

Ордена Трудового Красного Знамени
федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский технический университет связи и информатики»

На правах рукописи

Смирнов Алексей Эдуардович

**ИССЛЕДОВАНИЕ И РАЗРАБОТКА
АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В СИСТЕМАХ
БЕСПРОВОДНОЙ СВЯЗИ С БОЛЬШИМ КОЛИЧЕСТВОМ АНТЕНН**

Специальность 05.12.13 - Системы, сети и устройства телекоммуникаций

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
доктор технических наук,
профессор Крейнделин В.Б.

Москва, 2019

Оглавление

Введение	4
1. Исследование и анализ известных алгоритмов демодуляции сигналов для систем беспроводной связи ММО	12
1.1 Системы беспроводной связи с большим количеством антенн	12
1.2 Математическая модель системы беспроводной связи с большим количеством антенн	19
1.3 Известные алгоритмы демодуляции в системах ММО	20
1.3.1 Метод максимального правдоподобия	21
1.3.2 Метод обнуления (декоррелятор)	22
1.3.3 Алгоритм демодуляции ММО	23
1.4 Исследование помехоустойчивости известных алгоритмов демодуляции	24
1.5 Вычислительная сложность алгоритмов	29
1.6 Выводы	31
2. Новая реализация известного алгоритма демодуляции ММО для систем связи massive ММО	32
2.1 Оценка вычислительной сложности известных линейных алгоритмов демодуляции	32
2.2 Новая реализация известного алгоритма демодуляции ММО для систем massive ММО	39
2.3 Анализ вычислительной сложности новой реализации известного алгоритма демодуляции ММО	52
2.4 Выводы	60
3. Итерационный алгоритм демодуляции для систем massive ММО с низкой вычислительной сложностью	61
3.1 Итерационный алгоритм демодуляции для систем massive ММО	61

3.2	Анализ вычислительной сложности разработанного итерационного алгоритма демодуляции для систем massive MIMO	68
3.3	Исследование помехоустойчивости разработанного итерационного алгоритма демодуляции для систем massive MIMO	75
3.4	Алгоритм вычисления дисперсий ошибок демодуляции для систем связи с помехоустойчивым кодированием и мягким декодированием.....	82
3.5	Анализ вычислительной сложности разработанного алгоритма приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции для систем связи с помехоустойчивым кодированием	87
3.6	Совместное использование разработанных алгоритмов в системах связи massive MIMO с помехоустойчивым кодированием.....	90
3.7	Выводы.....	106
4.	Оценка возможности практической реализации разработанных алгоритмов в системах беспроводной связи.....	108
4.1	Основные характеристики цифровых сигнальных процессоров ..	108
4.2	Исследование существующих сигнальных процессоров	111
4.3	Оценка возможности применения ЦСП для реализации алгоритмов демодуляции	114
4.4	Возможность реализации разработанных алгоритмов с использованием программируемых логических интегральных схем	122
4.5	Выводы.....	126
	Заключение	127
	Сокращения и обозначения	129
	Литература.....	131
	Приложение 1	144
	Приложение 2	147
	Приложение 3	148
	Приложение 4	152
	Приложение 5	156

Введение

Актуальность темы. Развитие новых стандартов систем беспроводной связи определяет повышение скоростей передачи информации и увеличение количества обслуживаемых абонентов. Увеличить скорость передачи информации в системах беспроводной связи можно путём увеличения либо ширины полосы частот канала, либо отношения сигнал/шум. Так как частотные ресурсы по большей части уже распределены и при этом ограничены, то прибегнуть к варианту увеличения ширины полосы частот канала без создания помех другим системам связи, использующие смежные частотные каналы, становится невозможным [1],[2].

Другой способ увеличения скорости передачи информации – использование в системах беспроводной связи технологии MIMO (Multiple Input Multiple Output), которая подразумевает наличие нескольких антенн на передающей стороне и нескольких антенн на приёмной стороне. По сравнению с системами связи, использующими технологию SISO (Single Input Single Output), в которых на приёмной и передающей сторонах используется одна антенна, системы связи MIMO позволяют увеличить скорость передачи информации за счёт пространственного мультиплексирования и помехоустойчивость за счёт пространственного разнесения [1],[3],[4].

Существует несколько режимов работы систем беспроводной связи MIMO: пространственное мультиплексирование, формирование луча, пространственно-временное кодирование, прекодирование, множественный доступ с пространственным разделением [5]–[8]. В зависимости от выбранного режима работы системы беспроводной связи достигаются те или иные преимущества использования многоантенных систем, в частности:

- повышение помехоустойчивости системы;
- повышение скорости передачи информации в системе связи.

Использование технологии ММО является неотъемлемой частью стандартов сотовой связи LTE [9] и LTE-Advanced [10],[11]. Более того, данная технология рассматривается как основополагающая в системах беспроводного доступа пятого поколения 5G [11]. Однако для разрабатываемого стандарта мобильной связи пятого поколения недостаточно потенциала существующей технологии ММО, так как требуемая стандартом скорость передачи информации гораздо выше, чем у существующих стандартов. Поэтому для систем 5G будет использоваться несколько иная реализация технологии ММО, так называемая massive ММО, при использовании которой количество антенн на передающей и приемной сторонах измеряется сотнями [12]–[19]. Кроме того, особенностью технологии massive ММО является то, что количество антенн на базовой станции во много раз превышает количество антенн на абонентском терминале [12],[13]. Внедрение технологии massive ММО позволяет еще больше повысить ёмкость сети по сравнению с технологией ММО [12].

Технология ММО позволяет осуществлять передачу нескольких сигналов с независимыми информационными символами, используя одни и те же частотно-временные ресурсы. Канал передачи каждого сигнала имеет собственные характеристики, которые описываются комплексным коэффициентом передачи между соответствующей передающей и приёмной антенной. Таким образом, знание коэффициентов передачи на приёмной стороне позволяет разделить сигналы, переданные по разным каналам [1],[4],[5]. Для решения этой задачи на приемной стороне используются известные алгоритмы демодуляции [1]. Среди них наилучшими характеристиками помехоустойчивости приёма сигнала обладает метод максимального правдоподобия (МП) [1], но требуемое им количество элементарных арифметических операций, называемое *вычислительной сложностью*, экспоненциально зависит от количества передающих антенн. Кроме того, вычислительная сложность метода МП также зависит от порядка модуляции [1]. Поэтому область использования данного алгоритма ограничена системами с небольшим количеством передающих антенн и низким порядком модуляции.

Помимо метода МП для демодуляции сигнала в системах ММО может быть использован алгоритм, оптимальный по критерию минимума среднеквадратической ошибки (МСКО) [1],[4],[5]. Данный алгоритм позволяет получить наилучшую помехоустойчивость приёма сигнала среди всех линейных алгоритмов демодуляции. Вычислительная сложность алгоритма МСКО зависит только от количества передающих и приёмных антенн, ввиду чего она ниже, чем у метода МП. Но использование данного алгоритма в системах massive ММО становится невозможным из-за его возрастающей вычислительной сложности.

На данный момент задача снижения вычислительной сложности алгоритмов обработки сигналов на приёмной стороне является одной из приоритетных для дальнейшего развития систем связи massive ММО [16],[17],[20]. Кроме того, использование помехоустойчивого кодирования с мягкими оценками на входе декодера в системах беспроводной связи дополнительно требует знания дисперсий ошибок демодуляции, вычисление которых предусмотрено известными алгоритмами демодуляции. При разработке новых алгоритмов демодуляции необходимо также разработать алгоритм вычисления дисперсий ошибок демодуляции для систем беспроводной связи с помехоустойчивым кодированием.

Степень разработанности темы. Вопросами изучения технологии ММО, разработки и снижения вычислительной сложности алгоритмов цифровой обработки сигналов занимались многие российские ученые, в том числе А.М. Шлома, М.Г. Бакулин, А.Г. Флакман, В.И. Джиган, М.А. Быховский, Ю.С. Шинаков, М.С. Немировский. Также эта тематика была отражена в работах иностранных ученых: Vlahut R., Larsson E.G., Wuebben D., R. Ghods B., Fadlallah Y., Jeon Ch., Guo Q.

В основном, работы посвящены анализу помехоустойчивости систем ММО, а также предлагаются различные варианты снижения вычислительной сложности алгоритмов обработки сигналов за счет потерь в помехоустойчивости.

