100} = 1 \\ \hat{\kappa}_{0011} = 1 \\ \hat{\kappa}_{1001} = 0 \\ \hat{\kappa}_{2002} = 0 \end{cases} \quad (97)$$

где $\hat{\kappa}_{1100}$, $\hat{\kappa}_{0011}$, $\hat{\kappa}_{1001}$ и $\hat{\kappa}_{2002}$ – кумулянты выходных сигналов соответствующих порядков. Также при решении системы уравнений (97) будет предполагаться, что существует только единственное нетривиальное решение с учетом перестановок и фазового коэффициента.

Величины $\kappa_{1100} = D_1$, $\kappa_{0011} = D_2$, $\hat{\kappa}_{1100} = \hat{D}_1$ и $\hat{\kappa}_{0011} = \hat{D}_2$ представляют собой дисперсии соответствующих СВ. Эти кумулянты действительны и неотрицательны, причем дисперсия сигнала равна нулю тогда и только тогда, когда случайная величина является детерминированной величиной, равной нулю. Также кумулянты $\kappa_{1001} = R$ и $\hat{\kappa}_{1001} = \hat{R}$ представляют собой ковариации входных и выходных КСВ. Из неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$\begin{aligned} RR^* &\leq D_1 D_2 \\ \hat{R}\hat{R}^* &\leq \hat{D}_1 \hat{D}_2. \end{aligned} \quad (98)$$

Также дополнительно полезно ввести дополнительную величину коэффициента ковариации:

$$\begin{aligned} r &= \frac{R}{\sqrt{D_1 D_2}} \\ \hat{r} &= \frac{\hat{R}}{\sqrt{\hat{D}_1 \hat{D}_2}}. \end{aligned} \quad (99)$$

Первые два условия накладывают ограничения на дисперсию сигналов, тем самым, исключая тривиальное нулевое решение. Условие $\hat{\kappa}_{1001} = 0$ обеспечивает некоррелированность выходных сигналов. Для дополнительного ограничения степени свободы коэффициентов размещающей матрицы накладывается дополнительное условие $\hat{\kappa}_{2002} = 0$ с использованием кумулянта четвертого порядка.

Воспользовавшись преобразованием $\Psi_{(\hat{z}_1, \hat{z}_2)}(\hat{z}_1, \hat{z}_2)$ в $\Psi_{(z_1, z_2)}(z_1, z_2)$ (95), выражением кумулянтов через частные производные (96) и правилами дифференцирования сложных функций [65,66] можно получить следующие выражения для \hat{D}_1 , \hat{D}_2 , \hat{R} через D_1 , D_2 , R соответственно:

$$\begin{cases} \hat{D}_1(w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}) = w_{11} w_{11}^* D_1 + w_{11} w_{12}^* R + w_{12} w_{11}^* R^* + w_{12} w_{12}^* D_2 = 1 \\ \hat{D}_2(w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}) = w_{21} w_{21}^* D_1 + w_{21} w_{22}^* R + w_{22} w_{21}^* R^* + w_{22} w_{22}^* D_2 = 1 \\ \hat{R}(w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}) = w_{11} w_{21}^* D_1 + w_{11} w_{22}^* R + w_{12} w_{21}^* R^* + w_{12} w_{22}^* D_2 = 0 \\ \hat{\kappa}_{2002}(w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}) = w_{11}^2 w_{21}^{*2} \kappa_{2200} + 2w_{11}^2 w_{21}^* w_{22}^* \kappa_{2101} + w_{11}^2 w_{22}^{*2} \kappa_{2002} + \\ + 2w_{11} w_{12} w_{21}^{*2} \kappa_{1210} + 4w_{11} w_{12} w_{21}^* w_{22}^* \kappa_{1111} + 2w_{11} w_{12} w_{22}^{*2} \kappa_{1012} + \\ + w_{12}^2 w_{21}^{*2} \kappa_{0220} + 2w_{12}^2 w_{21}^* w_{22}^* \kappa_{0121} + w_{12}^2 w_{22}^{*2} \kappa_{0022} = 0 \end{cases} \quad (100)$$

Система уравнений (100) относительно неизвестных параметров размещающей матрицы w_{11} , w_{12} , w_{21} и w_{22} , является критерием разделения входных сигналов по их кумулянтам второго и четвертого порядков.

Решение системы уравнений (100) можно разбить на несколько этапов:

1. Найти общее решение уравнений $\hat{D}_1(w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}) = 1$ и $\hat{D}_2(w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}) = 1$.
2. Уменьшить количество степеней свободы решения, полученного на этапе 1, решив уравнение $\hat{R}(w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}) = 0$.

3. Подставить решение, полученное на этапе 2 в уравнение $\hat{\kappa}_{2002}(w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}) = 0$ и решить его.

2.3 Общее решение задачи декорреляции двух комплексных случайных сигналов

Прежде всего можно отметить, что величина $\hat{D}_1(w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22})$ зависит от неизвестных w_{11} и w_{12} , а величина $\hat{D}_2(w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22})$ зависит от w_{21} и w_{22} , а также вид выражений одинаков с точностью до подстановки переменных величин. Таким образом можно рассмотреть решение одного уравнения

$$f(w_1, w_2) = w_1 w_1^* D_1 + w_1 w_2^* R + w_2 w_1^* R^* + w_2 w_2^* D_2 = 1, \quad (101)$$

а дисперсии выходных сигналов можно представить как:

$$\begin{aligned} \hat{D}_1(w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}) &= f(w_{11}, w_{12}) \\ \hat{D}_2(w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}) &= f(w_{21}, w_{22}). \end{aligned} \quad (102)$$

Уравнение (101) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} w_1 w_1^* D_1 + w_1 w_2^* R + w_2 w_1^* R^* + w_2 w_2^* D_2 &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow w_1 w_1^* D_1 + w_1 w_2^* R + w_2 w_1^* R^* + w_2 w_2^* D_2 &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow w_1 w_1^* D_1 + w_1 w_2^* r \sqrt{D_1 D_2} + w_2 w_1^* r^* \sqrt{D_1 D_2} + w_2 w_2^* D_2 &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow (w_2 \sqrt{D_2} + w_1 r \sqrt{D_1})(w_2^* \sqrt{D_2} + w_1^* r^* \sqrt{D_1}) + w_1 w_1^* D_1 - w_1 w_1^* r r^* D_1 &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow (w_2 \sqrt{D_2} + w_1 r \sqrt{D_1})(w_2^* \sqrt{D_2} + w_1^* r^* \sqrt{D_1}) &= 1 - w_1 w_1^* D_1 (1 - r r^*). \end{aligned} \quad (103)$$

Поскольку $(w_2 \sqrt{D_2} + w_1 r \sqrt{D_1})(w_2^* \sqrt{D_2} + w_1^* r^* \sqrt{D_1})$ является действительным неотрицательным числом, то тогда возникает ограничение на правую часть последнего равенства (103):

$$1 - w_1 w_1^* D_1 (1 - r r^*) \geq 0 \Rightarrow w_1 w_1^* \leq \frac{1}{D_1} \frac{1}{1 - r r^*}. \quad (104)$$

Исходя из (104) и (103) w_1 и w_2 можно выразить через дополнительные неизвестные θ , φ и Δ :

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta e^{j\varphi} \\ w_2 &= \frac{1}{\sqrt{D_2}} \left[-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta + \sin \theta e^{j\Delta} \right] e^{j\varphi}. \end{aligned} \quad (105)$$

Таким образом решив уравнения $\hat{D}_1=1$ и $\hat{D}_2=1$ можно получить следующие выражения для w_{11} , w_{12} , w_{21} и w_{22} :

$$\begin{aligned} w_{11} &= \frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta e^{j\varphi_1} \\ w_{12} &= \frac{1}{\sqrt{D_2}} \left[-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta + \sin \theta e^{j\Delta} \right] e^{j\varphi_1} \\ w_{21} &= \frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta_2 e^{j\varphi_2} \\ w_{22} &= \frac{1}{\sqrt{D_2}} \left[-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta_2 - \sin \theta_2 e^{j\Delta_2} \right] e^{j\varphi_2}. \end{aligned} \quad (106)$$

Для того, чтобы уменьшить количество переменных в выражениях (106) необходимо подставить их в уравнение $\hat{R}(w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}) = 0$:

$$\begin{aligned} &w_{11}w_{21}^*D_1 + w_{11}w_{22}^*R + w_{12}w_{21}^*R^* + w_{12}w_{22}^*D_2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta e^{j\varphi_1} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta_2 e^{j\varphi_2} \right]^* D_1 + \\ &+ \left[\frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta e^{j\varphi_1} \right] \frac{1}{\sqrt{D_2}} \left[-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta_2 e^{j\Delta_{21}} + \sin \theta_2 e^{j\Delta_{22}} \right]^* e^{-j\varphi_2} r \sqrt{D_1 D_2} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{D_2}} \left[-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta + \sin \theta e^{j\Delta} \right] e^{j\varphi_1} \left[\frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta_2 e^{j\varphi_2} \right]^* r^* \sqrt{D_1 D_2} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{D_2}} \left[-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta + \sin \theta e^{j\Delta} \right] e^{j\varphi_1} \frac{1}{\sqrt{D_2}} \left[-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta_2 e^{j\Delta_{21}} + \sin \theta_2 e^{j\Delta_{22}} \right]^* e^{-j\varphi_2} D_2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos \theta \cos \theta_2 e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \frac{1}{1-rr^*} [1-rr^* - rr^* + rr^*] + \cos \theta \sin \theta_2 e^{j(\varphi_1 - \varphi_2 - \Delta_2)} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} [r-r] + \\ &+ \sin \theta \cos \theta_2 e^{j(\varphi_1 + \Delta - \varphi_2)} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} [r^* - r^*] + \sin \theta \sin \theta_2 e^{j(\varphi_1 + \Delta - \varphi_2 - \Delta_2)} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos \theta \cos \theta_2 e^{j\Delta_2} + \sin \theta \sin \theta_2 e^{j\Delta} = 0. \end{aligned} \quad (107)$$

Из (107) следует, что $e^{j\Delta_2} = \pm e^{j\Delta} = e^{j(\Delta+\pi n)}$, где n – произвольное целое число.

Тогда

$$\begin{aligned} \cos \theta \cos \theta_2 e^{j\Delta_2} + \sin \theta \sin \theta_2 e^{j\Delta} = 0 &\Rightarrow (-1)^n \cos \theta \cos \theta_2 + \sin \theta \sin \theta_2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos \left(\theta_2 - (-1)^n \theta \right) = 0 &\Rightarrow \theta_2 - (-1)^n \theta = \frac{\pi}{2} + \pi m \Rightarrow \theta_2 = (-1)^n \theta + \frac{\pi}{2} + \pi m, \end{aligned} \quad (108)$$

где m – произвольное целое число. Тогда $\sin \theta_2$ и $\cos \theta_2$ можно представить как

$$\begin{aligned} \sin \theta_2 &= \sin \left((-1)^n \theta + \frac{\pi}{2} + \pi m \right) = (-1)^m \sin \left((-1)^n \theta + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= (-1)^m \cos \left((-1)^n \theta \right) = (-1)^m \cos \theta \\ \cos \theta_2 &= \cos \left((-1)^n \theta + \frac{\pi}{2} + \pi m \right) = (-1)^m \cos \left((-1)^n \theta + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= -(-1)^m \sin \left((-1)^n \theta \right) = -(-1)^{m+n} \sin \theta, \end{aligned} \quad (109)$$

а w_{11} , w_{12} , w_{21} и w_{22} выражаются через θ , Δ , φ_1 и φ_2 следующим образом:

$$\begin{aligned} w_{11} &= \frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta e^{j\varphi_1} \\ w_{12} &= \frac{1}{\sqrt{D_2}} \left[-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta + \sin \theta e^{j\Delta} \right] e^{j\varphi_1} \\ w_{21} &= -\frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \sin \theta (-1)^{m+n} e^{j\varphi_2} \\ w_{22} &= \frac{1}{\sqrt{D_2}} \left[\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} (-1)^{m+n} \sin \theta + (-1)^m \cos \theta e^{j\Delta} (-1)^n \right] e^{j\varphi_2}. \end{aligned} \quad (110)$$

Без потери общности решения можно произвести замену переменной $\varphi_2 + \pi(n+m+1) \rightarrow \varphi_2$ и получить итоговое решение задачи декорреляции входных сигналов:

$$\begin{aligned} w_{11} &= \frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta e^{j\varphi_1} \\ w_{12} &= \frac{1}{\sqrt{D_2}} \left[-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta + \sin \theta e^{j\Delta} \right] e^{j\varphi_1} \\ w_{21} &= \frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \sin \theta e^{j\varphi_2} \\ w_{22} &= \frac{1}{\sqrt{D_2}} \left[-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \sin \theta - \cos \theta e^{j\Delta} \right] e^{j\varphi_2}. \end{aligned} \quad (111)$$

2.4 Решение задачи приведения смешанного кумулянта четвертого порядка двух комплексных случайных сигналов к нулю

После подстановки (111) в условие $\hat{\kappa}_{2002}(w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}) = 0$ можно получить следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
& \hat{\kappa}_{2002}(w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}) = 0 \Rightarrow w_{11}^2 w_{21}^{*2} \kappa_{2200} + 2w_{11}^2 w_{21}^* w_{22}^* \kappa_{2101} + w_{11}^2 w_{22}^{*2} \kappa_{2002} + \\
& + 2w_{11} w_{12} w_{21}^{*2} \kappa_{1210} + 4w_{11} w_{12} w_{21}^* w_{22}^* \kappa_{1111} + 2w_{11} w_{12} w_{22}^{*2} \kappa_{1012} + \\
& + w_{12}^2 w_{21}^{*2} \kappa_{0220} + 2w_{12}^2 w_{21}^* w_{22}^* \kappa_{0121} + w_{12}^2 w_{22}^{*2} \kappa_{0022} = 0 \Rightarrow
\end{aligned} \tag{112}$$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \kappa_{2200} \left[\frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta e^{j\varphi_1} \right]^2 \left[\frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \sin \theta e^{j\varphi_2} \right]^{*2} + \\
& + 2\kappa_{2101} \left[\frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta e^{j\varphi_1} \right]^2 \left[\frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \sin \theta e^{j\varphi_2} \right]^* \left[\frac{1}{\sqrt{D_2}} \left(-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \sin \theta - \cos \theta e^{j\Delta} \right) e^{j\varphi_2} \right]^* + \\
& + \kappa_{2002} \left[\frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta e^{j\varphi_1} \right]^2 \left[\frac{1}{\sqrt{D_2}} \left(-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \sin \theta - \cos \theta e^{j\Delta} \right) e^{j\varphi_2} \right]^{*2} + \\
& + 2\kappa_{1210} \left[\frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta e^{j\varphi_1} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{D_2}} \left(-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta + \sin \theta e^{j\Delta} \right) e^{j\varphi_1} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \sin \theta e^{j\varphi_2} \right]^{*2} + \\
& + 4\kappa_{1111} \left[\frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta e^{j\varphi_1} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{D_2}} \left(-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta + \sin \theta e^{j\Delta} \right) e^{j\varphi_1} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \sin \theta e^{j\varphi_2} \right]^* \cdot \\
& \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{D_2}} \left(-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \sin \theta - \cos \theta e^{j\Delta} \right) e^{j\varphi_2} \right]^* + \\
& + 2\kappa_{1012} \left[\frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta e^{j\varphi_1} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{D_2}} \left(-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta + \sin \theta e^{j\Delta} \right) e^{j\varphi_1} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{D_2}} \left(-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \sin \theta - \cos \theta e^{j\Delta} \right) e^{j\varphi_2} \right]^{*2} + \\
& + \kappa_{0220} \left[\frac{1}{\sqrt{D_2}} \left(-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta + \sin \theta e^{j\Delta} \right) e^{j\varphi_1} \right]^2 \left[\frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \sin \theta e^{j\varphi_2} \right]^{*2} + \\
& + 2\kappa_{0121} \left[\frac{1}{\sqrt{D_2}} \left(-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta + \sin \theta e^{j\Delta} \right) e^{j\varphi_1} \right]^2 \left[\frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \sin \theta e^{j\varphi_2} \right]^* \left[\frac{1}{\sqrt{D_2}} \left(-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \sin \theta - \cos \theta e^{j\Delta} \right) e^{j\varphi_2} \right]^* + \\
& + \kappa_{0022} \left[\frac{1}{\sqrt{D_2}} \left(-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \cos \theta + \sin \theta e^{j\Delta} \right) e^{j\varphi_1} \right]^2 \left[\frac{1}{\sqrt{D_2}} \left(-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \sin \theta - \cos \theta e^{j\Delta} \right) e^{j\varphi_2} \right]^{*2} = 0 \Rightarrow
\end{aligned} \tag{113}$$

$$\Rightarrow Aq^4 - 2Bq^3 + Cq^2 + 2B^*q + A^* = 0,$$

где

$$\begin{aligned}
q &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} e^{-j\Delta} \\
\gamma_{n_1 m_1 n_2 m_2} &= \frac{\kappa_{n_1 m_1 n_2 m_2}}{\sqrt{D_1}^{n_1+m_1} \sqrt{D_2}^{n_2+m_2}} \\
A &= (\gamma_{0022} r^2 - 2\gamma_{1012} r + \gamma_{2002}) / (1 - rr^*) \\
B &= \frac{\gamma_{0022} r - \gamma_{1012} + (-\gamma_{0022} r^2 r^* + 2\gamma_{1012} r r^* - 2\gamma_{1111} r - \gamma_{2002} r^* + \gamma_{2101} + r^2 \gamma_{0121}) / (1 - rr^*)}{\sqrt{1 - rr^*}} \\
C &= \gamma_{0022} + \frac{-4\gamma_{0022} r r^* + 4\gamma_{1012} r^* - 4\gamma_{1111} + 4r \gamma_{0121}}{1 - rr^*} + \\
&+ \frac{\gamma_{0022} r^2 r^{*2} - 2\gamma_{1012} r r^{*2} + 4\gamma_{1111} r r^* + \gamma_{2002} r^{*2} - 2\gamma_{2101} r^* + \gamma_{2200} - 2r^2 \gamma_{0121} r^* + r^2 \gamma_{0220} - 2r \gamma_{1210}}{(1 - rr^*)^2}.
\end{aligned} \tag{114}$$