Целью настоящей работы является снижение вычислительной сложности алгоритмов демодуляции сигнала для систем связи massive ММО при допустимых потерях в помехоустойчивости приёма.

Решаемые задачи. Для достижения цели в настоящей работе решаются следующие задачи:

1. Разработать модифицированный алгоритм демодуляции МСКО с меньшей вычислительной сложностью без потерь в помехоустойчивости.
2. Для систем связи massive MIMO разработать новый итерационный алгоритм демодуляции с меньшей вычислительной сложностью при допустимых потерях в помехоустойчивости по сравнению с известным алгоритмом демодуляции МСКО.
3. Разработать новый алгоритм вычисления дисперсий ошибок демодуляции, вычислительная сложность которого ниже, чем у известного алгоритма, для систем massive MIMO с «мягким» по входу декодером помехоустойчивого кода.

Методы решения. Для решения поставленных задач проводились исследования и разработки по двум направлениям:

1. Исследование известных линейных и нелинейных алгоритмов демодуляции в системах беспроводной связи, использующих технологию MIMO. Разработка новых алгоритмов демодуляции с меньшей вычислительной сложностью по сравнению с известным алгоритмом демодуляции МСКО.
2. Разработка нового алгоритма вычисления дисперсий ошибок демодуляции с меньшей вычислительной сложностью по сравнению с известными алгоритмами.

Задача разработки новых алгоритмов решалась с использованием методов быстрого умножения матриц и комплексных чисел [21]–[24], а также с применением численных методов [25]–[30].

Оценка эффективности известных и разрабатываемых алгоритмов проводилась путем имитационного моделирования с использованием программного обеспечения MATLAB [31]–[34].

Практическая ценность разработанных алгоритмов определялась с точки зрения сравнительного анализа помехоустойчивости и вычислительной сложности

известных и разработанных алгоритмов, а также с точки зрения возможности упрощения устройств цифровой обработки сигнала.

Методы научного исследования. Основные результаты были получены на основе использования методов статистической радиотехники [35],[36], теории связи [2],[37], теории алгоритмов [38],[39], имитационного компьютерного моделирования [33],[40].

Для исследования в работе используется следующий математический аппарат: общая теория связи [2], теория численных методов и линейная алгебра [25],[26],[43], теория вычислительной сложности алгоритмов [21],[44],[45].

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Разработана модификация наилучшего линейного алгоритма демодуляции МСКО, снижающая его вычислительную сложность без потерь в помехоустойчивости приёма сигнала.
2. Разработан новый итерационный алгоритм демодуляции, вычислительная сложность которого в несколько раз меньше известного алгоритма МСКО при допустимых потерях в помехоустойчивости, для систем massive MIMO.
3. Разработан новый алгоритм вычисления дисперсий ошибок демодуляции для систем massive MIMO с «мягким» по входу декодером помехоустойчивого кода.

Теоретическая значимость работы заключается в разработке новых алгоритмов демодуляции для систем massive MIMO.

Практическая ценность диссертации состоит в следующем:

1. Предложена новая процедура реализации известного алгоритма демодуляции МСКО с меньшей вычислительной сложностью.
2. Предложен новый итерационный алгоритм демодуляции, реализация которого для систем massive MIMO возможна.
3. Предложенный новый алгоритм вычисления дисперсий ошибок демодуляции обладает меньшей вычислительной сложностью по сравнению с известным алгоритмом.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Использование разработанного алгоритма А4, включающего в себя алгоритмы А1, А2, А3, в системах massive MIMO позволяет снизить вычислительную сложность демодуляции сигнала в 2 раза без потерь в помехоустойчивости по сравнению с наилучшим среди линейных алгоритмов демодуляции МСКО.

2. Использование разработанных алгоритмов А7 и А8 для систем massive MIMO с модуляцией 4-ФМ и помехоустойчивым кодированием позволяет снизить вычислительную сложность демодуляции в 5 раз при антенных конфигурациях 64×64 и 128×128 с потерями в 0,05 дБ по уровню коэффициента ошибки по кадрам $FER = 10^{-2}$ по сравнению с известным алгоритмом демодуляции МСКО. При этом потери в помехоустойчивости приёма по уровню $BER = 10^{-5}$ не превышают 0,1 дБ.

3. Использование разработанных алгоритмов А7 и А8 для систем massive MIMO с модуляцией 16-КАМ и помехоустойчивым кодированием позволяет снизить вычислительную сложность демодуляции в 2,5 раза при антенной конфигурации 64×64 и в 3,5 раза при антенной конфигурации 128×128 с потерями в 1 дБ и 0,2 дБ по уровню коэффициента ошибки по кадрам $FER = 10^{-2}$ по сравнению с известным алгоритмом демодуляции МСКО соответственно. При этом потери в помехоустойчивости приёма по уровню $BER = 10^{-5}$ при антенной конфигурации 128×128 не превышают 1 дБ.

Использование и внедрение результатов работы. Результаты диссертационной работы в части снижения вычислительной сложности алгоритмов демодуляции систем связи MIMO были использованы и внедрены в АО «Крафтвэй корпорэйшн ПЛС» при разработке материнских плат с Wi-Fi модулями, что подтверждено соответствующим актом о внедрении.

Результаты исследований в части анализа вычислительной сложности алгоритмов обработки сигналов на приёмной стороне для систем связи MIMO, а также в части разработки алгоритмов демодуляции сигнала использованы в

учебном процессе МТУСИ и отражены в курсе лекций по дисциплине «Моделирование инфокоммуникационных систем», что подтверждено соответствующим актом. Издан лабораторный практикум по дисциплине «Моделирование инфокоммуникационных систем» [6].

Копии актов о внедрении и использовании результатов работы включены в приложение 1.

Апробация диссертации. Основные результаты диссертационной работы обсуждались на следующих научных конференциях: Международный форум информатизации (МФИ-2014), Москва, 2014 г.; Международная научно-техническая конференция «Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения» (INTERMATIC-2015), Москва, 2015 г.; 70-я международная конференция «Радиоэлектронные устройства и системы для инфокоммуникационных технологий – РЭУС-2015», посвященная дню Радио, Москва, 2015 г.; 11-я международная научно-техническая конференция «Перспективные технологии в средствах передачи информации», Владимир, 2015г.; Международная научно-техническая конференция «Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения» (INTERMATIC-2016), Москва, 2016 г.; 20-я международная конференция «Цифровая обработка сигналов и её применение», Москва, 2018 г; Международная научно-техническая конференция «Systems of signals generating and processing in the field of on board communications», Москва, 2018 г.; Международная научно-техническая конференция «Телекоммуникационные и вычислительные системы – 2018», Москва, 2018 г.

Личный вклад автора. В диссертации представлены результаты исследований, выполненные самим автором. Личный вклад автора состоит в разработке алгоритмов, обобщении полученных результатов и формулировке выводов.

Публикации. Основные положения диссертации опубликованы в ведущих рецензируемых научно-технических журналах, входящих в Перечень ВАК Минобрнауки России (3 работы), в том числе индексируемых в международной базе данных Scopus (1 работа) , а также в материалах международных конференций

(7 работ), в том числе в издании, индексируемом в международной базе данных Web of Science (1 работа). Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Всего опубликовано 11 работ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка сокращений и обозначений, списка литературы, а также 5 приложений. Общий объем диссертации составляет 159 страниц. Материал диссертации иллюстрируется 20 рисунками и 32 таблицей. Список литературы содержит 127 наименований.

1. Исследование и анализ известных алгоритмов демодуляции сигналов для систем беспроводной связи MIMO

В данной главе рассмотрены фундаментальные основы систем связи с несколькими передающими и несколькими приёмными антеннами, показаны их отличия от традиционных систем связи с одной антенной.

Рассмотрены известные алгоритмы демодуляции сигнала в системах беспроводной связи, работающих в режиме пространственного мультиплексирования, согласно архитектуре V-BLAST, и реализованных с использованием технологии MIMO.

Проведен сравнительный анализ помехоустойчивости известных алгоритмов демодуляции для систем связи с применением технологии MIMO различных конфигураций. Отмечено, что наилучшими характеристиками помехоустойчивости среди известных алгоритмов демодуляции, обладает метод максимального правдоподобия. Также показано, что использование данного алгоритма практически невозможно для систем MIMO с антенной конфигурацией более 4×4 и модуляцию высокого порядка.

Описана проблема отсутствия практически реализуемых демодуляторов для систем связи, использующих технологию massive MIMO.

1.1 Системы беспроводной связи с большим количеством антенн

Системы связи с M передающими антеннами и N приёмными антеннами в общем виде можно представить структурой, приведенной на рисунке 1 [1],[4],[46].

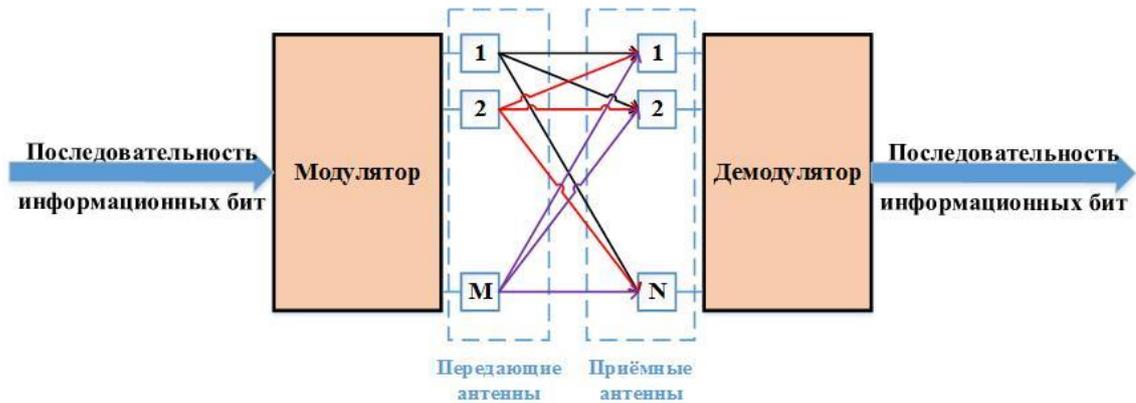


Рисунок 1. Структурная схема системы MIMO

Использование технологии MIMO подразумевает выбор режима работы системы беспроводной связи [47]: пространственное мультиплексирование, пространственно-временное кодирование, формирование луча. В зависимости от выбранного режима работы применение технологии MIMO позволяет достичь различных преимуществ: повысить скорость передачи информации, повысить спектральную эффективность за счет разнесения в пространстве. Благодаря наличию эффекта многолучевого распространения между приёмником и передатчиком, каждый из передаваемых сигналов многократно отражается от различных препятствий на пути распространения сигнала, что позволяет формировать независимые пути прохождения радиоволн между каждой передающей и каждой приемной антеннами. Таким образом, технология MIMO позволяет извлечь пользу из эффекта многолучевости: помимо времени и частоты появляется еще один ресурс системы связи – пространство, позволяющий разделять сигналы, имеющие различные пути распространения между передатчиком и приёмником [1],[4]. Кроме того, благодаря разнесению в пространстве антенн, как на передающей, так и на приемной сторонах, уменьшается корреляция между комплексными коэффициентами передачи всех трактов распространения сигналов от всех передающих антенн ко всем приемным антеннам, что позволяет повысить эффективность обработки сигналов на приемной стороне.

В 1996 году Жерардом Фошини была предложена архитектура BLAST (Bell Labs Layered Space Time), реализующая пространственное мультиплексирование с использованием нескольких антенн путем смешения сигналов в канале связи без прекодирования [48]. При этом интерферирующее воздействие передаваемых одновременно сигналов друг на друга описывается комплексными коэффициентами передачи между соответствующей передающей и приёмной антенной. Совокупность данных коэффициентов для всех антенн представляет собой матрицу, число строк которой равно количеству приёмных антенн, а число столбцов – количеству передающих антенн.

На рисунке 2 приведена иллюстрация работы передатчика с пространственным мультиплексированием, где S/P – последовательно-параллельное преобразование.

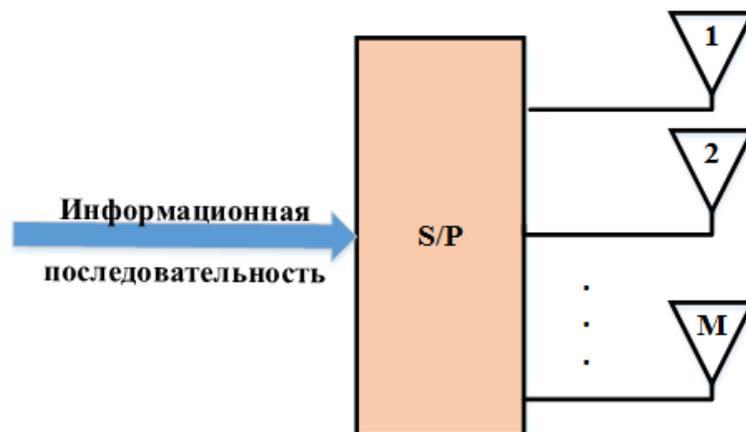


Рисунок 2. Схема работы передатчика с пространственным мультиплексированием

В системах с пространственным мультиплексированием каждая передающая антенна имеет свою диаграмму направленности и излучает отличные от других антенн информационные символы, за счёт чего и повышается максимальная скорость передачи данных [4],[48]–[50]. Все передающие и приёмные антенны разнесены в пространстве.

Принцип действия систем связи архитектуры BLAST заключается в следующем:

1. Последовательность комплексных информационных символов модулируется, а затем преобразуется в последовательность блоков, в каждом из которых M символов;

2. Все передающие антенны одновременно на одной и той же частоте с одинаковой мощностью излучают разные символы поступившей на вход информационной последовательности.

3. Разделение символов при приёме происходит за счёт знания комплексных коэффициентов передачи между каждой передающей и каждой приёмной антенной. Как следует из пункта 2, формирование параллельных потоков происходит не за счет частотного или временного разделения, а за счет пространственного разделения.

В случае, если длительность одного комплексного информационного символа – τ , то длительность блока – $M\tau$. Таким образом, ширина спектра излучаемого сигнала в M раз меньше, чем ширина спектра исходного модулированного сигнала. Отсюда следует, что использование архитектуры BLAST обеспечивает очень высокую спектральную эффективность системы связи.

Структурная схема системы связи на основе архитектуры V-BLAST (Vertical Bell Labs Layered Space Time) изображена на рисунке 3.