Уравнение (113) представляет собой комплексное полиномиальное уравнение четвертого порядка в антисимметричной форме. Согласно основной теореме алгебры уравнение (113) можно разложить на четыре множителя:

$$Aq^4 - 2Bq^3 + Cq^2 + 2B^*q + A^* = A(q - q_1)(q - q_2)(q - q_3)(q - q_4), \tag{115}$$

где q_1, q_2, q_3, q_4 – корни уравнения (113). Пусть q_i – один из корней q_1, q_2, q_3 или q_4 . Тогда

$$\begin{aligned}
A\left(-\frac{1}{q_i^*}\right)^4 - 2B\left(-\frac{1}{q_i^*}\right)^3 + C\left(-\frac{1}{q_i^*}\right)^2 + 2B^*\left(-\frac{1}{q_i^*}\right) + A^* &= \frac{A}{q_i^{*4}} + \frac{2B}{q_i^{*3}} + \frac{C}{q_i^{*2}} - \frac{2B^*}{q_i^*} + A^* = \\
&= \frac{1}{q_i^{*4}} (A + 2Bq_i^* + Cq_i^{*2} - 2B^*q_i^{*3} + A^*q_i^{*4}) = \frac{1}{q_i^{*4}} (Aq_i^4 - 2Bq_i^3 + Cq_i^2 + 2Bq_i + A^*)^* = \frac{1}{q_i^{*4}} 0^* = 0.
\end{aligned} \tag{116}$$

Таким образом, если q_i – корень уравнения (113), то тогда $\frac{1}{q_i^*}$ тоже является корнем этого уравнения. Тогда два корня можно выразить через остальные: $q_1, \frac{1}{q_1^*}, q_2, \frac{1}{q_2^*}$. С точки зрения весовых коэффициентов замена q на $\frac{1}{q^*}$ эквивалентна одновременной замене весовых коэффициентов w_{11} и w_{12} на w_{21} и w_{22} . Также учитывая, что существует только единственный набор размешивающих весовых коэффициентов без учета перестановок. Поскольку перестановки выходных коэффициентов равносильны замене переменной q на $\frac{1}{q^*}$, то кроме двух корней

других решений уравнения (113) быть не может в случае, если входные случайные величины являются линейными комбинациями независимых КСВ. Тогда равенство (115) можно представить как

$$\begin{aligned} Aq^4 - 2Bq^3 + Cq^2 + 2B^*q + A^* &= A(q - q_1)^2 \left(q + \frac{1}{q_1^*} \right)^2 = \\ &= Aq^4 - 2A \left(q_1 - \frac{1}{q_1^*} \right) q^3 + A \left(q_1^2 - 4 \frac{q_1}{q_1^*} + \frac{1}{q_1^{*2}} \right) q^2 + 2A \frac{q_1^2}{q_1^{*2}} \left(q_1 - \frac{1}{q_1^*} \right) q + A \frac{q_1^2}{q_1^{*2}}. \end{aligned} \quad (117)$$

Соответственно коэффициент B равен

$$B = A \left(q_1 - \frac{1}{q_1^*} \right), \quad (118)$$

а величину $q_1 - \frac{1}{q_1^*}$ можно представить через A и B :

$$\begin{aligned} q_1 - \frac{1}{q_1^*} &= \frac{B}{A} = p \\ q_1 &= \frac{pp^* \pm \sqrt{(pp^*)^2 + 4pp^*}}{2p^*}. \end{aligned} \quad (119)$$

Таким образом если $Aq^4 - 2Bq^3 + Cq^2 + 2B^*q + A^* = 0$, то без потери общности

$$\begin{aligned}
q &= \frac{pp^* + \sqrt{(pp^*)^2 + 4pp^*}}{2p^*} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} e^{-j\Delta} \\
\cos \theta &= \sqrt{\frac{qq^*}{1+qq^*}} \\
\sin \theta &= \frac{1}{\sqrt{1+qq^*}} \\
\cos \theta e^{j\Delta} &= \frac{q^*}{\sqrt{1+qq^*}} \\
\sin \theta e^{j\Delta} &= \sqrt{\frac{qq^*}{1+qq^*}} \frac{1}{q} \\
w_{11} &= \frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \sqrt{\frac{qq^*}{1+qq^*}} e^{j\varphi_1} \\
w_{12} &= \frac{1}{\sqrt{D_2}} \left[-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \sqrt{\frac{qq^*}{1+qq^*}} + \sqrt{\frac{qq^*}{1+qq^*}} \frac{1}{q} \right] e^{j\varphi_1} \\
w_{21} &= \frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \sqrt{\frac{1}{1+qq^*}} e^{j\varphi_2} \\
w_{22} &= \frac{1}{\sqrt{D_2}} \left[-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \sqrt{\frac{1}{1+qq^*}} - \frac{q^*}{\sqrt{1+qq^*}} \right] e^{j\varphi_2}.
\end{aligned} \tag{120}$$

Соответственно значения весовых коэффициентов w_{11} , w_{12} , w_{21} и w_{22}

$$\begin{aligned}
w_{11} &= \frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \sqrt{\frac{qq^*}{1+qq^*}} e^{j\varphi_1} \\
w_{12} &= \frac{1}{\sqrt{D_2}} \left[-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \sqrt{\frac{qq^*}{1+qq^*}} + \sqrt{\frac{qq^*}{1+qq^*}} \frac{1}{q} \right] e^{j\varphi_1} \\
w_{21} &= \frac{1}{\sqrt{D_1}} \frac{1}{\sqrt{1-rr^*}} \sqrt{\frac{1}{1+qq^*}} e^{j\varphi_2} \\
w_{22} &= \frac{1}{\sqrt{D_2}} \left[-\frac{r}{\sqrt{1-rr^*}} \sqrt{\frac{1}{1+qq^*}} - \frac{q^*}{\sqrt{1+qq^*}} \right] e^{j\varphi_2}
\end{aligned} \tag{121}$$

представляет собой решение системы уравнений (100) при условии единственного нетривиального решения без учета перестановок. Также можно отметить, что условия на равенство дисперсий выходных случайных величин единице используется для исключения из рассмотрения тривиального нулевого решения. И если для дальнейшего использования весовых коэффициентов не требуется такое сильное ограничение на дисперсии выходных сигналов, то весовые коэффициенты

(121) можно упростить, сократив пары w_{11} , w_{12} и w_{21} , w_{22} от общих множителей соответственно:

$$\begin{aligned}
 w_{11} &= \frac{1}{\sqrt{D_1}} e^{j\varphi_1} \\
 w_{12} &= \frac{1}{\sqrt{D_2}} \left[-r + \sqrt{1-rr^*} \frac{1}{q} \right] e^{j\varphi_1} \\
 w_{21} &= \frac{1}{\sqrt{D_1}} e^{j\varphi_2} \\
 w_{22} &= \frac{1}{\sqrt{D_2}} \left[-r - \sqrt{1-rr^*} q^* \right] e^{j\varphi_2}.
 \end{aligned} \tag{122}$$

Тем самым полученное решение (122) также представляет собой решение задачи слепого разделения сигналов на основе декорреляции и приведения смешанного кумулянта выходных случайных величин к нулю, но при этом без вычисления значений $\sqrt{\frac{qq^*}{1+qq^*}}$ и $\sqrt{\frac{1}{1+qq^*}}$.

Для оценки используемых в алгоритме кумулянтов необходимо заменить истинные значения $\kappa_{n_1 m_1 n_2 m_2}$ на статистики, вычисленные исходя из полученных значений входных случайных величин. Такую замену можно произвести исходя из представления кумулянтов в виде частных производных кумулянтной функции и начальных моментов через частные производные характеристической функции (90). Начальные моменты $\alpha_{n_1 m_1 n_2 m_2} = E_{(Z_1, Z_2)} [Z_1^{n_1} Z_1^{*m_1} Z_2^{n_2} Z_2^{*m_2}]$ можно заменить оценкой

$$\bar{\alpha}_{n_1 m_1 n_2 m_2} = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} Z_1^{n_1}(l) Z_1^{*m_1}(l) Z_2^{n_2}(l) Z_2^{*m_2}(l), \tag{123}$$

где L – используемая для расчета статистик выборка входных отсчетов; $Z_1(l)$ – l -ый отсчет наблюдаемого сигнала Z_1 ; $Z_2(l)$ – l -ый отсчет наблюдаемого сигнала Z_2 . Тогда оценки $\bar{\kappa}_{n_1 m_1 n_2 m_2}$ используемых кумулянтов в системе уравнений (100) можно представить через оценки начальных моментов $\bar{\alpha}_{n_1 m_1 n_2 m_2}$:

$$\begin{aligned}
\bar{D}_1 &= \bar{k}_{1100} = \bar{\alpha}_{1100} - \bar{\alpha}_{1000} \bar{\alpha}_{0100} \\
\bar{D}_2 &= \bar{k}_{0011} = \bar{\alpha}_{0011} - \bar{\alpha}_{0010} \bar{\alpha}_{0001} \\
\bar{R} &= \bar{k}_{1001} = \bar{\alpha}_{1001} - \bar{\alpha}_{1000} \bar{\alpha}_{0001} \\
\bar{k}_{1111} &= -6\bar{\alpha}_{0001} \bar{\alpha}_{0010} \bar{\alpha}_{0100} \bar{\alpha}_{1000} + 2\bar{\alpha}_{0001} \bar{\alpha}_{0010} \bar{\alpha}_{1100} + 2\bar{\alpha}_{0001} \bar{\alpha}_{0100} \bar{\alpha}_{1010} + 2\bar{\alpha}_{0001} \bar{\alpha}_{0110} \bar{\alpha}_{1000} - \\
&- \bar{\alpha}_{0001} \bar{\alpha}_{1110} + 2\bar{\alpha}_{0010} \bar{\alpha}_{0100} \bar{\alpha}_{1001} + 2\bar{\alpha}_{0010} \bar{\alpha}_{0101} \bar{\alpha}_{1000} - \bar{\alpha}_{0010} \bar{\alpha}_{1101} + 2\bar{\alpha}_{0011} \bar{\alpha}_{0100} \bar{\alpha}_{1000} - \\
&- \bar{\alpha}_{0011} \bar{\alpha}_{1100} - \bar{\alpha}_{0100} \bar{\alpha}_{1011} - \bar{\alpha}_{0101} \bar{\alpha}_{1010} - \bar{\alpha}_{0110} \bar{\alpha}_{1001} - \bar{\alpha}_{0111} \bar{\alpha}_{1000} + \bar{\alpha}_{1111} \\
\bar{k}_{2200} &= -6\bar{\alpha}_{0100}^2 \bar{\alpha}_{1000}^2 + 2\bar{\alpha}_{0100}^2 \bar{\alpha}_{2000} + 8\bar{\alpha}_{0100} \bar{\alpha}_{1000} \bar{\alpha}_{1100} - 2\bar{\alpha}_{0100} \bar{\alpha}_{2100} + \\
&+ 2\bar{\alpha}_{0200} \bar{\alpha}_{1000}^2 - \bar{\alpha}_{0200} \bar{\alpha}_{2000} - 2\bar{\alpha}_{1000} \bar{\alpha}_{1200} - 2\bar{\alpha}_{1100}^2 + \bar{\alpha}_{2200} \\
\bar{k}_{0022} &= -6\bar{\alpha}_{0001}^2 \bar{\alpha}_{0010}^2 + 2\bar{\alpha}_{0001}^2 \bar{\alpha}_{0020} + 8\bar{\alpha}_{0001} \bar{\alpha}_{0010} \bar{\alpha}_{0011} - 2\bar{\alpha}_{0001} \bar{\alpha}_{0021} + \\
&+ 2\bar{\alpha}_{0002} \bar{\alpha}_{0010}^2 - \bar{\alpha}_{0002} \bar{\alpha}_{0020} - 2\bar{\alpha}_{0010} \bar{\alpha}_{0012} - 2\bar{\alpha}_{0011}^2 + \bar{\alpha}_{0022} \\
\bar{k}_{2002} &= \bar{k}_{0220}^* = -6\bar{\alpha}_{0001}^2 \bar{\alpha}_{1000}^2 + 2\bar{\alpha}_{0001}^2 \bar{\alpha}_{2000} + 8\bar{\alpha}_{0001} \bar{\alpha}_{1000} \bar{\alpha}_{1001} - 2\bar{\alpha}_{0001} \bar{\alpha}_{2001} + \\
&+ 2\bar{\alpha}_{0002} \bar{\alpha}_{1000}^2 - \bar{\alpha}_{0002} \bar{\alpha}_{2000} - 2\bar{\alpha}_{1000} \bar{\alpha}_{1002} - 2\bar{\alpha}_{1001}^2 + \bar{\alpha}_{2002} \\
\bar{k}_{2101} &= \bar{k}_{1210}^* = -6\bar{\alpha}_{0001} \bar{\alpha}_{1000}^2 \bar{\alpha}_{0100} + 4\bar{\alpha}_{0001} \bar{\alpha}_{1000} \bar{\alpha}_{1100} + 2\bar{\alpha}_{0001} \bar{\alpha}_{1001} \bar{\alpha}_{0100} + 2\bar{\alpha}_{0001} \bar{\alpha}_{2000} \bar{\alpha}_{0100} - \\
&- \bar{\alpha}_{0001} \bar{\alpha}_{2100} + 2\bar{\alpha}_{1000}^2 \bar{\alpha}_{0101} + 2\bar{\alpha}_{1000} \bar{\alpha}_{1001} \bar{\alpha}_{0100} - 2\bar{\alpha}_{1000} \bar{\alpha}_{1101} - 2\bar{\alpha}_{1001} \bar{\alpha}_{1100} - \bar{\alpha}_{2000} \bar{\alpha}_{0101} - \\
&- \bar{\alpha}_{2001} \bar{\alpha}_{0100} + \bar{\alpha}_{2101} \\
\bar{k}_{1012} &= \bar{k}_{0121}^* = -6\bar{\alpha}_{1000} \bar{\alpha}_{0001}^2 \bar{\alpha}_{0010} + 4\bar{\alpha}_{1000} \bar{\alpha}_{0001} \bar{\alpha}_{0011} + 2\bar{\alpha}_{1000} \bar{\alpha}_{1001} \bar{\alpha}_{0010} + 2\bar{\alpha}_{1000} \bar{\alpha}_{0002} \bar{\alpha}_{0010} - \\
&- \bar{\alpha}_{1000} \bar{\alpha}_{0012} + 2\bar{\alpha}_{0001}^2 \bar{\alpha}_{1010} + 2\bar{\alpha}_{0001} \bar{\alpha}_{1001} \bar{\alpha}_{0010} - 2\bar{\alpha}_{0001} \bar{\alpha}_{1011} - 2\bar{\alpha}_{1001} \bar{\alpha}_{0011} - \bar{\alpha}_{0002} \bar{\alpha}_{1010} - \\
&- \bar{\alpha}_{1002} \bar{\alpha}_{0010} + \bar{\alpha}_{1012}
\end{aligned} \tag{124}$$

$$\bar{r} = \frac{\bar{R}}{\sqrt{\bar{D}_1 \bar{D}_2}}$$

$$\bar{y}_{n_1 m_1 n_2 m_2} = \frac{\bar{k}_{n_1 m_1 n_2 m_2}}{\sqrt{\bar{D}_1}^{n_1 + m_1} \sqrt{\bar{D}_2}^{n_2 + m_2}}.$$

Итоговый алгоритм разделения двух комплексных сигналов состоит из следующих этапов:

1. По входным отсчетам $Z_1(l)$ и $Z_2(l)$ вычислить оценки начальных моментов (123) кумулянтов (124).

2. Вычислить коэффициенты A и B согласно (114).

3. Вычислить $p = \frac{B}{A}$ и $q = \frac{pp^* + \sqrt{(pp^*)^2 + 4pp^*}}{2p^*}$.

4. Вычислить коэффициенты размешивающей матрицы w_{11} , w_{12} , w_{21} и w_{22} согласно (121).

2.5 Выводы по разделу

В разделе 2 был разработан алгоритм слепого разделения двух комплексных сигналов. Исследование статистических свойств КСВ основано на комплексных статистических функциях. Такое представление позволяет упростить анализ исследуемых сигналов и вид получаемых выражений. Критерий независимости выходных КСВ алгоритма слепого разделения сигналов был сформулирован в виде системы уравнений от весовых коэффициентов. Система уравнений состоит из двух уравнений приведения дисперсий выходных КСВ к единице, чтобы не получить тривиальное нулевое решение. Уравнения приведения ковариации и кумулянта четвертого порядка к нулю являются упрощенным аналогом критерия независимости сигналов. Решением уравнений второго порядка является множество весовых коэффициентов, выраженных через дисперсии и ковариацию входных сигналов, а также через 4 неизвестные переменные, определяющие фазу и амплитудное соотношение величин. Решение является полным и аналитическим. При подстановке решения задачи декорреляции в уравнение четвертого порядка было получено аналитическое решение задачи слепого разделения двух комплексных сигналов. Решение зависит от кумулянтов второго и четвертого порядков. Поскольку у КСВ с нормальным распределением все кумулянты высших порядков равны нулю, то ограничением предложенного алгоритма является невозможность разделения КСВ с нормальным распределением.

3 Оценка эффективности алгоритма разделения цифровых сигналов

3.1 Критерии эффективности разделения сигналов.

Для оценки работы предложенного алгоритма СРС было проведено программное моделирование на базе следующей модели. В качестве полезного сигнала был сгенерирован 1000000 случайных бит $\{b_n\}_{n=0}^{999999}$, $b_n \in \{0,1\}$, преобразованный в ЧМ-2 сигнал:

$$s_n(m) = A \cos\left(\frac{2\pi}{M} m(k + b_n) + \varphi\right) \quad (125)$$

$$m = 0 \dots M - 1,$$

где A – амплитуда модулированного сигнала; M – число отсчетов на один бит; $k + b_n$ – число периодов модулированного сигнала на один бит, φ – фаза модулированного сигнала. В эксперименте были использованы следующие параметры: $A = 1$, $M = 4$, $k = 1$, $\varphi = 0$.

Поскольку алгоритм СРС не может извлечь информацию о приходящей фазе сигнала, то для демодуляции и декодирования модулированного сигнала используется алгоритм корреляционного некогерентного детектирования ЧМ-2 сигналов. Для цифровых сигналов решение о принятом бите по принятому сигналу $s(m)$ осуществляется посредством сравнения двух статистик z_0 и z_1 :

$$z_0 = \left(\sum_{m=0}^{M-1} \operatorname{Re}\{s(m)\} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{M} k\right) \right)^2 + \left(\sum_{m=0}^{M-1} \operatorname{Re}\{s(m)\} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{M} k\right) \right)^2$$

$$z_1 = \left(\sum_{m=0}^{M-1} \operatorname{Re}\{s(m)\} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{M} (k+1)\right) \right)^2 + \left(\sum_{m=0}^{M-1} \operatorname{Re}\{s(m)\} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{M} (k+1)\right) \right)^2. \quad (126)$$

Если $z_0 < z_1$, то принимается решение о принятии бита 0, иначе принимается решение о принятии бита 1.

В качестве помехи и собственных шумов в моделировании использовались независимые последовательности нормально распределенных и независимых комплексных случайных величин с математический ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной единице.

Модель смешивание полезного сигнала, помехи и собственных шумов выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1(n) &= a_{11}s(n) + a_{12}u(n) + a_{1N}N_1(n) \\ x_2(n) &= a_{21}s(n) + a_{22}u(n) + a_{2N}N_2(n), \end{aligned} \quad (127)$$

где $x_1(n)$ и $x_2(n)$ – наблюдаемые смешанные сигналы; $s(n)$ – полезный ЧМ-2 сигнал; $u(n)$ – помеха; $N_1(n)$ и $N_2(n)$ – собственные шумы наблюдаемых сигналов.

Смешивающие коэффициенты определены следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 \\ a_{12} &= 10^{\frac{-SIR_1}{20}} e^{j\alpha_1} \\ a_{13} &= 10^{\frac{-SNR_1}{20}} \\ a_{21} &= 1 \\ a_{22} &= 10^{\frac{-SIR_2}{20}} e^{j\alpha_2} \\ a_{23} &= 10^{\frac{-SNR_2}{20}}, \end{aligned} \quad (128)$$

где SIR_1 – ОСП для первого наблюдаемого сигнала в дБ; α_1 – разность фаз между помехой и полезным сигналов для первого наблюдаемого сигнала; SNR_1 – ОСВШ для первого наблюдаемого сигнала в дБ; SIR_2 – ОСП для второго наблюдаемого сигнала в дБ; α_2 – разность фаз между помехой и полезным сигналов для второго наблюдаемого сигнала; SNR_2 – ОСВШ для второго наблюдаемого сигнала в дБ.

Результатом работы алгоритма СРС являются коэффициенты размешивающей матрицы w_{11} , w_{12} , w_{21} и w_{22} . При их применении к наблюдаемым сигналам $x_1(n)$ и $x_2(n)$ рассчитываются выходные сигналы $y_1(n)$ и $y_2(n)$:

$$\begin{aligned} y_1(n) &= w_{11}x_1(n) + w_{12}x_2(n) \\ y_2(n) &= w_{21}x_1(n) + w_{22}x_2(n). \end{aligned} \quad (129)$$

Оценка эффективности работы алгоритма СРС основана на сравнении количества ошибочно принятых бит информации полезного сигнала до и после работы алгоритма СРС. Для оценки приема полезного сигнала до СРС рассчитываются отношение ошибочно детектированных бит к их общему числу при использовании сигналов $x_1(n)$ и $x_2(n)$. После чего в качестве итогового значения критерия приема выбирается минимальное значение частоты битовых ошибок.

Критерий приема сигналов после СРС осуществляется аналогично, но для расчета частоты битовых ошибок используются сигналы $y_1(n)$ и $y_2(n)$.

Также предложенный алгоритм слепого разделения сигналов сравнивается с алгоритмом FastICA для комплексных сигналов [46, 85]. FastICA является одним из самых популярных алгоритмов слепого разделения сигналов, применяемым в различных областях цифровой обработки [128]. Помимо классического алгоритма было разработано множество вариаций FastICA для решения более узких задач. Поэтому представляется уместным сравнение предложенного алгоритма именно с алгоритмом FastICA. FastICA в качестве критерия независимости использует максимизацию меры негауссовости выходных сигналов. Оптимизация критерия осуществляется посредством метода простой итерации.

3.2 Сравнение алгоритма разделения цифровых сигналов с существующими методами

3.2.1 Оценка границ вырожденного смешивания сигналов

Для алгоритма СРС важно, чтобы наблюдаемые сигналы представляли собой линейно независимые комбинации исходных сигналов. В случае, когда данное условие не соблюдается, алгоритму на вход подаются два одинаковых с точностью

до константы наблюдаемых сигнала, что приводит к резкому ухудшению эффективности его работы и увеличению частоты битовых ошибок. В данном эксперименте проводится оценка допустимых значений SIR_2 при $SIR_1 = 0$ дБ. Значения SIR_2 варьируются в диапазоне от -1 до 1 дБ. Значения SNR_1 и SNR_2 равны 100 дБ, таким образом их влияние на результаты работы алгоритма СРС ничтожно. Результаты эксперимента представлены на рисунке 4. Из полученных данных можно сделать вывод, что для предложенного алгоритма СРС допустимое отношение мощностей полезного сигнала и помехи должно составлять более 1 дБ. При меньших отношениях наблюдается рост частоты битовых ошибок сигналов на выходе алгоритма СРС.

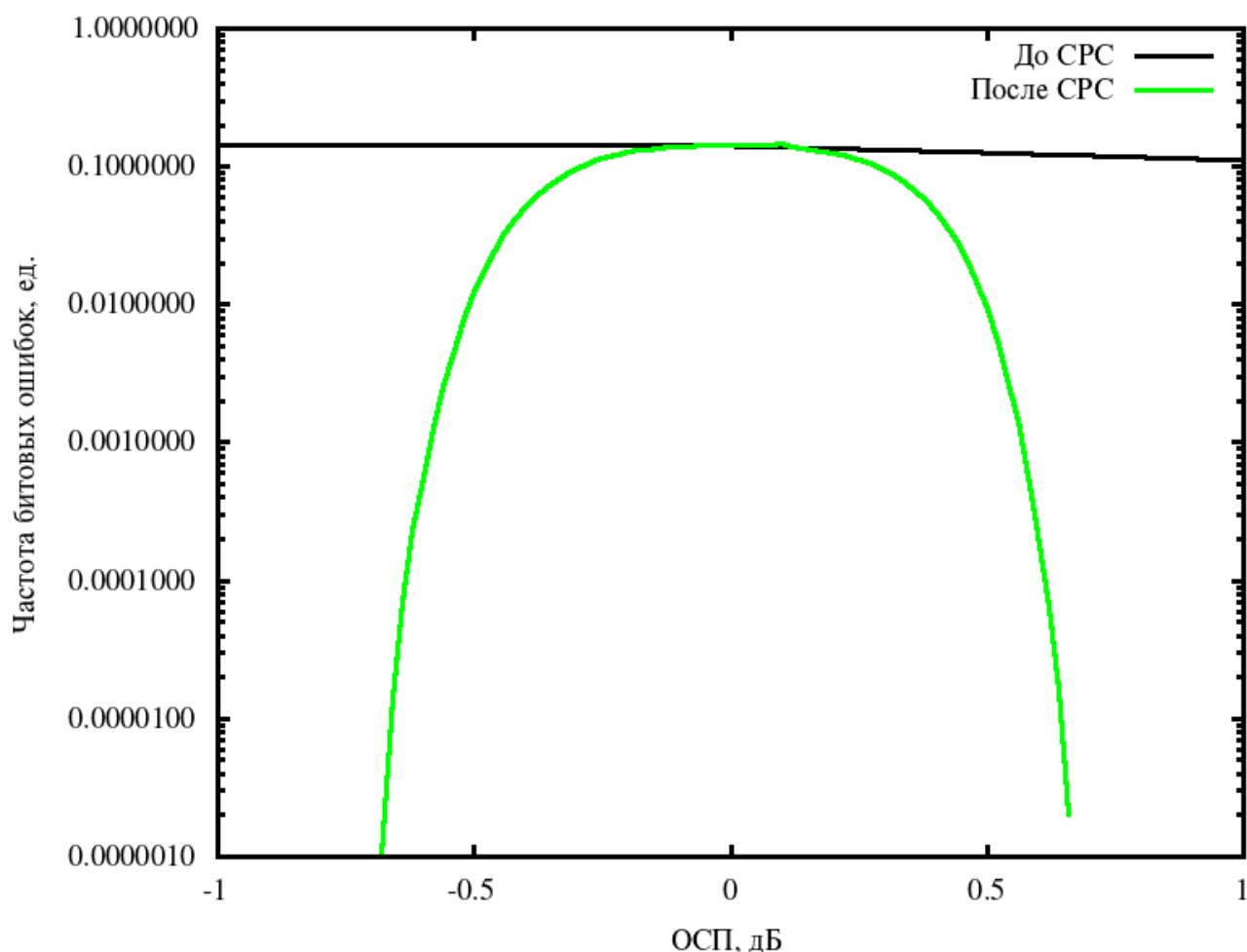


Рисунок 4 – График зависимости частоты битовых ошибок от ОСП для второго наблюдаемого сигнала при фиксированном ОСП для первого наблюдаемого сигнала

3.2.2 Оценка оптимального размера выборки расчета статистик

Предложенный алгоритм СРС зависит от размера выборки L , используемой для расчета необходимых статистик. Чем больше L , тем меньше дисперсия статистик, но тем выше вычислительная сложность алгоритма. В данном эксперименте оценивается нижняя граница размера выборки расчета статистик, не приводящей к резкому повышению частоты битовых ошибок вследствие большой дисперсии вычисляемых статистик. Значения SIR_1 , SIR_2 , SNR_1 и SNR_2 равны 0, 5, 100 и 100 дБ соответственно. На рисунке 5 представлена зависимость частоты битовых ошибок от размера используемой для расчета статистик выборки в диапазоне от 10 до 100000 отсчетов. По полученным данным можно сделать вывод, что достаточный размер выборки составляет 10 тысяч отсчетов. При меньших значениях размера выборки наблюдаются резкий случайный рост частоты битовых ошибок.

Также можно сделать вывод, что после алгоритма FastICA во всем наблюдаемом интервале размера выборки детектирование полезного сигнала осуществляется с большей частотой битовых ошибок, чем после предложенного алгоритма. Для оценки относительного выигрыша в размере выборки предложенного алгоритма от алгоритма FastICA был построен сравнительный график на рисунке 6. Из графика можно сделать вывод, что при варьировании частоты битовых ошибок от 0,00001 до 0,01 относительный выигрыш в размере выборки составляет не менее 3 раз.

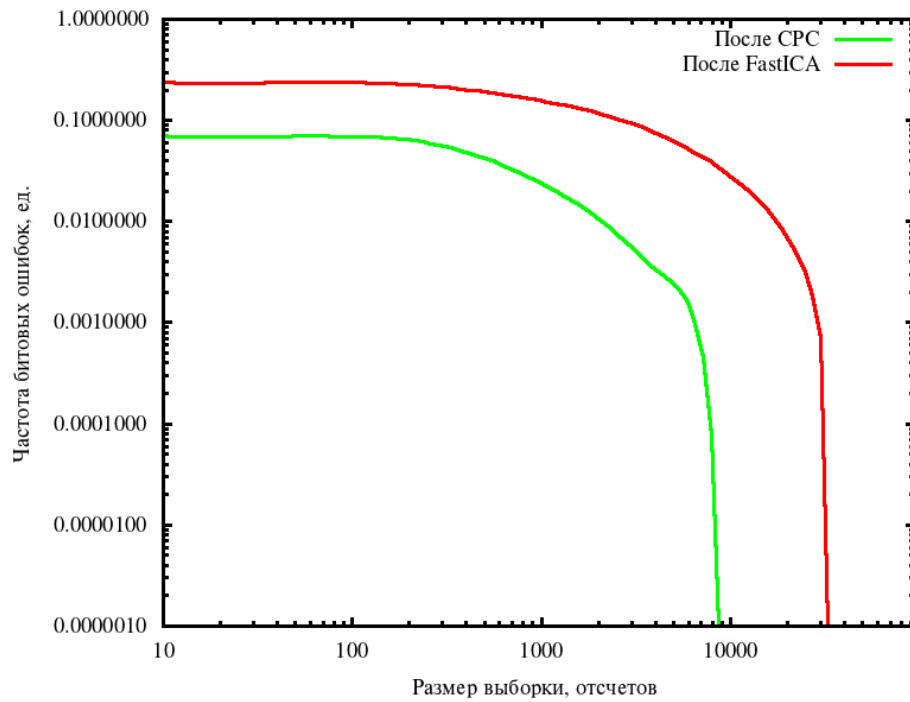


Рисунок 5 – График зависимости частоты битовых ошибок выходных сигналов после CPC от размера выборки, используемой при подсчете статистик

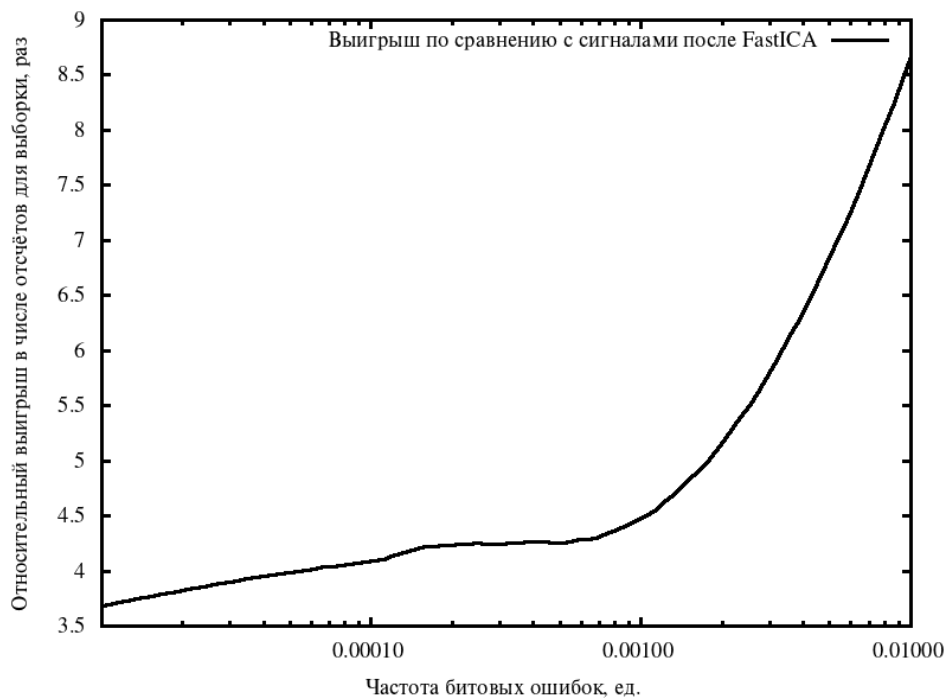


Рисунок 6 – График зависимости относительного выигрыша в размере выборки для расчета статистик между предложенным алгоритмом и алгоритмом FastICA от частоты битовых ошибок.