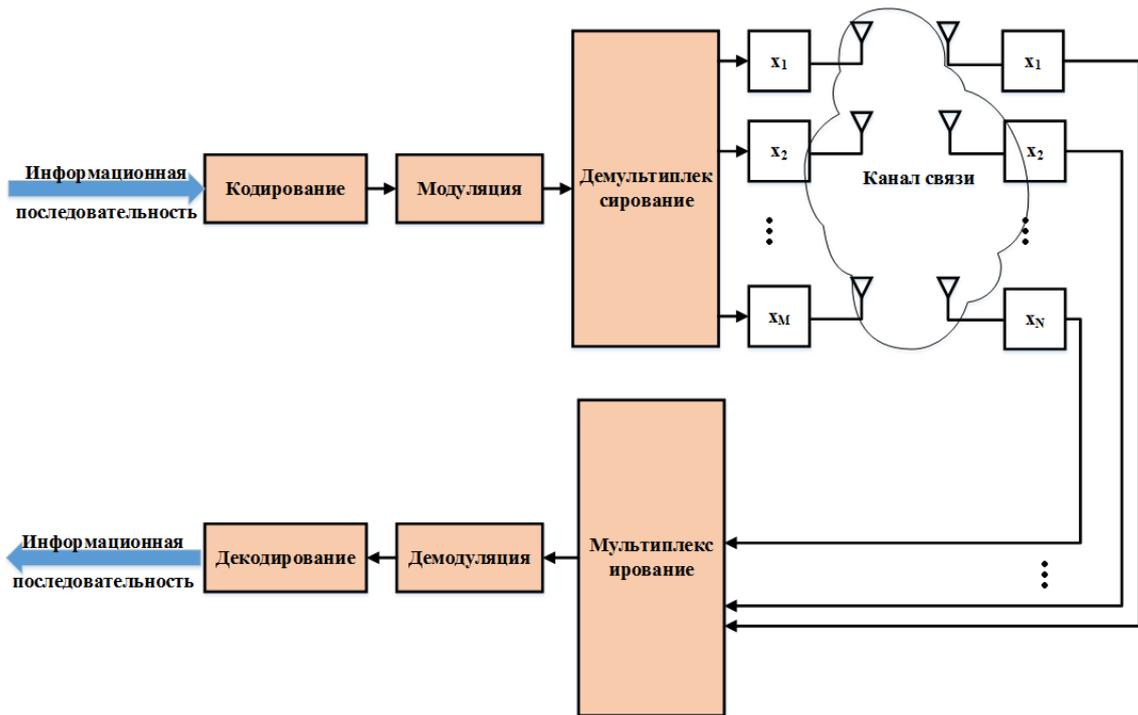


Рисунок 3. Структурная схема архитектуры V-BLAST

Развитие многоантенных систем по пути увеличения числа антенн на передающей и приёмной сторонах привело к появлению технологии massive MIMO. Использование антенных конфигураций высоких порядков massive MIMO подразумевает размещение десятков приёмопередатчиков на базовых станциях [12],[51]. Технология MIMO подразумевает использование меньшего количества антенн. Характерными примерами использования данной технологии являются многоантенные системы, конфигурация которых описана в версиях стандартов для существующих беспроводных систем передачи данных, то есть IEEE 802.11ac [52] и 4G LTE-A [10]: 8 антенн на приёмной стороне и 8 антенн на передающей стороне. Для стандарта LTE-A 15 версии [53] уже предусматривается до 32 антенн на передающей стороне и до 8 антенн на приёмной стороне. Основные характеристики данных стандартов приведены в таблице 1.

Таблица 1. Характеристик современных стандартов беспроводной передачи данных

Стандарт	IEEE 802.11ac (WiFi)	3GPP Release 11 (LTE-A)	3GPP Release 15 (NR)
Диапазон рабочих частот	5 ГГц	0.45, 0.8, 1.8, 2.6 ГГц	До 6 ГГц, 28 ГГц, 39 ГГц (до 52 ГГц)
Ширина полосы частотного канала	20, 40, 80, 160 МГц	1.4, 3, 5, 10, 15, 20, 100 МГц	100 МГц при работе на частотах до 6 ГГц, 1 ГГц при работе на частотах выше 6 ГГц
Тип многостанционного доступа	OFDM	OFDMA	OFDMA
Схемы модуляции	2-ФМ, 4-ФМ, 16-КАМ, 64-КАМ, 256-КАМ	4-ФМ, 16-КАМ, 64-КАМ	4-ФМ, 16-КАМ, 64-КАМ, 256-КАМ, 1024-КАМ
Скорость помехоустойчивого кодирования	1/2, 3/4, 5/6	1/2, 1/3	1/2, 1/3
Максимальное число элементов передающих антенн	8	8	32

К технологии massive MIMO можно отнести такие антенные конфигурации, количество антенн в которых более 8, а также такие сценарии, при которых

количество антенн на базовой станции превышает количество антенн абонентского терминала во много раз [13]. Это справедливо для случаев, когда различные пространственно мультиплексируемые потоки принадлежат различным абонентским терминалам с одной антенной у каждого, что показано на рисунке 4. Такой режим работы системы связи называется MU-MIMO (Multiuser MIMO).

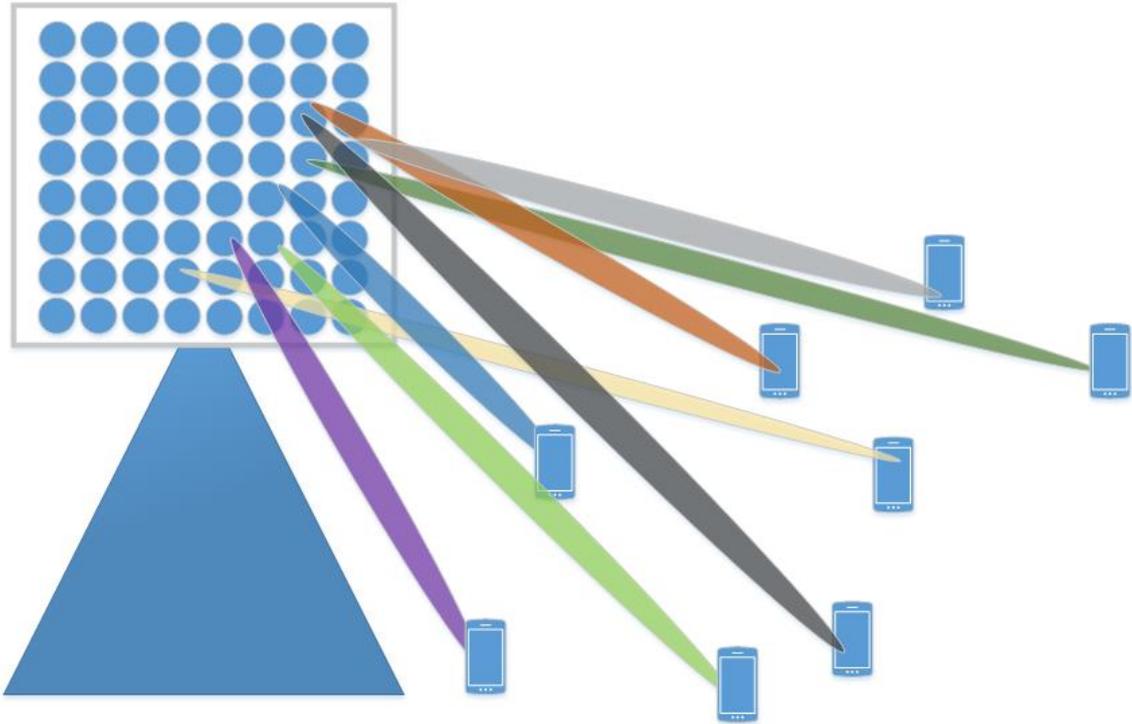


Рисунок 4. Иллюстрация реализации технологии massive MIMO

Технология massive MIMO имеет множество преимуществ по сравнению с предшествующей технологией MIMO, основными из них можно назвать следующие [5],[12],[14],[15]:

- повышение ёмкости сети;
- увеличение количества одновременно обслуживаемых абонентов;
- увеличение спектральной эффективности.

1.2 Математическая модель системы беспроводной связи с большим количеством антенн

При варианте реализации технологии ММО в режиме пространственного мультиплексирования в один и тот же промежуток времени каждой антенной излучаются сигналы с независимыми информационными символами. На приёмной стороне необходимо восстановить вектор переданных информационных символов \mathbf{x} из наблюдаемого вектора принятых комплексных отсчётов \mathbf{y} размерности N :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, \quad (1)$$

где \mathbf{H} – матрица комплексных коэффициентов передачи канала связи размерности $N \times M$ (матрица канала), \mathbf{x} – вектор переданных символов размерности M , $\boldsymbol{\eta}$ – N -мерный комплексный гауссовский случайный вектор шума в канале связи.

Эту модель системы ММО (1) с шумом можно представить в виде системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + \dots + h_{1M}x_N + \eta_1 \\ y_2 = h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + \dots + h_{2M}x_N + \eta_2 \\ \vdots \\ y_N = h_{N1}x_1 + h_{N2}x_2 + \dots + h_{NM}x_N + \eta_N \end{cases}, \quad (2)$$

где y_i – отсчёт на i -ом входе демодулятора, $i=1\dots N$, x_j – переданные независимые комплексные информационные символы, $j=1\dots M$, η_i – отсчёт комплексного гауссовского шума на i -ом входе демодулятора, h_{ij} – комплексный коэффициент передачи тракта распространения сигнала, излучаемого j -й антенной и принимаемого i -й антенной.

В целом, математически процесс демодуляции сводится к решению системы уравнений (2). К сожалению, наличие гауссовского шума может привести к ошибкам при решении системы уравнений (2). Далее рассмотрим известные

алгоритмы демодуляции, используемые в системах связи ММО, которые как раз и применяются для вычисления оценки вектора переданных символов \mathbf{x} .