3.2.3 Оценка работы алгоритма СРС в присутствии собственных шумов

Предложенный алгоритм СРС использует предположение, что входные сигналы представляют собой линейные комбинации двух независимых сигналов. Однако практически всегда помимо полезного сигнала и помехи принимаемые сигналы содержат аддитивный шум, независимый в каждом канале. Чем выше мощность шумов, тем менее эффективно СРС. В данном эксперименте оценивается минимальное значение ОСВШ, при котором осуществляется разделение сигналов.

Для этого рассчитываются значения частоты битовых ошибок до и после СРС в зависимости от ОСВШ при фиксированных значениях ОСП. При проведении данного моделирования SIR_1 и SIR_2 равны 0 и 5 дБ соответственно, а SNR_1 и SNR_2 равны между собой и варьируются от -100 до 100 дБ. Размер выборки отсчетов для расчета статистик равен 1000000. На рисунке 7 представлен график зависимости частоты битовых ошибок до и после СРС при различных значениях ОСВШ. По результатам моделирования можно сделать вывод, что эффективное СРС возможно при ОСВШ выше 24 дБ, а при ОСВШ менее 16 дБ частота битовых ошибок после СРС не отличается от случая до СРС. Также можно отметить, что в сравнении с алгоритмом FastICA предложенный алгоритм не уступает в эффективности разделения сигналов на всем наблюдаемом интервале ОСВШ.

3.2.4 Оценка выигрыша в ОСП при различных значениях ОСВШ

Помимо оценки эффективности разделения сигналов от ОСВШ при фиксированном ОСП естественно оценить, при каких ОСП осуществляется

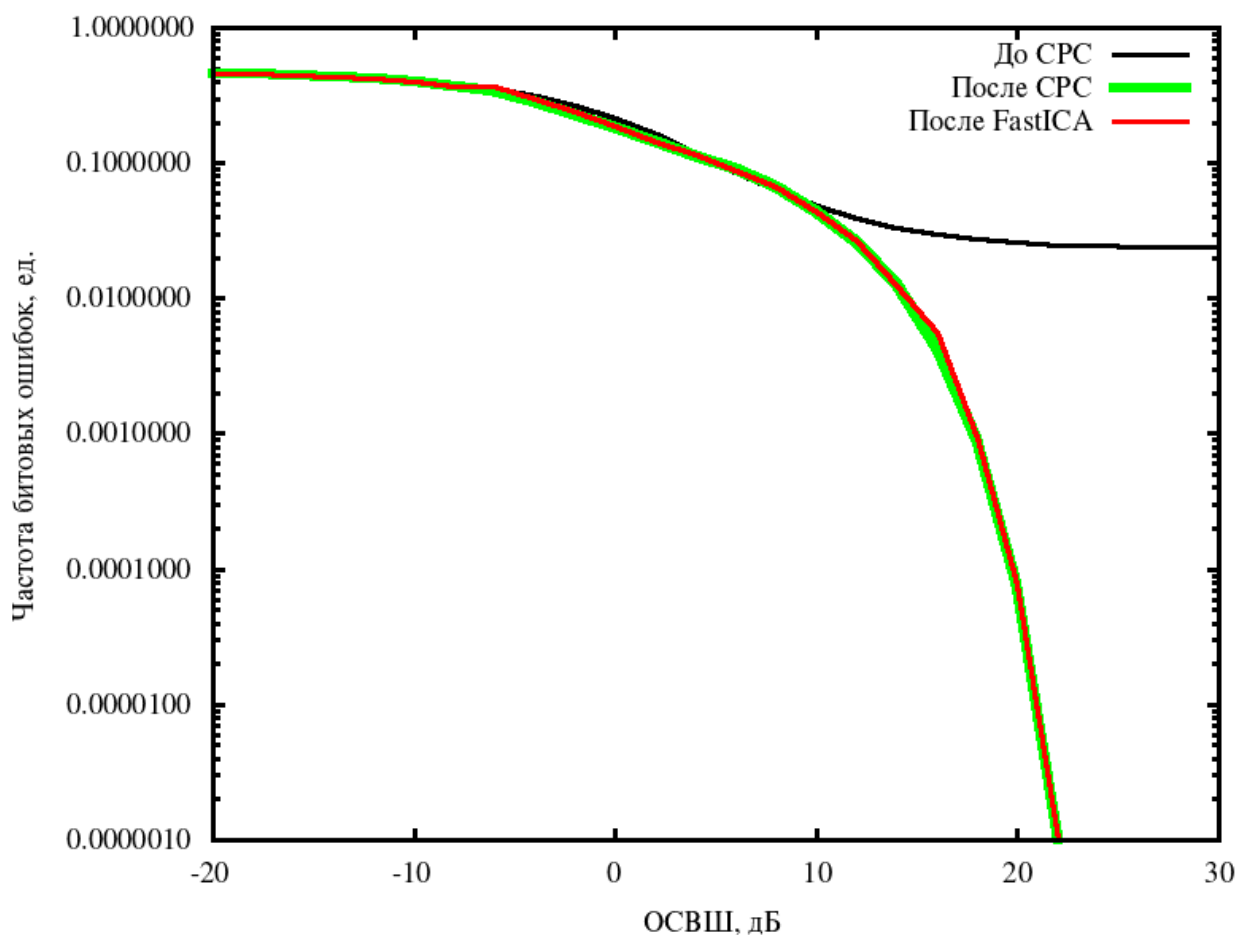


Рисунок 7 – График зависимости частоты битовых ошибок до и после СРС от отношения сигнал/шум при фиксированных значениях ОСП

детектирование с равной частотой битовых ошибок у сигналов до СРС, сигналов после предложенного алгоритма СРС и алгоритма FastICA.

Для этого было проведено следующее моделирование: для нескольких значений ОСВШ (от 20 до 40 дБ с шагом в 10 дБ) определялось значение частоты битовых ошибок при различных ОСП сигналов (от -100 до 20 дБ с шагом в 2 дБ), а затем по полученным данным рассчитывался выигрыш в ОСП при одинаковых значениях частоты битовых ошибок детектирования сигналов после предложенного алгоритма по сравнению с сигналами до СРС. На рисунках 8-13 представлены графики зависимостей частоты битовых ошибок детектирования полезного сигнала от ОСП при различных значениях ОСВШ, а также графики зависимостей выигрыша в ОСП предложенного алгоритма СРС от частоты битовых ошибок.

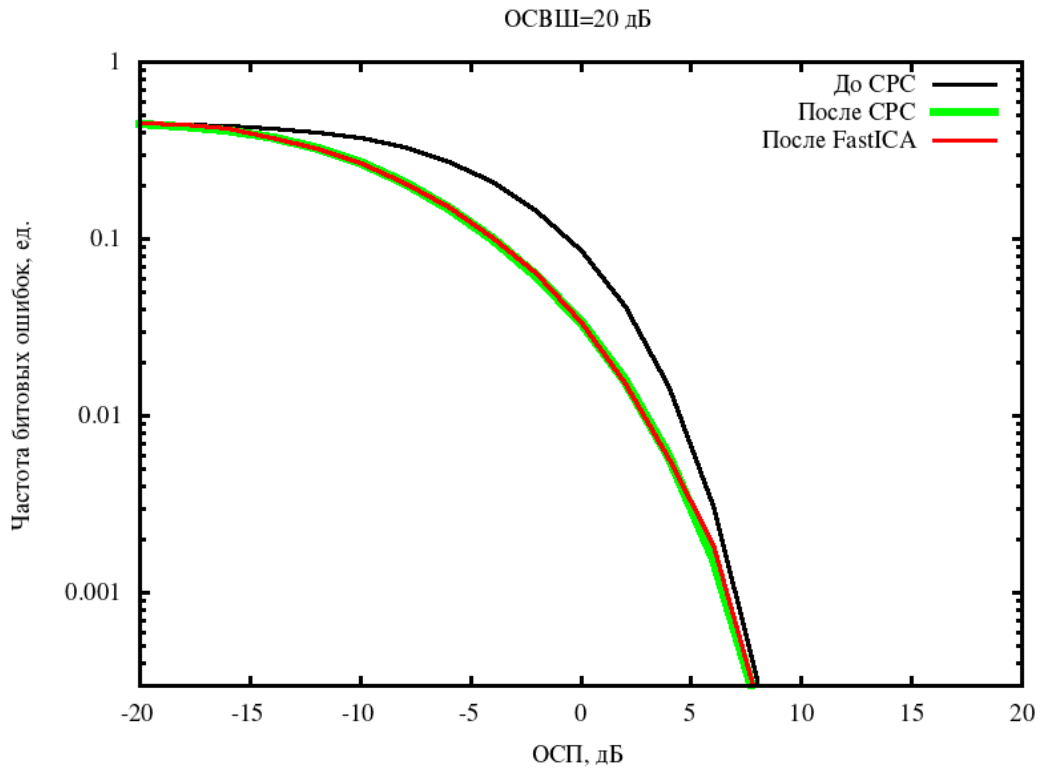


Рисунок 8 – График зависимости частоты битовых ошибок от ОСП для сигналов до СРС, после предложенного алгоритма СРС и алгоритма FastICA при ОСВШ, равном 20 дБ

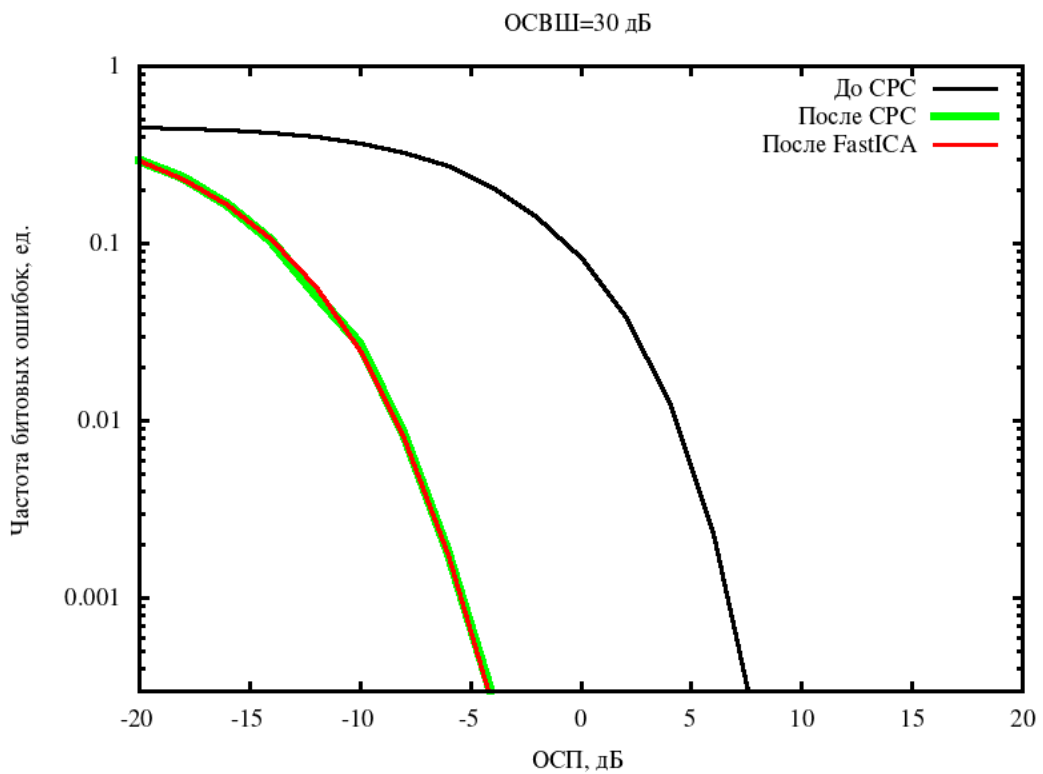


Рисунок 9 – График зависимости частоты битовых ошибок от ОСП для сигналов до СРС, после предложенного алгоритма СРС и алгоритма FastICA при ОСВШ, равном 30 дБ

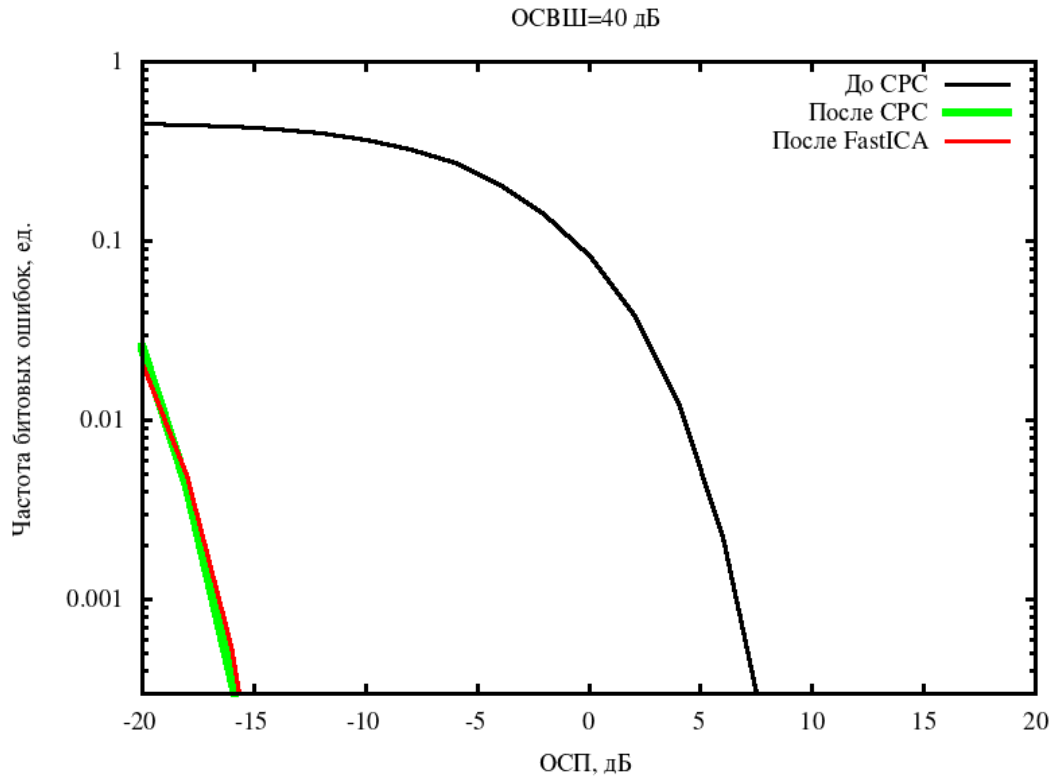


Рисунок 10 – График зависимости частоты битовых ошибок от ОСП для сигналов до СРС, после предложенного алгоритма СРС и алгоритма FastICA при ОСВШ, равном 40 дБ

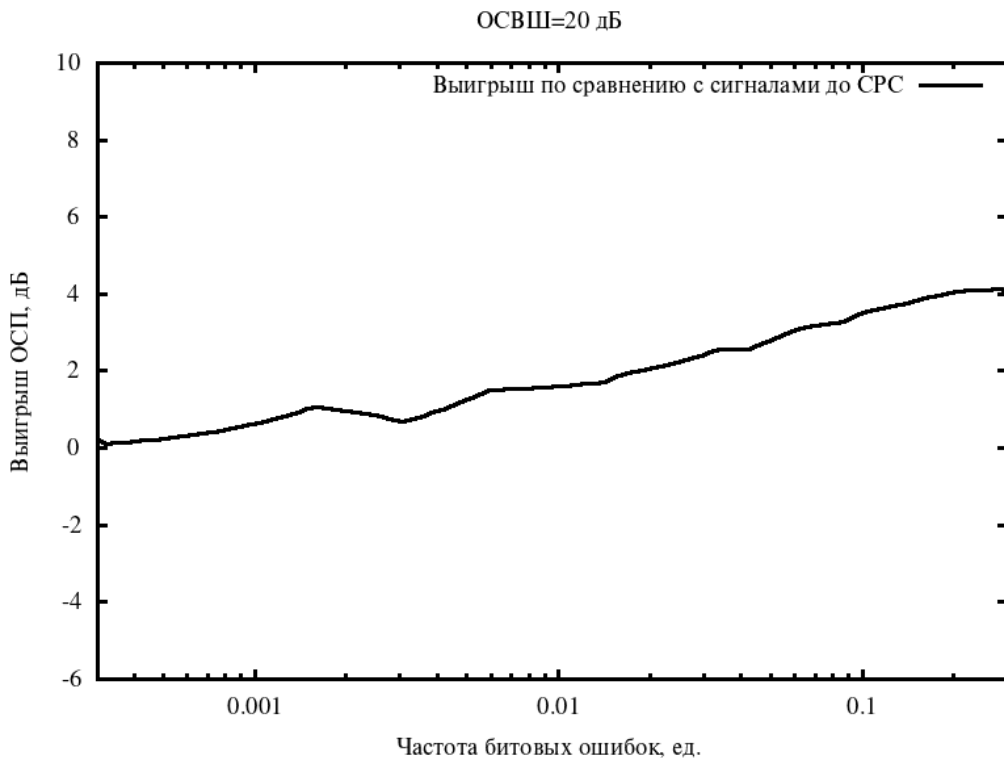


Рисунок 11 – График зависимости выигрыша ОСП при детектировании сигналов после предложенного алгоритма СРС по сравнению с сигналами до СРС при ОСВШ, равном 20 дБ

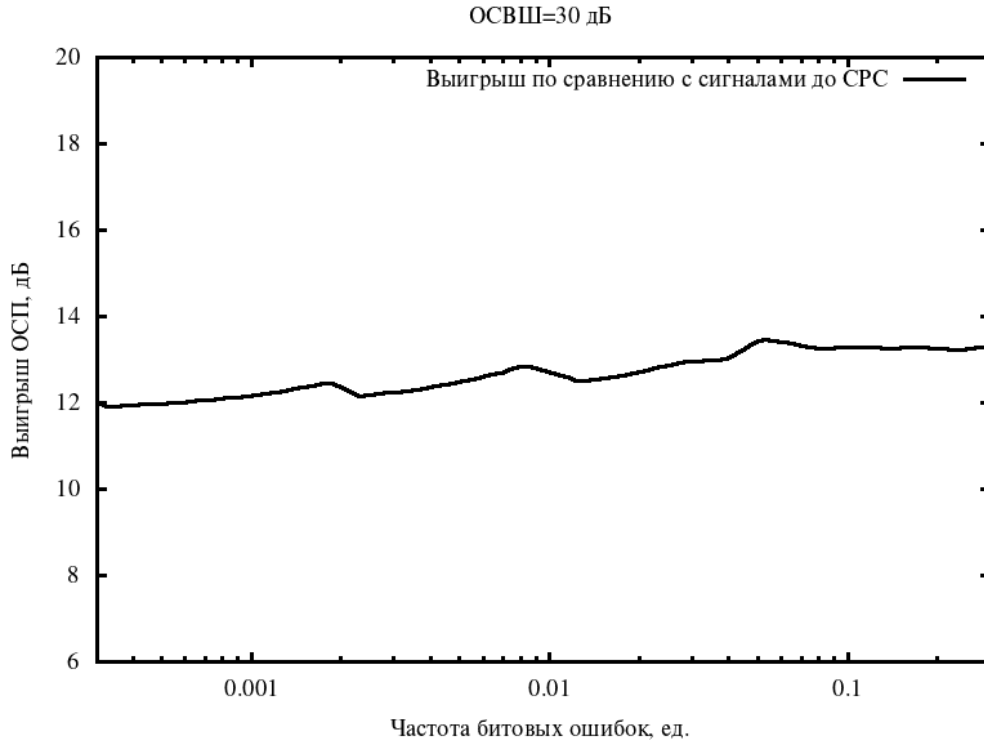


Рисунок 12 – График зависимости выигрыша ОСП при детектировании сигналов после предложенного алгоритма СРС по сравнению с сигналами до СРС при ОСВШ, равном 30 дБ

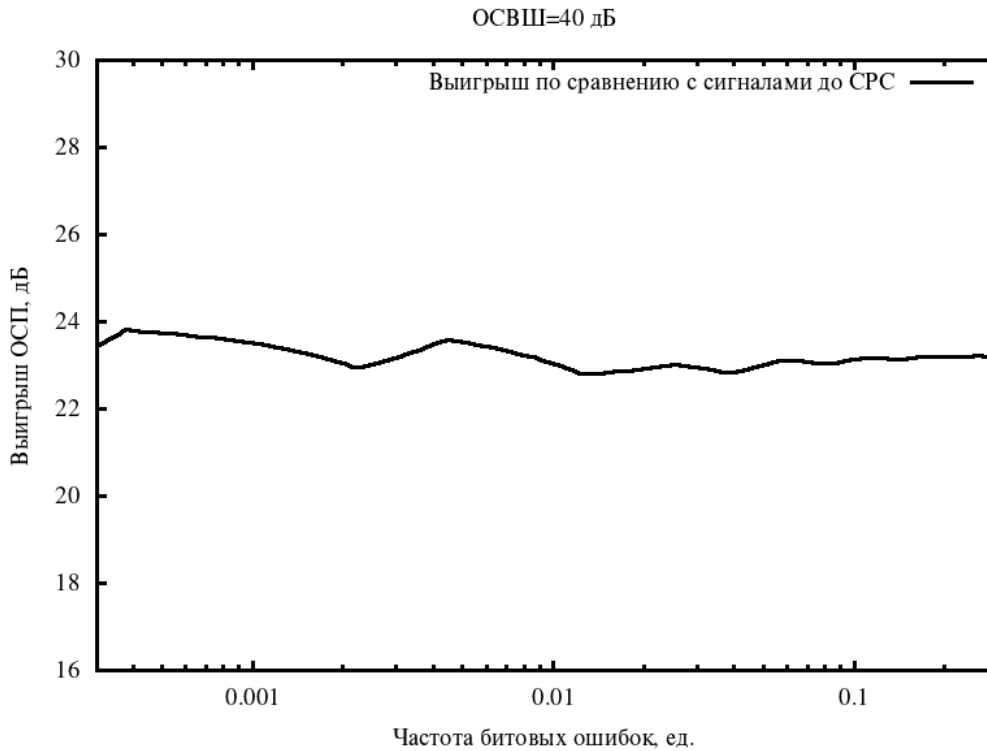


Рисунок 13 – График зависимости выигрыша ОСП при детектировании сигналов после предложенного алгоритма СРС по сравнению с сигналами до СРС при ОСВШ, равном 40 дБ

Исходя из полученных данных можно сделать вывод, что при значении ОСВШ, большем 30 дБ, и частоты битовых ошибок, большей 0,0001, выигрыш в ОСП составляет не менее 12 дБ.

3.3 Предложения по практической реализации разработанных алгоритмов

В данной работе разработанный алгоритм слепого разделения двух комплексных сигналов был реализован на языке программирования C++ 20. Исходный код алгоритма представлен в приложении А. Исходный код выполнен в соответствии с разделом 0. Основная вычислительная сложность алгоритма приходится на расчет оценок начальных моментов входных сигналов. Асимптотическая вычислительная сложность алгоритма $O(L)$, где L – используемая для расчета статистик выбора входных отсчетов.

Алгоритм слепого разделения сигналов можно разбить на два подэтапа:

1. Расчет оценок начальных моментов входных сигналов.
2. Дальнейший расчет оценок кумулянтов входных сигналов и весовых коэффициентов.

Первый подэтап имеет линейную вычислительную сложность от размера числа отсчетов входных сигналов, в то время как второй подэтап выполняется за конечное число операций. Тем самым при больших значениях числа входных отсчетов первый подэтап будет занимать большую часть времени выполнения алгоритма. Таким образом при оптимизации алгоритма необходимо направить усилия на уменьшение времени выполнения именно первого подэтапа.

Одним из способов уменьшить время выполнения расчета начальных моментов является параллельное выполнение расчета различных статистик. Поскольку начальные моменты рассчитываются независимо, то в каждом отдельном потоке может происходить накопление сумм различных степеней

входных отсчетов. В частности, расчет начальных моментов представляется перспективным перенести на видеокарту. В приложении Б представлен исходный код разработанного алгоритма, в котором этап расчета начальных моментов вынесен на исполнение на отдельное устройство. В качестве библиотеки, осуществляющей расчет на периферийных устройствах (в том числе и на видеокarte) был выбран OpenCL.

Расчет начальных моментов был разбит на несколько задач. Вначале для каждого отсчета входных сигналов были рассчитаны элементарные статистики единичных отсчетов. Затем производится суммирование полученных статистик. Суммирование статистик также реализовано для параллельного исполнения. Вначале будут просуммированы статистики соседних отсчетов, затем статистики отсчетов с шагом 2, 4 и т.д.

3.4 Выводы по разделу

В разделе 3 было произведено компьютерное моделирование разработанного алгоритма. Разработанный алгоритм был реализован на языке программирования C++. Было реализовано два алгоритма расчета начальных моментов: последовательный и адаптированный для выполнения на устройствах с поддержкой параллельных вычислений. Показано, что предложенный алгоритм позволяет эффективно разделить линейные комбинации независимых сигналов при разнице в ОСП во входных сигналах не менее 1дБ. Показано, что предложенный алгоритм осуществляет эффективное разделение сигналов при размере используемой выборки отсчетов для расчета статистик второго и четвертого порядков не менее 10000. По сравнению с алгоритмом FastICA предложенному алгоритму требуется в 3 раза меньшая выборка отсчетов для детектирования ЧМ-2 сигналов с меньшим уровнем частоты битовых ошибок при минимальном ОСП в 0 дБ и диапазоне частоты битовых ошибок от 0,0001 до 0,01. Показано, что

предложенный алгоритм осуществляет эффективное разделение сигналов при ОСВШ входных сигналов не менее 24 дБ и минимальном ОСП в 0 дБ. Эффективность приема ЧМ-2 сигналов при значениях ОСВШ от -100 до 100 дБ не уступает алгоритму FastICA. Показано, что предложенный алгоритм обеспечивает выигрыш в ОСП при детектировании ЧМ-2 сигналов не менее 12 дБ при ОСВШ от 30 до 100 дБ и частоты битовых ошибок от 0,0001 до 0,1.

Заключение

В диссертационном исследовании получены следующие основные результаты:

1. Сформулирована постановка задачи слепого разделения сигналов. Представлена модель линейного смешивания сигналов в присутствии аддитивных шумов. Предполагается, что исходные сигналы являются стационарными случайными процессами и обладают свойством статистической независимости относительно друг друга. Показана неоднозначность восстановления исходных сигналов с точностью до их масштаба и перестановок. Показана общая схема работы методов слепого разделения сигналов, включающая в себя центрирование данных, беление данных, оптимизация критерия независимости сигналов, формирование разделяющей матрицы и восстановление сигналов.

2. Проведен анализ существующих методов разделения сигналов. Показаны основные методы статистического определения коэффициентов размешивающей матрицы, основанные на частичном использовании априорной информации о полезном сигнале или о направлении его прихода. Представлены алгоритмы разделения сигналов с предварительным расчетом пространственно-поляризационных параметров сигналов, зависящие от априорной информации о строении антенной решетки. Рассмотрены методы слепого разделения сигналов с использованием критерия декорреляции. Показано, что данные методы зависят от выбора временного сдвига между сигналами.

3. В разделе 2 был разработан алгоритм слепого разделения двух комплексных сигналов. Исследование статистических свойств КСВ основано на комплексных статистических функциях. Такое представление позволяет упростить анализ исследуемых сигналов и вид получаемых выражений. Критерий независимости выходных КСВ алгоритма слепого разделения сигналов был

сформулирован в виде системы уравнений от весовых коэффициентов. Система уравнений состоит из двух уравнений приведения дисперсий выходных КСВ к единице, чтобы не получить тривиальное нулевое решение. Уравнения приведения ковариации и кумулянта четвертого порядка к нулю являются упрощенным аналогом критерия независимости сигналов. Решением уравнений второго порядка является множество весовых коэффициентов, выраженных через дисперсии и ковариацию входных сигналов, а также через 4 неизвестные переменные, определяющие фазу и амплитудное соотношение величин. Решение является полным и аналитическим. При подстановке решения задачи декорреляции в уравнение четвертого порядка было получено аналитическое решение задачи слепого разделения двух комплексных сигналов. Решение зависит от кумулянтов второго и четвертого порядков. Поскольку у КСВ с нормальным распределением все кумулянты высших порядков равны нулю, то ограничением предложенного алгоритма является невозможность разделения КСВ с нормальным распределением.

4. Произведено компьютерное моделирование разработанного алгоритма. Разработанный алгоритм был реализован на языке программирования C++. Было реализовано два алгоритма расчета начальных моментов: последовательный и адаптированный для выполнения на устройствах с поддержкой параллельных вычислений. Показано, что предложенный алгоритм позволяет эффективно разделить линейные комбинации независимых сигналов при разнице в ОСП входных сигналах не менее 1дБ. Показано, что предложенный алгоритм осуществляет эффективное разделение сигналов при размере используемой выборки отсчетов для расчета статистик второго и четвертого порядков не менее 10000. По сравнению с алгоритмом FastICA предложенному алгоритму требуется в 3 раза меньшая выборка отсчетов для детектирования ЧМ-2 сигналов с меньшим уровнем частоты битовых ошибок при минимальном ОСП в 0 дБ и диапазоне частоты битовых ошибок от 0,0001 до 0,01. Показано, что предложенный алгоритм осуществляет эффективное разделение сигналов при ОСВШ входных сигналов не менее 24 дБ и минимальном ОСП в 0 дБ. Эффективность приема ЧМ-2 сигналов

при значениях ОСВШ от -100 до 100 дБ не уступает алгоритму FastICA. Показано, что предложенный алгоритм обеспечивает выигрыш в ОСП при детектировании ЧМ-2 сигналов не менее 12 дБ при ОСВШ от 30 до 100 дБ и частоты битовых ошибок от 0,0001 до 0,1.

К перспективам дальнейшей разработки темы можно отнести расширение алгоритма на большее количество принимаемых сигналов и исследование других статистик в задаче слепого разделения сигналов.

Таким образом поставленная научная задача решена, а цель диссертационного исследования достигнута в полном объеме.

Список сокращений и условных обозначений

АНК	–	Анализ независимых компонент
АНКСВП	–	Анализ независимых компонент на основе статистик второго порядка
АР	–	Антенная решетка
БГШ	–	Белый гауссовой шум
БМАНК	–	Быстрый метод анализа независимых компонент
ВК	–	Весовые коэффициенты
ДН	–	Диаграмма направленности
ИМНСОСЗ	–	Метод извлечения множества неизвестных сигналов на основе обобщенной задачи на собственные значения
КМ	–	Ковариационная матрица
КСВ	–	Комплексная случайная величина
ЛП	–	Лицензированный пользователь
ЛЭАР	–	Линейная эквидистантная антенная решетка
НЛП	–	Нелицензированный пользователь
ОБИМД	–	Отклик без искажений с минимальной дисперсией
ОСПШ	–	Отношение сигнал/(помеха+шум)
ОСП	–	Отношение сигнал/помеха
ОСВШ	–	Отношение сигнал/(внутренний шум)
ПСДСМ	–	Приближенная совместная диагонализация собственных матриц
ПЛИС	–	Программируемая логическая интегральная схема
ППП	–	Пространственно-поляризационный параметр
ППР	–	Пространственно-поляризационное разделение
РПУ	–	Радиоприемное устройство

CB	–	Случайная величина
MCPC	–	Метод слепого разделения сигналов
CPC	–	Слепое разделение сигналов
CJD	–	Complex joint diagonalization
CMA	–	Constant modulus algorithm
FAJD	–	Fast approximate joint diagonalization
ICA	–	Independent component analysis
IVA	–	Independent vector analysis
LSCMA	–	Least square constant modulus algorithm
MIMO	–	Multiple input - multiple output
O-CMA	–	Orthogonalized constant modulus algorithm
SGD	–	Stochastic gradient descent
VMD	–	Variational Mode Decomposition

Список литературы

1. **Абенд, К.** Статистическое обнаружение в каналах связи с взаимными помехами между символами / К. Абенд, Б. Д. Фритчмон. – ТИИЭР. – 1970. – Т. 58. – № 5.
2. **Аджемов, С. С.** Слепое разделение сигналов на основе сдвиговых статистик / С. С. Аджемов, А. А. Кучумов, Д. В. Савостьянов // Т-Comm – Телекоммуникации и транспорт. – 2009. – № 11. – С. 16–19.
3. **Баланис, К. А.** Введение в смарт-антенны / К. А. Баланис, П. И. Иоанидес. – М. : Техносфера. – 2012. – 200 с.
4. **Бокк, Г. О.** Повышение эффективности работы систем связи на основе пространственно-временной обработки и спектрального анализа сигналов: Дис. ... д-ра техн. наук. – М. 2000. – 396 с.
5. **Вечтомов, В. А.** Алгоритм полной адаптации активной фазированной антенной решетки / В. А. Вечтомов, В. И. Джиган // Вестник МГТУ. Сер. «Приборостр». – 2009. – Спецвыпуск – С. 38–42.
6. **Вечтомов, В. А.** Многолучевая антенная решетка для системы спутниковой связи / В. А. Вечтомов, А. С. Милосердов, Л. И. Пономарев // Антенны. – 2012. – №5. – С. 52–63.
7. **Вечтомов, В. А.** Пространственная фильтрация помех в антенне, построенной из подрешеток / В. А. Вечтомов, В. И. Джиган // Вестник МГТУ. Сер. «Приборостроение». – 2012. – № 7. – С. 158–171.
8. **Горячкин, О. В.** Методы слепой обработки сигналов и их приложения в системах радиотехники и связи. – М. : Радио и связь. – 2003. – 230 с.
9. **Гмурман, В. Е.** Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк. – 2003. – 479 с.: ил.