1.3 Известные алгоритмы демодуляции в системах ММО

Одним из основных вопросов систем беспроводной связи является задача демодуляции принятого сигнала в многоантенных системах на приёмной стороне при известной матрице канала [1],[5],[54]. Эта задача состоит в восстановлении передаваемого сигнала на приёмной стороне из принятого вектора отсчётов при известной матрице канала и при известных статистических характеристиках шума. В общем случае приёмник получает из канала связи комбинацию сигналов, излучаемых с разных передающих антенн. После этого приёмнику необходимо разделить сигналы, излучаемые разными антеннами.

Необходимо заметить, что операции по оценке вектора переданных символов с использованием любого метода на приёмной стороне должны быть произведены в режиме реального времени, за период равный длительности одного информационного символа. С повышением скорости передачи данных в современных системах связи длительность информационного символа сокращается.

Существует известные алгоритмы [1],[5], используемые для демодуляции сигнала в многоантенных системах, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки по сравнению с другими. Использование некоторых из них позволяет получить высокую помехоустойчивость приема информации, но при этом, как следствие, имеет место высокая сложность обработки сигнала. Не всегда удаётся найти компромисс между помехоустойчивостью и сложностью, чтобы сделать выбор в пользу одного из нескольких алгоритмов. С учётом тенденции увеличения количества антенн возрастает и сложность всех известных алгоритмов демодуляции. Так, применимые для традиционных систем связи ММО, алгоритмы

демодуляции становятся не реализуемыми для систем связи massive MIMO, с точки зрения вычислительной сложности.

Для вычисления оценок переданных комплексных символов на приёмной стороне могут использоваться различные алгоритмы демодуляции [1],[4],[5],[16],[19],[55]–[59], например:

- метод обнуления (ZF), часто называемый декоррелятором;
- алгоритм, оптимальный по критерию минимума среднеквадратической ошибки (далее – алгоритм МСКО);
- метод последовательного исключения демодулированных компонент (SIC);
- метод максимального правдоподобия (МП).

Далее рассмотрим указанные алгоритмы подробнее.

1.3.1 Метод максимального правдоподобия

Оценка с использованием метода МП минимизирует квадрат нормы невязки [1],[12]:

$$\hat{\mathbf{x}}_{ML} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}^N} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2, \quad (3)$$

где \mathbf{X}^M — дискретное множество значений M -мерного вектора \mathbf{x} комплексных информационных символов. Множество \mathbf{X} определяется типом модуляции, используемым в системе. Для нахождения минимума, согласно (3), необходимо осуществить перебор по всем возможным комбинациям вектора комплексных информационных символов \mathbf{x} . В этом случае сложность вычисления оценки возрастает не только при увеличении количества антенн, и, как следствие, размерности матрицы \mathbf{H} , но и при увеличении порядка модуляции.

Метод МП обладает самыми лучшими характеристиками помехоустойчивости демодуляции вектора \mathbf{x} [1],[56],[60], но для его реализации

при использовании модуляции порядка k требуется в реальном времени произвести порядка k^M элементарных арифметических операций, что при больших значениях k и M не может быть реализовано. Тем самым область использования данного алгоритма с высокой помехоустойчивостью ограничена системами связи с небольшим количеством передающих антенн и низкими порядком модуляции.

1.3.2 Метод обнуления (декоррелятор)

Кроме метода МП для оценки вектора переданных символов на приёмной стороне, могут быть использованы два других линейных алгоритма демодуляции [1],[5],[6]: метод обнуления, иногда называемый декоррелятором, и алгоритм МСКО. Оба эти метода схожи, за исключением того, что декоррелятор не учитывает влияние шума в канале связи, в то же время он является самым простым с точки зрения вычислительной сложности по сравнению с методом МП и алгоритмом МСКО.

Математическое выражение для оценки вектора переданных символов на приёмной стороне с использованием декоррелятора выглядит следующим образом [1],[5],[6],[31],[55],[57]:

$$\hat{\mathbf{x}}_{ZF} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{y}, \quad (4)$$

где \mathbf{H}^H – эрмитово-сопряжённая к \mathbf{H} матрица.

С точки зрения вычислительной сложности, в выражении (4) самая трудоёмкая операция – обращение матрицы $(\mathbf{H}^H \mathbf{H})$.

1.3.3 Алгоритм демодуляции МСКО

Использование алгоритма МСКО даёт лучшие результаты вычисления оценки вектора переданных символов с точки зрения помехоустойчивости по сравнению с декоррелятором, так как учитывается наличие шума [57]. Алгоритм демодуляции МСКО является наилучшим среди всех линейных алгоритмов [1],[5],[6],[31],[55],[57].

Вычисление оценки вектора переданных символов с использованием алгоритма МСКО математически выглядит следующим образом:

$$\hat{\mathbf{x}}_{MMSE} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{y}, \quad (5)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица.

Отличия между (4) и (5) состоят только в том, что в (5) учитывается суммарная дисперсия действительной и мнимой компоненты вектора гауссовского шума $2\sigma^2$. Благодаря этому, помехоустойчивость алгоритма МСКО выше, чем у декоррелятора. Так же, как и при использовании декоррелятора, самой трудоемкой операцией при вычислении оценки с использованием алгоритма МСКО является операция обращения матрицы $(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I})$.

Заметим, что вычисление оценок $\hat{\mathbf{x}}_{ZF}$ и $\hat{\mathbf{x}}_{MMSE}$ вектора переданных символов на приёмной стороне сводится к математическим операциям с матрицами и векторами, элементами которых являются комплексные величины.

Оценка, полученная с использованием декоррелятора $\hat{\mathbf{x}}_{ZF}$, и оценка $\hat{\mathbf{x}}_{MMSE}$, оптимальная по критерию минимума среднеквадратической ошибки, являются наиболее простыми в вычислениях, и, как следствие, требующими меньшее количество времени для получения оценки [60].

1.4 Исследование помехоустойчивости известных алгоритмов демодуляции

Для сравнения помехоустойчивости известных алгоритмов демодуляции было произведено моделирование системы связи V-BLAST в условиях некоррелированных рэлеевских замираний [2],[40]–[42]. Анализ данных алгоритмов производится на основе оценки коэффициента битовой ошибки (BER) [40]–[42],[56],[61],[62]. Полные условия моделирования приведены в таблице 2.

Таблица 2. Параметры модели для сравнения помехоустойчивости известных алгоритмов демодуляции

Параметр	Значение
Канал связи	MIMO
Замирания в канале	Рэлеевские некоррелированные
Количество передающих антенн	4
Количество приёмных антенн	4
Архитектура	V-BLAST
Метод модуляции	16-QAM, 4-ФМ
Демодулятор	Декоррелятор, МСКО, МП
Помехоустойчивое кодирование	–

Результаты моделирования помехоустойчивости известных алгоритмов демодуляции для системы MIMO с антенной конфигурацией 4×4 при модуляции 4-ФМ приведены на рисунке 5.