10. **Джиган, В. И.** Адаптивная фильтрация сигналов: теория и алгоритмы / В. И. Джиган. – М. : Техносфера. – 2013. – 528 с.
11. **Звездина Ю. А.** Исследование антенной системы микроволнового диапазона для пространственно-поляризационной обработки сигналов эллиптической поляризации : Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Р-на-Дону. – 2009. – 151 с.
12. **Зюко, А. Г.** Помехоустойчивость и эффективность систем связи / А. Г. Зюко. – М. : Связь. – 1972. – 360 с.
13. **Корниенко, Л. Г.** Адаптивные антенные решетки с управляемыми пространственно-поляризационными характеристиками в условиях приема частично-поляризационных радиоволн / Л. Г. Корниенко, Ю. А. Колос // Антенны. – 1989. – № 36. – С. 12–23.
14. **Красный, В. П.** Оценка двух угловых координат источников шумовых помех / В. П. Красный, Д. В. Красный, Ю. Т. Кармазина // Сборник трудов II Международной конференции «РАДИОИНФОКОМ-2015». Часть 1, МГТУ МИРЭА. – 2015. – С. 338–343.
15. **Красный, В. П.** Особенности современной методологии испытаний систем вооружения воздушно-космической обороны / В. П. Красный, Д. В. Красный, Ю. Т. Кармазина // Военная мысль. – 2015. – №6. – С. 42–50.
16. **Красный, В. П.** Оценка спектра двумерного сигнала / В. П. Красный, Д. В. Красный, Ю. Т. Кармазина // Сборник трудов международной конференции DSPA-2015 «Цифровая обработка сигналов и ее применение – DSPA-2015». – 2015. – С. 66–69.
17. **Кучумов, А. А.** Эффективность использования алгоритмов слепой обработки для разделения сигналов с различными типами модуляции / А. А. Кучумов, Н. Е. Мирошникова // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. – 2016. – Т. 10, № 5. – С. 17–20.
18. **Левин, Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники / Б. Р. Левин. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь. – 1989. – 656 с.

19. **Либеровский, Н. Ю.** Использование регуляризации Тихонова при одновременной диагонализации сдвиговых статистик в методах слепого разделения сигналов / Н. Ю. Либеровский, В. С. Припутин // Технологии информационного общества. XI Международная отраслевая научно-техническая конференция: сборник трудов. 2017. Издательство: ООО "Издательский дом Медиа публишер" (Москва). – С. 173–174.

20. **Либеровский, Н. Ю.** Исследование эффективности метода слепого разделения сигналов двух вещественных сигналов с использованием кумулянтов четвертого порядка при различных отношениях мощности сигнала и помехи / Н. Ю. Либеровский, В. С. Припутин, Д. С. Чиров // Технологии информационного общества. Сборник трудов XIV Международной отраслевой научно-технической конференции. 2020. Издательство: ООО "Издательский дом Медиа публишер" (Москва). – 2020. – С. 170–172.

21. **Либеровский, Н. Ю.** Математическое моделирование слепого разделения двух вещественных сигналов с использованием кумулянтов четвертого порядка / Н. Ю. Либеровский, В. С. Припутин, Д. С. Чиров // Вестник южно-уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – Май 2020. – Т. 13, № 2. – С. 43–53.

22. **Либеровский, Н. Ю.** Обзор исследований адаптивного формирования диаграммы направленности и цифровой обработки / Н. Ю. Либеровский, В. С. Припутин, Д. С. Чиров // Научные технологии в космических исследованиях Земли. – 2021. – Т. 13, № 6. – С. 16–21.

23. **Либеровский, Н. Ю.** Применение методов слепого разделения сигналов для обнаружения радиосигналов с фазовой манипуляцией / Н. Ю. Либеровский, Д. С. Чиров, Н. Д. Петров // Труды Научно-исследовательского института радио. – 2021. – № 2. – С. 23–28.

24. Метод главных компонент и метод анализа независимых компонент в задаче слепой пространственно-поляризационной селекции сигналов / Аджемов С. С., Кучумов А. А., Либеровский Н. Ю., Припутин В. С. // Технологии информационного общества. Материалы XII Международной отраслевой научно-

технической конференции. 2018. Издательство: ООО "Издательский дом Медиа публишер" (Москва). С. 165–167.

25. **Миддлтон, Д.** Введение в статистическую теорию связи / Д. Миддлтон; Перевод с англ. Б. А. Смиренина; Под ред. и с предисл. Б. Р. Левина. – Москва: Сов. радио, 1961–1962. – 2 т.

26. **Мозинго, Р. А.** Адаптивные антенные решетки: Введение в теорию: пер. с англ. / Р. А. Мозинго, Т. У. Миллер. – М. : Радио и связь. 1986. – 448 с.

27. **Припутин, В. С.** Аналитический метод пеленгации радиосигнала на равномерную круговую антенную решетку с произвольным количеством элементов / В. С. Припутин, А. А. Кучумов, К. В. Мячин // Т-Comm – Телекоммуникации и транспорт. – 2010. – № 11. – С. 39–41.

28. **Припутин, В. С.** Концепция применения тензорных методов слепого разделения сигналов в адаптивных антенных решетках / В. С. Припутин // Системы синхронизации, формирования и обработки сигналов в инфокоммуникациях: материалы международного научно-технического семинара. – 2013. – С. 205–208.

29. **Припутин, В. С.** Метод слепого разделения сигналов на базе статистик второго порядка в задаче пространственно-поляризационной селекции / В. С. Припутин // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. – 2014. – Т. 8, № 6. – С. 36–39.

30. **Радзиевский, В. Г.** Теоретические основы радиоэлектронной разведки. 2-е изд., испр. и доп. / В. Г. Радзиевский, А. А. Сирота. – М. : Радиотехника. 2004. – 432 с.

31. Радиотехнические системы: Учебник для вузов по спец. «Радиотехника» / Ю. П. Гришин, В. П. Ипатов, Ю. М. Казаринов и др.; под ред. Ю. М. Казаринова. – М. : Высш. шк. 1990. – 496 с.

32. **Ратынский, М. В.** Адаптация и сверхразрешение в антенных решетках / М. В. Ратынский. – М. : Радио и связь. 2003. – 200 с.

33. **Родимов, А. П.** Статистическая теория поляризационно-временной обработки сигналов и помех / А. П. Родимов, В. В. Поповский. – М. : Радио и связь. 1984. – 272 с.

34. **Стратанович, Р. Л.** Теория информации / Р. Л. Стратанович. – М.: Сов. радио, 1975. – 424 с.
35. Теоретические основы технических разведок: Учеб. пособие / Под ред. Ю. Н. Лаврухина. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана. – 2008. – 536 с.
36. **Тихонов, В. И.** Оптимальный прием сигналов / В. И. Тихонов. – М.: Радио и связь. – 1983. – 320 с.
37. **Уидроу, Б.** Адаптивная обработка сигналов / Б. Уидроу, С. Стирнз. – М.: Радио и связь. – 1989. – 440 с.
38. **Чиркунова, Ж. В.** Пространственная обработка сигналов в цифровых антенных решетках: Дис. ... канд. техн. наук. – М. 2009. – 161 с.
39. **Adali, T.** Multimodal Data Fusion Using Source Separation: Application to Medical Imaging / T. Adali, Y. Levin-Schwartz, V. D. Calhoun // Proceedings of the IEEE. – 2015. – Vol. 103, № 9. – P. 1494–1506.
40. **Agee, B. G.** Fast Acquisition of Burst and Transient Signals using a Predictive Adaptive Beamformer / B. G. Agee // Processing of IEEE Military Communication, IEEE. – 1989. – P. 347–352.
41. Automatic Modulation Recognition Using Wavelet Transform and Neural Networks in Wireless Systems / K. Hassan, I. Dayoub, W. Hamouda, M. Berbineau // EURASIP Journal on Advances in Signal Processing. – Vol. 2010. – 13 p.
42. **Back, A. D.** What Drives Stock Returns? / A. D. Back, A. S. Weigend // Comp. Intelligence for Financial Engineering (CIFEr) – An Independent Component Analysis: proc. of the IEEE/IAFE/INFORMS 1998 conf. – 1998. – P. 141–156.
43. **Baillet, S.** Electromagnetic brain mapping / S. Baillet, J. C. Mosher, R. M. Leahy // IEEE Signal Processing Magazine. – 2001. – Vol. 18, № 6. – P. 14–30.
44. **Bakhr, K.** The Maximum Algorithm for Adaptive Arrays and Frequency-hopping Communications / K. Bakhr D. Torrieri // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1984. – Vol. 32, № 7. – P. 919–928.
45. **Bell, A. J.** An Information-Maximization Approach to Blind Separation and Blind Deconvolution / A. J. Bell, T. J. Sejnowski // Neural Computation. – 1995. – Vol. 7, № 6. – P. 1129–1159.

46. **Bingham, E.** ICA of complex valued signals: a fast and robust deflationary algorithm / E. Bingham and A. Hyvarinen // Proceedings of the IEEE-INNS-ENNS International Joint Conference on Neural Networks. IJCNN 2000. Neural Computing: New Challenges and Perspectives for the New Millennium. – 2000. – Vol.3. – P. 357–362.
47. Blind Source Separation and Equalization for High Order QAM Signals in MIMO System / W. Cong, L. Yang, C. Sun, R. Yang, S. Zhu // 2018 10th International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics (IHMSC). – 2018. – P. 52–55.
48. A blind source separation technique using second-order statistics / A. Belouchrani, K. Abed-Meraim, J.-F. Cardoso, E. Moulines // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1997. – Vol. 45, № 2. – P. 434–444.
49. **Bro, R.** Review on Multiway Analysis in Chemistry / R. Bro // Analytical Chemistry. – 2006. – Vol. 36. – P. 279–279.
50. **Cardoso, J.-F.** Blind Beam Forming for non-Gaussian Signals / J.-F. Cardoso, A. Souloumiac // IEEE Processings on Radar and Signal Processing. – 1993. – Vol. 140, № 1. – P. 362–370.
51. **Cardoso, J.-F.** Infomax and maximum likelihood for blind source separation / J.-F. Cardoso // IEEE Signal Processing Letters. – 1997. – Vol. 4, № 4. – P. 112–114.
52. **Cardoso, J.-F.** Source separation using higher order moments / J.-F. Cardoso // International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. – 1989. – Vol.4. – P. 2109–2112.
53. Channel Estimation for mmWave Massive MIMO With Convolutional Blind Denoising Network / Y. Jin, J. Zhang, B. Ai, X. Zhang // IEEE Communications Letters. – 2020. – Vol. 24, № 1. – P. 95–98.
54. **Cheng, Q.** Research on the Separation Method of LFM Signal Based on VMD-FastICA / Q. Cheng, T. Chen, Y. Lei // 2021 World Conference on Computing and Communication Technologies (WCCCT). – 2021. – P. 75–79.
55. **Common, P.** Improved Contrast Dedicated to Blind Separation in Communications / P. Common, E. Moreau // ICASSP: Proc. ICASSP-97. – 1997. – P. 3453–3456.

56. **Common, P.** Independent component analysis, A new concept? / P. Common // *Signal Processing*. – 1994. – Vol. 36, issue 3. – P. 287–314.
57. Comparison second order based blind signal separation with classical adaptive interference cancellation methods in the case of ill-conditioned statistics / S. S. Adjemov, A. A. Kuchumov, N. Y. Liberovskiy, V. S. Priputin // *2017 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SINKHROINFO)*. – 2017. – P. 1–4.
58. **Compton, R. T.** On Performance of a Polarization Sensitive Array / R. T. Compton // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 1981. – Vol. 29, № 5. – P. 718–725.
59. **Compton, R. T.** The Tripole Antenna: An Adaptive Array with Full Polarization Flexibility / R. T. Compton // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 1981. – Vol. 29, № 6. – P. 944–952.
60. A Consolidated Perspective on Multimicrophone Speech Enhancement and Source Separation / S. Gannot, E. Vincent, S. Markovich-Golan, A. Ozerov // *IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*. – 2017. – Vol. 25, № 4. – P. 692–730.
61. **Cover, T. M.** *Elements of Information Theory* / T. M. Cover, J. A. Thomas – New York: Wiley. – 1991. – 542 p.
62. **DaSilva, V. M.** Performance of orthogonal CDMA codes for quasisynchronous communication systems / V. M. DaSilva, E. S. Sousa // *Proceedings of IEEE ICUPC 1993, (Ottawa, Canada)*. – 1993. – P. 995–999.
63. **Draper, B. A.** Recognizing Faces with PCA and ICA / B. A. Draper [и др.] // *Computer Vision and Image Understanding*. – 2003. – Vol. 91. – P. 115–137.
64. **Erdem, E.** *Digital Modulation Recognition* / E. Erdem // A Thesis Submitted to the Graduate School of Natural and Applied Sciences of Middle East Technical University. – 2009. – 161 p.
65. **Eriksson, J.** Essential Statistics and Tools for Complex Random Variables / J. Eriksson, E. Ollila, V. Koivunen // *IEEE Transactions on Signal Processing*. – 2010. – Vol. 58, № 10. – P. 5400–5408.

66. **Eriksson, J.** Statistics for complex random variables revisited / J. Eriksson, E. Ollila, V. Koivunen // 2009 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. – 2009. – P. 3565–3568.
67. **Fazel, K.** On the Performance of Convolutionally-Coded CDMA/OFDM for Mobile Communication System / K. Fazel, L. Papke // Proc. of IEEE PIMRC'93. – 1993. – P. 468–472.
68. **Feldman, D.** A Constraint Projection Approach for Robust Adaptive Beamforming / D. Feldman, L. J. Griffiths // International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. – 1991. – P. 1381–1384.
69. **Ferreol, A.** Higher Order Blind Separation of non Zero-mean Cyclostationary Sources / A. Ferreol, P. Chevalier, L. Albera // EUSIPCO: proc. materials. – 2000. – P. 103–106.
70. **Ferreol, A.** On the Behavior of Current Second and Higher Order Blind Source Separation Methods for Cyclostationary Sources / A. Ferreol, P. Chevalier // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2000. – Vol. 48. – P. 1712–1725.
71. **Ferreol, A.** Second-Order Blind Separation of First- and Second-Order Cyclostationary Sources – Application to AM, FSK, CPFASK, and Deterministic Sources / A. Ferreol, P. Chevalier, L. Albera // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2004. – Vol. 52, № 4. – P. 845–861.
72. **Gardner, W. A.** Simplification of MUSIC and ESPRIT by Exploitation of Cyclostationarity / W. A. Gardner // Processings of the IEEE. – 1988. – Vol. 76, № 7. – P. 845–847.
73. **Gardner W. A.** Spectral Correlation of Modulated Signals. Part I: Analog Modulation / W. A. Gardner // IEEE Transaction on Communications. – 1987. – Vol. 35, № 6. – P. 584–594.
74. **Gershman, A. B.** Adaptive Beamforming Algorithms with Robustness against Jammer Motion / A. B. Gershman, U. Nickel, J. F. Bohme // IEEE Transactions Signal Processing. – 1997. – Vol. 45, № 7. – P. 1978–1885.

75. **Godara, L. C.** Application of Antenna Arrays to Mobile Communications, Part II: Beam-Forming and Direction-of-Arrival Considerations / L. C. Godara // Proceedings of the IEEE. – 1997. – Vol. 85, № 8. – P. 1193–1245.
76. **Golub, G.** Matrix Computations / G. Golub, C. Van Loan. – 3rd ed. – Baltimore: Johns Hopkins University Press. 1996. – 728 p.
77. **Hamalainen, M.** Magnetoencephalography – Theory, Instrumentation, and Applications to Noninvasive Studies of Signal Processing in the Human Brain / M. Hamalainen [и др.] // Reviews of Modern Physics. – 1993. – Vol. 65. – P. 413–497.
78. **Hara, S.** Overview of multicarrier CDMA / S. Hara, R. Prasad // IEEE Communication Magazine. – 1997. – P. 126–133
79. Hardware Implementation of Blind Source Separation Algorithm Using ZYBO Z7& Xilinx System Generator / M. Mekhfioui, A. Satif, O. Mouhib, R. Elgouri, A. Hadjoudja, L. Hlou // 2020 5th International Conference on Renewable Energies for Developing Countries (REDEC). – 2020. – P. 1–5.
80. **Hatzichristos, G.** Classification of Digital Modulation Types in Multipath Environments / G. Hatzichristos, M. P. Fargues // IEEE. – 2001. – P. 1494–1498.
81. **Hong, L.** Identification of digital modulation types using the wavelet transform / L. Hong, K. C. Ho // IEEE MILCOM. – 1999. – P.427–431.
82. **Hsue, S. Z.** Automatic modulation classification using zero crossing / S. Z. Hsue, S. S. Soliman // IEE Radar and Signal Processing. – 1990. – Vol. 137. – P. 459–464.
83. **Hsue, S. Z.** Automatic modulation recognition of digitally modulated signals / S. Z. Hsue, S. S. Soliman // in Proc. IEEE MILCOM. – 1989. – P. 645–649.
84. **Humady, A.-J.** Classification of Digital Modulation Using Wavelet Transform / A.-J. Humady, H. Chaiel // Iraqi J. of Appl. Phys. – 2005. – Vol. 1, № 3. – P. 15–21.
85. **Hyvarinen, A.** Fast and robust fixed-point algorithms for independent component analysis / A. Hyvarinen // IEEE Transactions on Neural Networks. – 1999. – Vol. 10, № 3. – P. 626–634.

86. **Hyvarinen, A.** The Fixed-point Algorithm and Maximum Likelihood Estimation for Independent Component Analysis / A. Hyvarinen // *Neural Processing Letters*. – 1999. – Vol. 10, № 2. – P. 1–5.
87. **Hyvarinen, A.** Independent Component Analysis: Algorithms and Applications / A. Hyvarinen, E. Oja // *Neural Networks*. – 2000. – Vol. 13. – P. 411–430.
88. **Hyvarinen, A.** Survey on Independent Component Analysis / A. Hyvarinen // *Neural Computing Surveys*. – 1999. – № 2. – P. 94–128.
89. Imaging brain dynamics using independent component analysis / T. P. Jung, S. Makeig, M. J. McKeown, A. J. Bell, T. W. Lee, T. J. Sejnowski // *Proceedings of the IEEE*. – 2001. – Vol. 89, № 7. – P. 1107–1122.
90. **Jones M.** What is Projection Pursuit? / M. Jones, R. Sibson // *Journal of the Royal Statistical Society*. – 1987. – Vol. 150, № 1. – P. 1–36.
91. **Jongsun, K.** Face Recognition Based on ICA Combined with FLD Biometric Authentication / K. Jongsun, C. Jongmoo, Y. Yuneho // *Biometric authentication: International ECCV 2002 Workshop proceedings*. – Berlin: Springer. – 2004. – P. 10–19.
92. **Kim, J. V.** Signal Subspace Method for Beamsteering Adaptive Arrays / J. V. Kim, C. K. Un // *Electronic Letters*. – 1989. – Vol. 25, № 16. – P. 1076–1077.
93. **Krim, H.** Two Decades of Array Signal Processing Research: The Parametric Approach / H. Krim, M. Viberg // *IEEE Signal Processing Magazine*. 1996. – Vol. 13, № 4. – P. 67–94.
94. **Kuchumov, A. A.** Blind Two Real Signals Separation Method Based on Third Order Cumulants / A. A. Kuchumov, N. Y. Liberovskiy, V. S. Priputin // *2019 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications*. – 2019. – P. 1–4.
95. **Kuchumov, A. A.** Using the Blind Two Real Source Separation Algorithm in the Task of Detection a Useful Signal with an Additive white Gaussian Noise / A. A. Kuchumov, N. Y. Liberovskiy, V. S. Priputin // *2020 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO)*. – 2020. – P. 1–5.

96. **Lathauwer, L.** Electrocardiogram Extraction by Source Subspace Separation / L. Lathauwer, B. Moor, J. Vandewalle // IEEE Transactions on Biomedical Engineering. – 1995. – Vol. 47. – P. 134–138.

97. **Li, X.** Nonorthogonal Joint Diagonalization Free of Degenerate Solution / X. Li, X. Zhang // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2007. – Vol. 55, № 5. – P. 1803–1814.

98. **Liberovskiy, N. Y.** Blind Two Complex Signals Separation Method Based on Fourth Order Cumulants / N. Y. Liberovskiy, V. S. Priputin, I. A. Volkov // 2022 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO). – 2022. – P. 1-7.

99. **Liberovskiy, N. Y.** Evaluation of the Efficiency of Blind Signal Separation in the Problem of Detecting BPSK Signals / N. Y. Liberovskiy, D. S. Chirov, V. S. Priputin // 2021 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications. – 2021. – P. 1–4.

100. **Liberovskiy, N. Y.** General solution to the problem of decorrelation of a linear combination of two random complex variables / N. Y. Liberovskiy, V. S. Priputin, E. O. Lobova // 2021 29th Telecommunications Forum (TELFOR). – 2021. – P. 1–3.

101. **Liberovskiy, N. Y.** Incoherent DPSK and FSK Receiving Improvement Using Blind Source Separation Algorithm / N. Y. Liberovskiy, V. S. Priputin, D. S. Chirov // 2021 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO). – 2021. – P. 1–5.

102. **Liberovskiy, N. Y.** Using Blind Signal Separation in the Task of Detecting FSK Signals / N. Y. Liberovskiy, V. S. Priputin, D. S. Chirov // 2021 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF). – 2021. – P. 1–4.

103. **Litva, J.** Digital Beamforming in Wireless Communication / J. Litva, T. Lo. – London: Artech House Publishers. – 1996. – 320 p.

104. **Maruta, K.** Uplink Interference Suppression by Semi-Blind Adaptive Array With Decision Feedback Channel Estimation on Multicell Massive MIMO Systems /

K. Maruta, C. Ahn / IEEE Transactions on Communications. – 2018. – Vol. 66, № 12. – P. 6123–6134.

105. **Madisetti, V. K.** The Digital Signal Processing Handbook / V. K. Madisetti. – NY: CRC Press LLC. – 2000. – 561 p.

106. **Mailloux, R. J.** Covariance Matrix Augmentation to Produce Adaptive Array Pattern Troughs / R. J. Mailloux // IEEE Electronics Letters. – 1995. – Vol. 31, № 10. – P. 771–772.

107. **Mesloub, A.** A New Algorithm for Complex Non-Orthogonal Joint Diagonalization Based on Shear and Givens Rotations / A. Mesloub, K. Abed-Meraim, A. Belouchrani // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2014. – Vol. 62, № 8. – P. 1913–1925.

108. **Mezghani, A.** Blind Estimation of Sparse Broadband Massive MIMO Channels With Ideal and One-bit ADCs / A. Mezghani, A. L. Swindlehurst // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2018. – Vol. 66, № 11. – P. 2972–2983.

109. **Moody J.** Term Structure of Interactions of Foreign Exchange Rates / Moody J., Howard Y. // Computational Finance: proc. of the VI Int'l Conf. –1999. – P. 24–35.

110. Multiple audio source separation by using intra-object-sparsity encoding framework / J. Sun, M. Jia, C. Bao, B. Song // 2017 IEEE International Conference on Signal Processing, Communications and Computing (ICSPCC). – 2017. – P. 1–5.

111. **Outtersten, B.** Analysis of Subspace Fitting and ML Techniques for Parameter Estimation from Sensor Array Data / B. Outtersten, M. Viberg, T. Kailath // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1992. – Vol. 40, № 3. – P. 590–600.

112. **Pham, D. T.** Blind separation of mixture of independent sources through a quasi-maximum likelihood approach / D. T. Pham, P. Garat // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1997. – Vol. 45, № 7. – P. 1712–1725.

113. **Rao, B. D.** Weighted Subspace Methods and Spatial Smoothing: Analysis and Comparison / B. D. Rao, K. V. S. Hari // IEEE Transaction on Signal Process. – 1993. – Vol. 41, № 2. – P. 788–803.

114. **Riba, J.** Robust Beamforming for Interference Rejection in Mobile Communications / J. Riba, J. Goldberg, G. Vazquez // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1997. – Vol. 45. – № 1. – P. 271–275.
115. **Roy, R.** ESPRIT-estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques / R. Roy, T. Kailath // IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing. – 1987. – Vol. 37, № 7. – P. 984–995.
116. **Schmidt, R. O.** Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation / R. O. Schmidt // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1986. – Vol. 34, № 3. – P. 276–280.
117. **Schmidt, R. O.** Multiple Source DF Signal Processing: An Experimental System / R. O. Schmidt, R. E. Franks // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1986. – Vol. 34, № 3. – P. 281–290.
118. Single Channel Blind Source Separation for MISO Communication Systems / P. Dey, N. Trivedi, U. Satija, B. Ramkumar, M. S. Manikandan // 2017 IEEE 86th Vehicular Technology Conference (VTC-Fall). – 2017. – P. 1–5.
119. Source Number Estimation Based on Improved Singular Value Decomposition at Low SNR / L.-Y. Gao, M.-Z. Liu, J.-Y. Yue, Y.-H. Tian // 2019 IEEE 9th International Conference on Electronics Information and Emergency Communication (ICEIEC). – 2019. – P. 1–4.
120. **Taferner, M. A.** Novel DOA-based Beamforming Algorithm with Broad Nulls / M. Taferner [и др.] // 10th International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Conf. PIMRC'99. – 1999. – P. 342–347.
121. **Tong, L.** Indeterminacy and Identifiability of Blind Identification / L. Tong [и др.] // IEEE Transactions on Circuits and Systems. – 1991. – Vol. 38, № 5. – P. 499–509.
122. **Tong, L.** Waveform-preserving Blind Estimation of Multiple Independent Sources / L. Tong, Y. Inouye, R. Liu // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1993. – Vol. 41, № 3. – P. 2461–2470.
123. **Van Trees H. L.** Detection, Estimation and Modulation Theory, Part.1 / Van Trees H. L. – NY: Wiley and Sons Inc. – 2001. – 686 p.

124. **Vandendorpe, L.** Multitone Spread Spectrum Multiple Access Communications System in a Multiple Rician Fading Channel // IEEE Transactions on Vehicular Technology. – 1995. – Vol. 44, № 2, P. 327–337.
125. **Vesa, A.** Direction of Arrival Estimation using MUSIC and Root – MUSIC Algorithm / A. Vesa [и др.] // IMECS 2008: Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists (IMECS 2008). – Hong Kong: Newswood Limited. – 2008. – P. 19–21.
126. **Vesa, A.** Direction of Arrival Estimation using MUSIC and Root – MUSIC Algorithm / A. Vesa // TELFOR2010: Proc. of 18th Telecommunications forum TELFOR. – IEEE: Belgrade. – 2010.
127. **Viberg, M.** Sensor Array Processing using Gated Signals / M. Viberg // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. – 1989. – Vol. 37, № 3. – P. 447–450.
128. **Yu, X.** Blind source separation: theory and applications / X. Yu, D. Hu, J. Xu. – Science Press. – 2014. – P. 366.
129. **Zatman, M.** Production of Adaptive Array Troughs by Dispersion Synthesis / M. Zatman // Electronics Letters. – 1995. – Vol. 31, № 25. – P. 2141–2142.
130. **Zhang, J.** Blind Signal Detection in Massive MIMO: Exploiting the Channel Sparsity / J. Zhang, X. Yuan, Y. A. Zhang // IEEE Transactions on Communications. – 2018. – Vol. 66, № 2. – P. 700–712.
131. **Zhang, Y.** Blind source separation and equalization in asynchronous MIMO DS-CDMA / Y. Zhang, S. A. Kassam, V. Weerackody. – 2008 42nd Annual Conference on Information Sciences and Systems. – 2008. – P. 316–319.

Приложение А. Программный код разработанного алгоритма слепого разделения двух комплексных сигналов на языке C++ 20

```

#include <array>
#include <cassert>
#include <complex>
#include <numeric>
#include <span>

std::array<std::complex<double>, 4> complex_bss(
std::span<std::complex<double>> x1,
std::span<std::complex<double>> x2) {
    using F = double;
    using CF = std::complex<double>;
    using CS = std::span<std::complex<double>>;
    using SizeT = typename CS::size_type;
    const SizeT size = std::min(x1.size(), x2.size());
    if (size == 0) {
        return {1.0, 0.0, 0.0, 1.0};
    }
    x1 = x1.first(size);
    x2 = x2.first(size);
    CF m1000 = 0; CF m0010 = 0; CF m1100 = 0; CF m0011 = 0;
    CF m1001 = 0; CF m2000 = 0; CF m2100 = 0; CF m0020 = 0;
    CF m0021 = 0; CF m2001 = 0; CF m0120 = 0; CF m1010 = 0;
    CF m2101 = 0; CF m0121 = 0; CF m1110 = 0; CF m1011 = 0;
    CF m2200 = 0; CF m2002 = 0; CF m0022 = 0; CF m1111 = 0;
    for (auto it1 = x1.begin(), end = x1.end(), it2 = x2.begin();
        it1 != end; ++it1, ++it2) {
        CF a1000 = *it1; m1000 += a1000;
        CF a0100 = std::conj(a1000);
        CF a0010 = *it2; m0010 += a0010;
        CF a0001 = std::conj(a0010);
        CF a1100 = a1000*a0100; m1100 += a1100;
        CF a0011 = a0010*a0001; m0011 += a0011;
        CF a1001 = a1000*a0001; m1001 += a1001;
        CF a2000 = a1000*a1000; m2000 += a2000;
        CF a2100 = a2000*a0100; m2100 += a2100;
        CF a0020 = a0010*a0010; m0020 += a0020;
        CF a0021 = a0020*a0001; m0021 += a0021;
        CF a2001 = a2000*a0001; m2001 += a2001;
        CF a0120 = a0020*a0100; m0120 += a0120;
        CF a1010 = a1000*a0010; m1010 += a1010;
        CF a2101 = a2100*a0001; m2101 += a2101;
        CF a0121 = a0100*a0021; m0121 += a0121;
    }
}

```

```

CF a1110 = a1100*a0010; m1110 += a1110;
CF a1011 = a1000*a0011; m1011 += a1011;
CF a2200 = a2100*a0100; m2200 += a2200;
CF a2002 = a2001*a0001; m2002 += a2002;
CF a0022 = a0021*a0001; m0022 += a0022;
CF a1111 = a1100*a0011; m1111 += a1111;
}
m1000 /= size; m0010 /= size; m1100 /= size; m0011 /= size;
m1001 /= size; m2000 /= size; m2100 /= size; m0020 /= size;
m0021 /= size; m2001 /= size; m0120 /= size; m1010 /= size;
m2101 /= size; m0121 /= size; m1110 /= size; m1011 /= size;
m2200 /= size; m2002 /= size; m0022 /= size; m1111 /= size;
CF m0100 = std::conj(m1000); CF m0001 = std::conj(m0010);
CF m0110 = std::conj(m1001); CF m1101 = std::conj(m1110);
CF m0101 = std::conj(m1010); CF m0111 = std::conj(m1011);
CF m1200 = std::conj(m2100); CF m0200 = std::conj(m2000);
CF m0012 = std::conj(m0021); CF m0002 = std::conj(m0020);
CF m0210 = std::conj(m2001); CF m0220 = std::conj(m2002);
CF m1002 = std::conj(m0120); CF m1210 = std::conj(m2101);
CF m1012 = std::conj(m0121);
F k1100 = std::real(m1100 - m1000*m0100);
F k0011 = std::real(m0011 - m0010*m0001);
CF k1001 = m1001 - m1000*m0001;
CF k1111 = - 6.*m0001*m0010*m0100*m1000 + 2.*m0001*m0010*m1100 +
2.*m0001*m0100*m1010 + 2.*m0001*m0110*m1000 + 2.*m0010*m0100*m1001 +
2.*m0010*m0101*m1000 + 2.*m0011*m0100*m1000 - m0001*m1110 -
m0010*m1101 - m0011*m1100 - m0100*m1011 - m0101*m1010 - m0110*m1001
- m0111*m1000 + m1111;
CF k2200 = -6.*m0100*m0100*m1000*m1000 + 2.*m0100*m0100*m2000 +
8.*m0100*m1000*m1100 - 2.*m0100*m2100 + 2.*m0200*m1000*m1000 -
m0200*m2000 - 2.*m1000*m1200 - 2.*m1100*m1100 + m2200;
CF k0022 = -6.*m0001*m0001*m0010*m0010 + 2.*m0001*m0001*m0020 +
8.*m0001*m0010*m0011 - 2.*m0001*m0021 + 2.*m0002*m0010*m0010 -
m0002*m0020 - 2.*m0010*m0012 - 2.*m0011*m0011 + m0022;
CF k0220 = -6.*m0010*m0010*m0100*m0100 + 2.*m0010*m00010*m0200 +
8.*m0010*m0100*m0110 - 2.*m0010*m0210 + 2.*m0020*m0100*m0100 -
m0020*m0200 - 2.*m0100*m0120 - 2.*m0110*m0110 + m0220;
CF k2002 = -6.*m0001*m0001*m1000*m1000 + 2.*m0001*m0001*m2000 +
8.*m0001*m1000*m1001 - 2.*m0001*m2001 + 2.*m0002*m1000*m1000 -
m0002*m2000 - 2.*m1000*m1002 - 2.*m1001*m1001 + m2002;
CF k2101 = -6.*m0001*m1000*m1000*m0100 + 4.*m0001*m1000*m1100 +
2.*m0001*m1001*m0100 + 2.*m0001*m2000*m0100 - m0001*m2100 +
2.*m1000*m1000*m0101 + 2.*m1000*m1001*m0100 - 2.*m1000*m1101 -
2.*m1001*m1100 - m2000*m0101 - m2001*m0100 + m2101;
CF k1012 = -6.*m1000*m0001*m0001*m0010 + 4.*m1000*m0001*m0011 +
2.*m1000*m1001*m0010 + 2.*m1000*m0002*m0010 - m1000*m0012 +
2.*m0001*m0001*m1010 + 2.*m0001*m1001*m0010 - 2.*m0001*m1011 -
2.*m1001*m0011 - m0002*m1010 - m1002*m0010 + m1012;
F s1 = std::sqrt(k1100); assert(s1 > 0);
F s2 = std::sqrt(k0011); assert(s2 > 0);
CF r = k1001 / (s1*s2);
assert((-1 < std::abs(r)) && (std::abs(r) < 1));