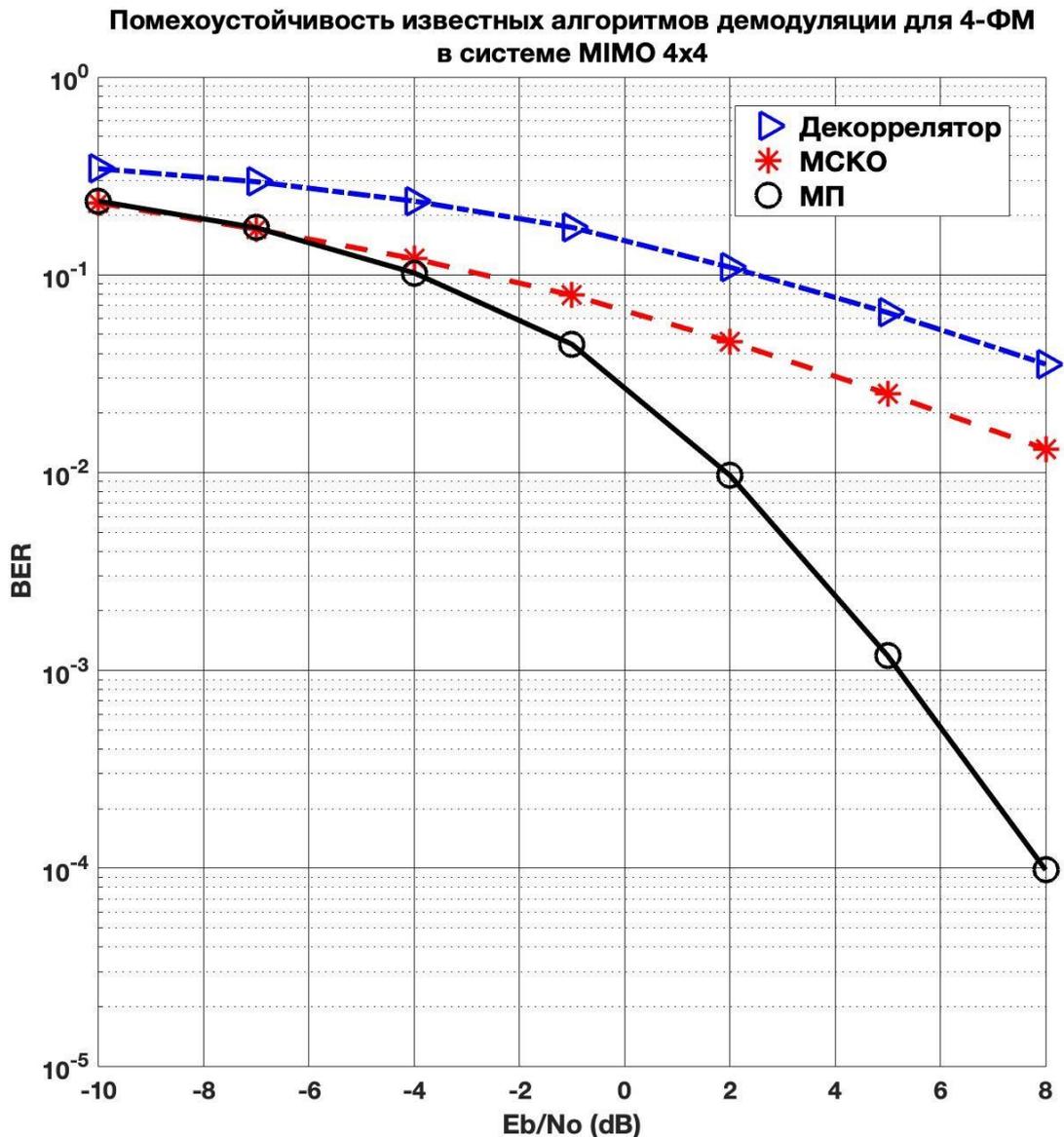


Рисунок 5. Характеристики помехоустойчивости известных алгоритмов демодуляции в системе MIMO при модуляции 4-ФМ

Результаты моделирования помехоустойчивости известных алгоритмов демодуляции для системы MIMO с антенной конфигурацией 4×4 при модуляции 16-QAM приведены на рисунке 6.

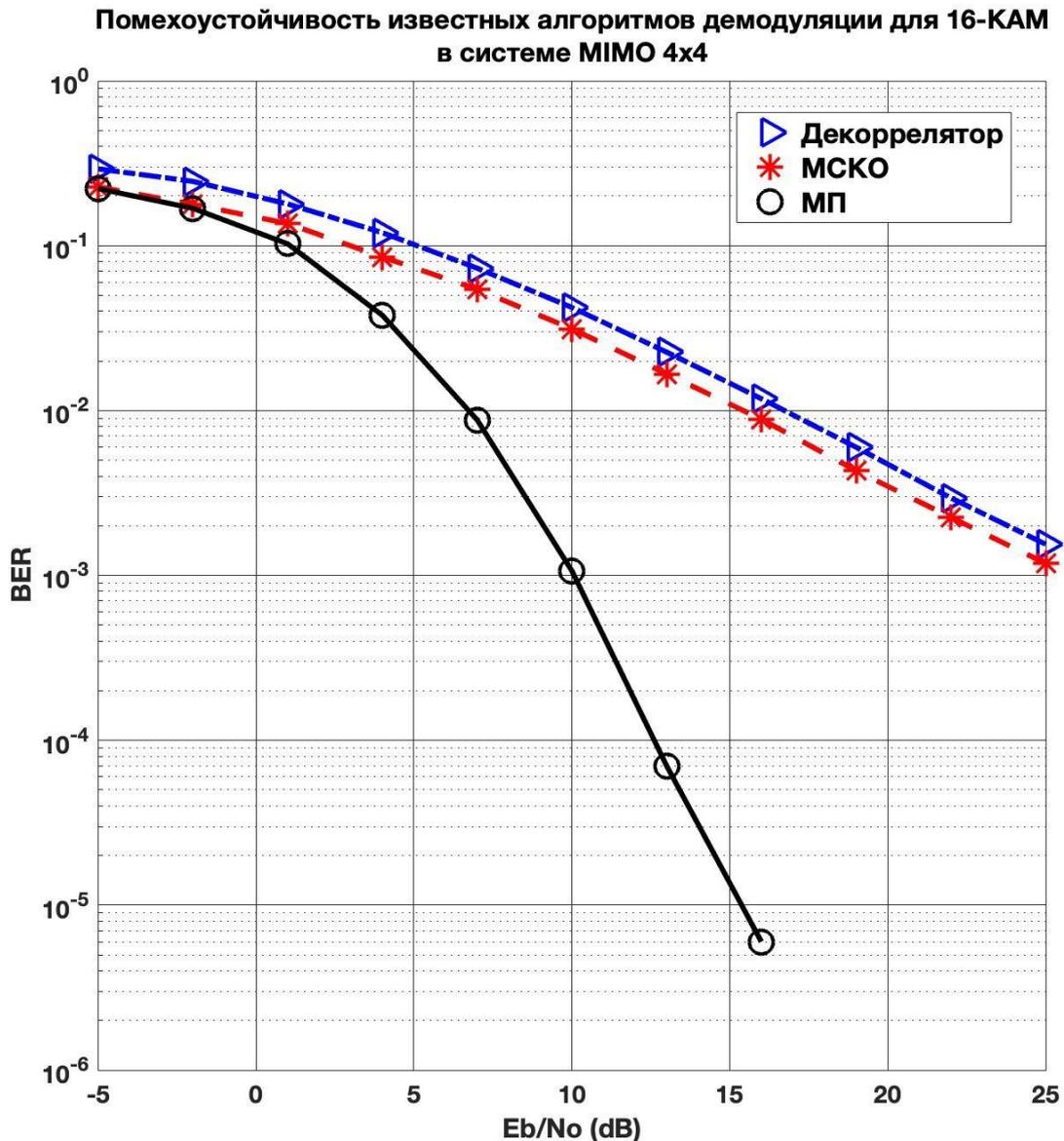


Рисунок 6. Характеристики помехоустойчивости известных алгоритмов демодуляции в системе MIMO при модуляции 16-QAM

По результатам моделирования, представленным на рисунке 5 и рисунке 6, видно, что использование алгоритма демодуляции, оптимального по критерию максимального правдоподобия, позволяет получить самые высокие показатели помехоустойчивости системы связи для разных видов модуляции. Другие алгоритмы уступают по помехоустойчивости методу МП, при этом они обладают меньшей вычислительной сложностью.

Далее сравним помехоустойчивость известных алгоритмов демодуляции декоррелятора (4) и МСКО (5) при антенных конфигурациях систем massive MIMO. Рассмотрим случай, когда антенная конфигурация равна 128×128 , а остальные параметры модели совпадают с параметрами, указанными в таблице 2.

Результаты моделирования для системы massive MIMO с антенной конфигурацией 128×128 при модуляции 4-ФМ приведены на рисунке 7.

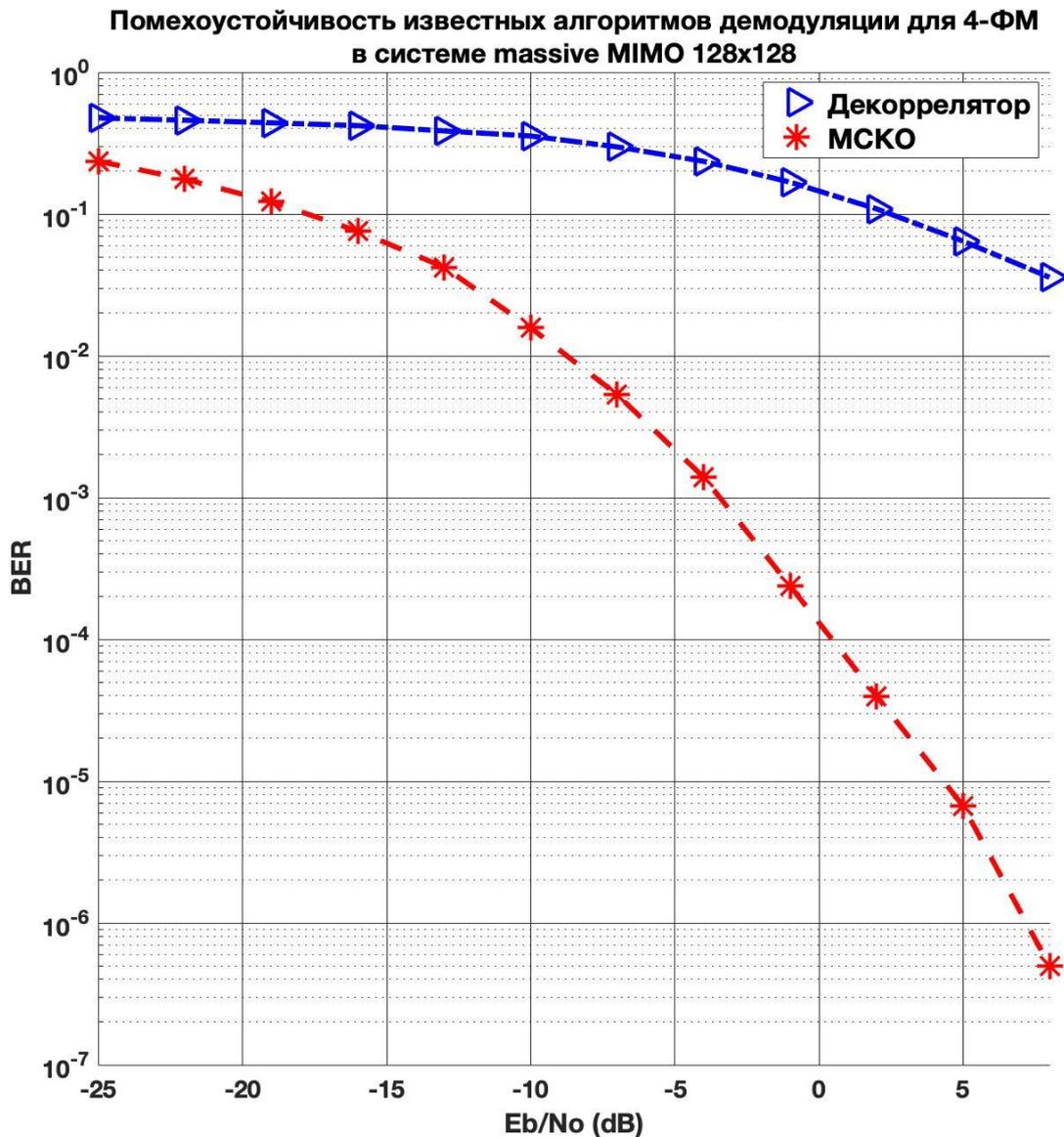


Рисунок 7. Характеристики помехоустойчивости известных алгоритмов демодуляции в системе massive MIMO при модуляции 4-ФМ

Результаты моделирования помехоустойчивости известных алгоритмов демодуляции для системы massive MIMO с антенной конфигурацией 128×128 при модуляции 16-КАМ приведены на рисунке 8.

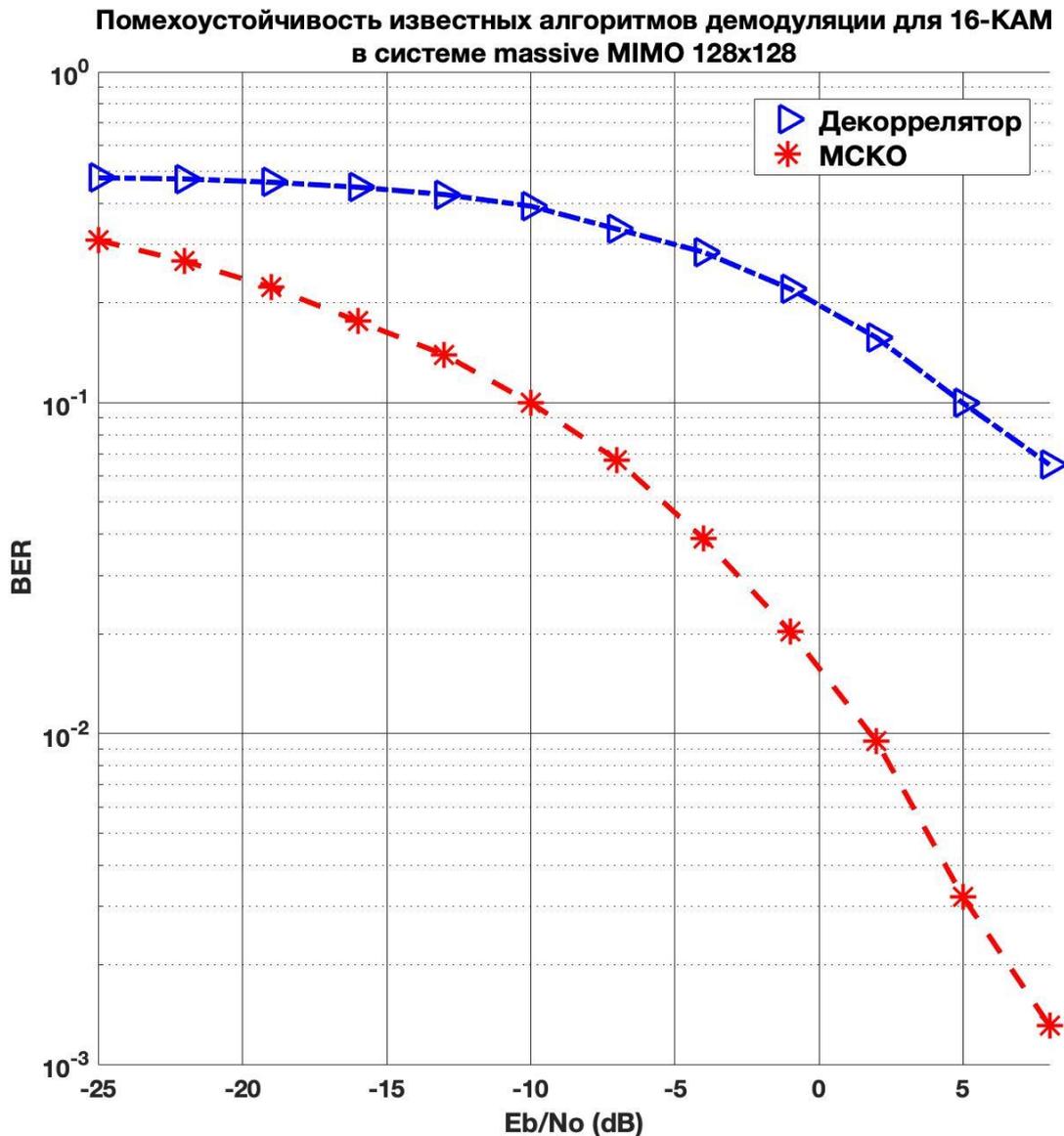


Рисунок 8. Характеристики помехоустойчивости известных алгоритмов демодуляции в системе massive MIMO при модуляции 16-КАМ

По результатам моделирования, представленным на рисунке 7 и рисунке 8, видно, что выигрыш в помехоустойчивости алгоритма МСКО перед декоррелятором сохраняется и при антенных конфигурациях систем massive

ММО. Стоит отметить, что для данной модели метод МП становится не реализуем ввиду экспоненциального роста количества комбинаций, которые необходимо перебрать, при увеличении числа передающих антенн.

1.5 Вычислительная сложность алгоритмов

Описанные линейные алгоритмы показывают не такие высокие показатели помехоустойчивости, как нелинейный метод МП [1],[5]–[8],[55],[63]. Метод МП также обладает большим недостатком, заключающимся в его высокой (экспоненциальной) [1],[4],[31],[59] вычислительной сложности, что делает невозможным применение этого метода в системах связи с использованием методов модуляции высоких порядков, а также большого количества антенн.