```

```

CF y1111 = k1111 / (s1*s1*s2*s2);
CF y2200 = k2200 / (s1*s1*s1*s1);
CF y0022 = k0022 / (s2*s2*s2*s2);
CF y2002 = k2002 / (s1*s1*s2*s2);
CF y2101 = k2101 / (s1*s1*s1*s2);
CF y1012 = k1012 / (s1*s2*s2*s2);
CF y0121 = std::conj(y1012);
F q = std::sqrt(1. - std::real(r*std::conj(r)));
CF A = (y0022*r*r - 2.*y1012*r + y2002) / (q*q);
CF B = (y0022*r - y0022*r*r*std::conj(r) / (q*q) - y1012 +
2.*y1012*r*std::conj(r) / (q*q) - 2.*y1111*r / (q*q) -
y2002*std::conj(r) / (q*q) + y2101 / (q*q) + r*r*y0121 / (q*q)) / q;
CF p = B / A;
F pp = std::real(p*std::conj(p));
CF z = (pp + std::sqrt((pp*pp) + 4.*pp)) / (2.*std::conj(p));
CF w11 = 1 / s1;
CF w12 = (-r + q / z) / s2;
CF w21 = 1 / s1;
CF w22 = -(r + q*std::conj(z)) / s2;
F n1 = std::sqrt(std::real(w11*std::conj(w11) +
w12*std::conj(w12)));
F n2 = std::sqrt(std::real(w21*std::conj(w21) +
w22*std::conj(w22)));
CF wn11 = w11 / n1;
CF wn12 = w12 / n1;
CF wn21 = w21 / n2;
CF wn22 = w22 / n2;
return {wn11, wn12, wn21, wn22};
}

```

**Приложение Б. Программный код разработанного алгоритма слепого
разделения двух комплексных сигналов на языке C++ 20 с применением
библиотеки OpenCL 2.1**

```
#include <array>
#include <cassert>
#include <complex>
#include <numeric>
#include <span>

#include <CL/cl.hpp>

#pragma OPENCL EXTENSION cl_khr_fp64 : enable

using F = double;
using CF = std::complex<double>;
using CS = std::span<std::complex<double>>;
using SizeT = typename CS::size_type;

struct AccumulatedStatistics {
    CF m1000 = 0;
    CF m0010 = 0;
    CF m1100 = 0;
    CF m0011 = 0;
    CF m1001 = 0;
    CF m2000 = 0;
    CF m2100 = 0;
    CF m0020 = 0;
    CF m0021 = 0;
    CF m2001 = 0;
    CF m0120 = 0;
    CF m1010 = 0;
    CF m2101 = 0;
    CF m0121 = 0;
    CF m1110 = 0;
    CF m1011 = 0;
    CF m2200 = 0;
    CF m2002 = 0;
    CF m0022 = 0;
    CF m1111 = 0;
};

AccumulatedStatistics calculateStatistics(
```

```

std::span<std::complex<double>> x1,
std::span<std::complex<double>> x2) {
    assert(x1.size() == x2.size());
    auto&& size = x1.size();

    std::vector<cl::Platform> all_platforms;
    cl::Platform::get(&all_platforms);
    cl::Platform default_platform = all_platforms[0];

    std::vector<cl::Device> all_devices;
    default_platform.getDevices(CL_DEVICE_TYPE_ALL, &all_devices);

    cl::Device default_device = all_devices[0];
    cl::Context context({default_device});
    cl::Program transform(context,
        "void kernel transform(global const double *x1, "
        "global const double *x2, global double *y) {"
        "    const size_t gid = get_global_id(0);"
        "    global double *z = y + gid * 40;"
        "    const double r1000 = x1[2*gid];"
        "    const double i1000 = x1[2*gid+1];"
        "    const double r0100 = r1000;"
        "    const double i0100 = -i1000;"
        "    const double r0010 = x2[2*gid];"
        "    const double i0010 = x2[2*gid+1];"
        "    const double r0001 = r0010;"
        "    const double i0001 = -i0010;"
        "    const double r1100 = r1000*r0100 - i1000*i0100;"
        "    const double i1100 = 0;"
        "    const double r0011 = r0010*r0001 - i0010*i0001;"
        "    const double i0011 = 0;"
        "    const double r1001 = r1000*r0001 - i1000*i0001;"
        "    const double i1001 = r1000*i0001 + i1000*r0001;"
        "    const double r2000 = r1000*r1000 - i1000*i1000;"
        "    const double i2000 = r1000*i1000 + i1000*r1000;"
        "    const double r2100 = r2000*r0100 - i2000*i0100;"
        "    const double i2100 = r2000*i0100 + i2000*r0100;"
        "    const double r0020 = r0010*r0010 - i0010*i0010;"
        "    const double i0020 = r0010*i0010 + i0010*r0010;"
        "    const double r0021 = r0020*r0001 - i0020*i0001;"
        "    const double i0021 = r0020*i0001 + i0020*r0001;"
        "    z[0] = r1000;"
        "    z[1] = i1000;"
        "    z[2] = r0010;"
        "    z[3] = i0010;"
        "    z[4] = r1100;"
        "    z[5] = i1100;"
        "    z[6] = r0011;"
        "    z[7] = i0011;"
        "    z[8] = r1001;"
        "    z[9] = i1001;"
        "    z[10] = r2000;"

```



```

" z[11] = i2000;"
" z[12] = r2100;"
" z[13] = i2100;"
" z[14] = r0020;"
" z[15] = i0020;"
" z[16] = r0021;"
" z[17] = i0021;"
" z[18] = r2000*r0001 - i2000*i0001;"
" z[19] = r2000*i0001 + i2000*r0001;"
" z[20] = r0100*r0020 - i0100*i0020;"
" z[21] = r0100*i0020 + i0100*r0020;"
" z[22] = r1000*r0010 - i1000*i0010;"
" z[23] = r1000*i0010 + i1000*r0010;"
" z[24] = r2100*r0001 - i2100*i0001;"
" z[25] = r2100*i0001 + i2100*r0001;"
" z[26] = r0100*r0021 - i0100*i0021;"
" z[27] = r0100*i0021 + i0100*r0021;"
" z[28] = r1100*r0010 - i1100*i0010;"
" z[29] = r1100*i0010 + i1100*r0010;"
" z[30] = r1000*r0011 - i1000*i0011;"
" z[31] = r1000*i0011 + i1000*r0011;"
" z[32] = r1100*r1100 - i1100*i1100;"
" z[33] = r1100*i1100 + i1100*r1100;"
" z[34] = r1001*r1001 - i1001*i1001;"
" z[35] = r1001*i1001 + i1001*r1001;"
" z[36] = r0011*r0011 - i0011*i0011;"
" z[37] = r0011*i0011 + i0011*r0011;"
" z[38] = r1100*r0011 - i1100*i0011;"
" z[39] = r1100*i0011 + i1100*r0011;"
"}");

```

```

cl::Program reduce(
    context,
    "void kernel reduce(global double *y"
    "const unsigned int scale) {"
    "    const size_t gid = get_global_id(0);"
    "    const size_t statnum = 40;"
    "    const size_t index = gid +"
    "    (2*scale - statnum)*(gid / statnum);"
    "    y[index] = y[index] + y[index + scale];"
    "}");
cl::Buffer buffer1(context, CL_MEM_READ_ONLY, sizeof(double) *
size * 2);
cl::Buffer buffer2(context, CL_MEM_READ_ONLY, sizeof(double) *
size * 2);
cl::Buffer result_buffer(context, CL_MEM_READ_WRITE,
    sizeof(double) * size * 40);

cl::CommandQueue queue(context, default_device);
queue.enqueueWriteBuffer(buffer1, CL_TRUE, 0, sizeof(double) *
size * 2,
    x1.data());

```

```

    queue.enqueueWriteBuffer(buffer2, CL_TRUE, 0, sizeof(double) *
size * 2,
                            x2.data());

    cl::Kernel kernel_transform = cl::Kernel(transform,
"transform");
    kernel_transform.setArg(0, buffer1);
    kernel_transform.setArg(1, buffer2);
    kernel_transform.setArg(2, result_buffer);
    queue.enqueueNDRangeKernel(kernel_transform, cl::NullRange,
                              cl::NDRange(size));

    for (size_t scale = 1, s = size; scale < size; scale *= 2, s =
(s/2) + (s%2)) {
        cl::Kernel kernel_reduce = cl::Kernel(reduce, "reduce");
        kernel_reduce.setArg(0, result_buffer);
        kernel_reduce.setArg(1, static_cast<cl_uint>(40*scale));
        queue.enqueueNDRangeKernel(kernel_reduce, cl::NullRange,
                              cl::NDRange((s/2)*40));
    }
    queue.finish();

    std::array<std::complex<double>, 20> result_array;
    queue.enqueueReadBuffer(result_buffer, CL_TRUE, 0,
                            sizeof(double) * 40,
                            result_array.data());

    AccumulatedStatistics result;
    result.m1000 = result_array[0] / static_cast<double>(size);
    result.m0010 = result_array[1] / static_cast<double>(size);
    result.m1100 = result_array[2] / static_cast<double>(size);
    result.m0011 = result_array[3] / static_cast<double>(size);
    result.m1001 = result_array[4] / static_cast<double>(size);
    result.m2000 = result_array[5] / static_cast<double>(size);
    result.m2100 = result_array[6] / static_cast<double>(size);
    result.m0020 = result_array[7] / static_cast<double>(size);
    result.m0021 = result_array[8] / static_cast<double>(size);
    result.m2001 = result_array[9] / static_cast<double>(size);
    result.m0120 = result_array[10] / static_cast<double>(size);
    result.m1010 = result_array[11] / static_cast<double>(size);
    result.m2101 = result_array[12] / static_cast<double>(size);
    result.m0121 = result_array[13] / static_cast<double>(size);
    result.m1110 = result_array[14] / static_cast<double>(size);
    result.m1011 = result_array[15] / static_cast<double>(size);
    result.m2200 = result_array[16] / static_cast<double>(size);
    result.m2002 = result_array[17] / static_cast<double>(size);
    result.m0022 = result_array[18] / static_cast<double>(size);
    result.m1111 = result_array[19] / static_cast<double>(size);
    return result;
}

std::array<std::complex<double>, 4> opencl_bss(

```

```

std::span<std::complex<double>> x1,
std::span<std::complex<double>> x2) {
    const SizeT size = std::min(x1.size(), x2.size());
    if (size == 0) {
        return {1.0, 0.0, 0.0, 1.0};
    }
    x1 = x1.first(size);
    x2 = x2.first(size);

    auto&& stats = calculateStatistics(x1, x2);

    auto&& m1000 = stats.m1000;
    auto&& m0010 = stats.m0010;
    auto&& m1100 = stats.m1100;
    auto&& m0011 = stats.m0011;
    auto&& m1001 = stats.m1001;
    auto&& m2000 = stats.m2000;
    auto&& m2100 = stats.m2100;
    auto&& m0020 = stats.m0020;
    auto&& m0021 = stats.m0021;
    auto&& m2001 = stats.m2001;
    auto&& m0120 = stats.m0120;
    auto&& m1010 = stats.m1010;
    auto&& m2101 = stats.m2101;
    auto&& m0121 = stats.m0121;
    auto&& m1110 = stats.m1110;
    auto&& m1011 = stats.m1011;
    auto&& m2200 = stats.m2200;
    auto&& m2002 = stats.m2002;
    auto&& m0022 = stats.m0022;
    auto&& m1111 = stats.m1111;

    CF m0100 = std::conj(m1000);
    CF m0001 = std::conj(m0010);
    CF m0110 = std::conj(m1001);
    CF m1101 = std::conj(m1110);
    CF m0101 = std::conj(m1010);
    CF m0111 = std::conj(m1011);
    CF m1200 = std::conj(m2100);
    CF m0200 = std::conj(m2000);
    CF m0012 = std::conj(m0021);
    CF m0002 = std::conj(m0020);
    CF m0210 = std::conj(m2001);
    CF m0220 = std::conj(m2002);
    CF m1002 = std::conj(m0120);
    CF m1210 = std::conj(m2101);
    CF m1012 = std::conj(m0121);

    F k1100 = std::real(m1100 - m1000*m0100);
    F k0011 = std::real(m0011 - m0010*m0001);
    CF k1001 = m1001 - m1000*m0001;

```

```

CF k1111 = - 6.*m0001*m0010*m0100*m1000 + 2.*m0001*m0010*m1100 +
2.*m0001*m0100*m1010 + 2.*m0001*m0110*m1000 + 2.*m0010*m0100*m1001 +
2.*m0010*m0101*m1000 + 2.*m0011*m0100*m1000 - m0001*m1110 -
m0010*m1101 - m0011*m1100 - m0100*m1011 - m0101*m1010 - m0110*m1001
- m0111*m1000 + m1111;
CF k2200 = -6.*m0100*m0100*m1000*m1000 + 2.*m0100*m0100*m2000 +
8.*m0100*m1000*m1100 - 2.*m0100*m2100 + 2.*m0200*m1000*m1000 -
m0200*m2000 - 2.*m1000*m1200 - 2.*m1100*m1100 + m2200;
CF k0022 = -6.*m0001*m0001*m0010*m0010 + 2.*m0001*m0001*m0020 +
8.*m0001*m0010*m0011 - 2.*m0001*m0021 + 2.*m0002*m0010*m0010 -
m0002*m0020 - 2.*m0010*m0012 - 2.*m0011*m0011 + m0022;
CF k0220 = -6.*m0010*m0010*m0100*m0100 + 2.*m0010*m00010*m0200 +
8.*m0010*m0100*m0110 - 2.*m0010*m0210 + 2.*m0020*m0100*m0100 -
m0020*m0200 - 2.*m0100*m0120 - 2.*m0110*m0110 + m0220;
CF k2002 = -6.*m0001*m0001*m1000*m1000 + 2.*m0001*m0001*m2000 +
8.*m0001*m1000*m1001 - 2.*m0001*m2001 + 2.*m0002*m1000*m1000 -
m0002*m2000 - 2.*m1000*m1002 - 2.*m1001*m1001 + m2002;
CF k2101 = -6.*m0001*m1000*m1000*m0100 + 4.*m0001*m1000*m1100 +
2.*m0001*m1001*m0100 + 2.*m0001*m2000*m0100 - m0001*m2100 +
2.*m1000*m1000*m0101 + 2.*m1000*m1001*m0100 - 2.*m1000*m1101 -
2.*m1001*m1100 - m2000*m0101 - m2001*m0100 + m2101;
CF k1012 = -6.*m1000*m0001*m0001*m0010 + 4.*m1000*m0001*m0011 +
2.*m1000*m1001*m0010 + 2.*m1000*m0002*m0010 - m1000*m0012 +
2.*m0001*m0001*m1010 + 2.*m0001*m1001*m0010 - 2.*m0001*m1011 -
2.*m1001*m0011 - m0002*m1010 - m1002*m0010 + m1012;
F s1 = std::sqrt(k1100); assert(s1 > 0);
F s2 = std::sqrt(k0011); assert(s2 > 0);
CF r = k1001 / (s1*s2);
assert((-1 < std::abs(r)) && (std::abs(r) < 1));
CF y1111 = k1111 / (s1*s1*s2*s2);
CF y2200 = k2200 / (s1*s1*s1*s1);
CF y0022 = k0022 / (s2*s2*s2*s2);
CF y2002 = k2002 / (s1*s1*s2*s2);
CF y2101 = k2101 / (s1*s1*s1*s2);
CF y1012 = k1012 / (s1*s2*s2*s2);
CF y0121 = std::conj(y1012);
F q = std::sqrt(1. - std::real(r*std::conj(r)));
CF A = (y0022*r*r - 2.*y1012*r + y2002) / (q*q);
CF B = (y0022*r - y0022*r*r*std::conj(r) / (q*q) - y1012 +
2.*y1012*r*std::conj(r) / (q*q) - 2.*y1111*r / (q*q) -
y2002*std::conj(r) / (q*q) + y2101 / (q*q) + r*r*y0121 / (q*q)) / q;
CF p = B / A;
F pp = std::real(p*std::conj(p));
CF z = (pp + std::sqrt((pp*pp) + 4.*pp)) / (2.*std::conj(p));
CF w11 = 1 / s1;
CF w12 = (-r + q / z) / s2;
CF w21 = 1 / s1;
CF w22 = -(r + q*std::conj(z)) / s2;
F n1 = std::sqrt(std::real(w11*std::conj(w11) +
w12*std::conj(w12)));
F n2 = std::sqrt(std::real(w21*std::conj(w21) +
w22*std::conj(w22)));

```

```
CF wn11 = w11 / n1;  
CF wn12 = w12 / n1;  
CF wn21 = w21 / n2;  
CF wn22 = w22 / n2;  
return {wn11, wn12, wn21, wn22};  
}
```