Математические алгоритмы можно классифицировать [44] в соответствии со сложностью их выполнения. Так как алгоритм состоит из последовательности четко определённых операций (команд) [44], то классифицировать алгоритмы можно в зависимости от количества операций, необходимых для получения результата. Часто для классификации алгоритмов используют параметр, который называется *вычислительная сложность*. Этим термином обозначают количество элементарных арифметических операций, которые необходимо выполнить для получения решения некоторой задачи.

Как можно заметить из формулы (5), количество элементарных математических операций для получения оценки $\hat{\mathbf{x}}_{MMSE}$ зависит, в первую очередь, от количества антенн на приёмной и передающей сторонах, то есть, от размера матрицы канала. Следовательно, с увеличением количества приёмных и передающих антенн возрастает количество математических операций, необходимых для получения оценки вектора переданных символов.

Оценка $\hat{\mathbf{x}}_{ZF}$, полученная по формуле (4), и оценка $\hat{\mathbf{x}}_{MMSE}$, оптимальная по критерию минимума среднеквадратической ошибки, являются наиболее простыми

в вычислениях, и, как следствие, требующими меньшее количество времени для получения оценки, но имеющими меньшую помехоустойчивость по сравнению с методом МП. Реализация метода МП требует выполнения большого количества операций.

Число операций зависит от двух параметров системы: количества передающих антенн и используемого типа модуляции. К примеру, при использовании в системе связи модуляции 16-QAM или 64-QAM при демодуляции необходимо вычислить невязку 16^M или 64^M раз соответственно. Даже в случае небольшого количества антенн на передающей стороне, например, 8, невязку нужно вычислить $16^8 = 4294967296$ раз для 16-QAM, для 64-QAM — 281474976710656 раз. Стоит отметить, что данные вычисления должны быть сделаны за период времени, не превышающий длительность одного информационного символа.

Ввиду того, что применение метода МП из-за высокой вычислительной сложности ограничено системами связи с малым количеством антенн, а декоррелятор обладает низкой помехоустойчивостью по сравнению с остальными известными алгоритмами, можно сделать вывод, что алгоритм демодуляции МСКО является основным алгоритмом демодуляции сигнала в многоантенных системах беспроводной связи. Но при переходе к антенным конфигурациям, характерным для технологии massive MIMO, сложность данного алгоритма повышается, и в некоторых случаях его реализация может быть затруднительной, так как асимптотическая сложность данного алгоритма N^3 имеет кубический порядок.

1.6 Выводы

1. Из-за увеличения количества антенн в системах massive MIMO затрудняется и в некоторых случаях становится невозможной реализация алгоритма демодуляции МСКО по причине возрастающей вычислительной сложности.

2. Актуальной задачей является снижение вычислительной сложности алгоритмов демодуляции в системах massive MIMO при допустимых потерях в помехоустойчивости по сравнению с известным алгоритмом демодуляции МСКО.

2. Новая реализация известного алгоритма демодуляции МСКО для систем связи massive MIMO

В данной главе проведен анализ вычислительной сложности известных линейных алгоритмов демодуляции, рассмотренных в параграфе 1.3, для систем беспроводной связи MIMO: декоррелятора и алгоритма МСКО, оптимального по критерию минимума среднеквадратической ошибки.

Дано описание новой реализации известного алгоритма демодуляции МСКО.

Проведен анализ вычислительной сложности новой реализации алгоритма демодуляции МСКО и сравнение с известной реализацией с точки зрения вычислительной сложности и помехоустойчивости.

Показано, что эффективность применения новой реализации известного алгоритма демодуляции МСКО увеличивается для систем связи massive MIMO по сравнению с системами MIMO.

2.1 Оценка вычислительной сложности известных линейных алгоритмов демодуляции

Для оценки вычислительной сложности произведем подсчёт элементарных арифметических операций, требуемых для получения оценки вектора переданных символов по формулам (4) и (5). К таким операциям относятся операции умножения/деления, сложения/вычитания над действительными числами с плавающей точкой [22].

В работе будем рассматривать такие антенные конфигурации для систем massive MIMO, количество антенн на передающей стороне которых равно количеству антенн на приёмной стороне, иначе говоря, $M = N$. В этом случае

формируется наибольшее количество пространственных каналов, и при этом пропускная способность канала связи будет максимальной [1].

Рассмотрим подробно выражение (4) для получения оценки $\hat{\mathbf{x}}_{ZF}$. Оно состоит из 4 операций:

1. **Вычисление произведения двух квадратных матриц размерности $N \times N$:** умножение двух комплексных матриц \mathbf{H}^H и \mathbf{H} друг на друга;
2. **Обращение эрмитовой матрицы размерности $N \times N$:** вычисление матрицы, обратной к комплексной матрице $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$;
3. **Вычисление произведения квадратной матрицы размерности $N \times N$ на вектор размерности N :** умножение комплексной матрицы \mathbf{H}^H на комплексный вектор \mathbf{y} ;
4. **Вычисление произведения квадратной матрицы размерности $N \times N$ на вектор размерности N :** умножение комплексной матрицы $(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1}$ на комплексный вектор $\mathbf{H}^H \mathbf{y}$.

Рассмотрим подробно каждую из перечисленных операций. Вычислительная сложность арифметических операций с матрицами и векторами связана с их размерностью [26],[65]. Чем больше размерность матрицы или вектора, тем большее количество арифметических операций необходимо выполнить для получения результата.

Первая арифметическая операция, выполняемая для получения оценки вектора переданных символов – умножение квадратной матрицы на матрицу той же размерности. Так как эта операция приёмным устройством выполняется в режиме реального времени, то необходимым условием является знание на приёмной стороне актуальной матрицы канала \mathbf{H} . В рамках диссертации вопрос оценивания матрицы канала \mathbf{H} при приёме не рассматривается. Считаем, что данная матрица известна на приёмной стороне [4],[31].

Известные способы умножения матриц друг на друга описаны в [64],[65]. Соответственно, для получения произведения двух квадратных матриц размерности $N \times N$ необходимо выполнить N^3 операций умножений элементов

этих матриц и $N^3 - N^2$ операций сложений элементов матриц. Так как элементы матриц \mathbf{H}^H и \mathbf{H} – комплексные величины, то все эти операции необходимо произвести над комплексными величинами.

Для унификации оценки вычислительной сложности различных операций будем производить подсчет для операций над действительными числами. Как известно [66], операция умножения двух комплексных чисел состоит из четырех операций умножения действительных чисел и двух операций сложения действительных чисел, согласно формуле (73). Операция сложения двух комплексных чисел включает в себя две операции сложения действительных чисел:

$$g_A = (q + iu) + (z + iv) = q + z + i(u + v). \quad (6)$$

Для вычисления произведения двух квадратных матриц размерности $N \times N$ необходимо выполнить N^3 операций умножения и $N^3 - N^2$ операций сложения [26],[64],[65]. Это утверждение справедливо для действительных матриц. В нашем случае необходимо вычислить произведение двух комплексных матриц размерности $N \times N$. Таким образом, с учетом выражений (6) и (73), требуемое количество элементарных арифметических операций $Z_{TRMATR}(N)$ над действительными числами, необходимых для вычисления произведения двух квадратных комплексных матриц размерности $N \times N$ [65],[67],[68]:

$$Z_{TRMATR}(N) = 4N^3 + 2N^3 + 2(N^3 - N^2) = 8N^3 - 2N^2. \quad (7)$$

В нашем случае матрица \mathbf{H}^H эрмитово-сопряженная по отношению к \mathbf{H} , то есть, матрицы \mathbf{H}^H и \mathbf{H} содержат комплексно-сопряженные элементы, а результатом произведения матриц \mathbf{H}^H и \mathbf{H} друг на друга является эрмитова матрица [65]. Таким образом, количество операций для вычисления произведения матриц \mathbf{H}^H и \mathbf{H} может быть снижено за счет вычисления только поддиагональных (наддиагональных) элементов. Подробный расчёт сложности вычисления произведения матриц \mathbf{H}^H и \mathbf{H} друг на друга приведен в приложении 5.

Следующая операция, согласно формуле (4) – обращение квадратной комплексной матрицы размерности $N \times N$.

С учётом того, что матрицы \mathbf{H}^H и \mathbf{H} эрмитово-сопряженные, и, следовательно, матрица $(\mathbf{H}^H \mathbf{H})$ – эрмитова, то для точного вычисления матрицы, обратной к $(\mathbf{H}^H \mathbf{H})$, будем использовать формулу Фробениуса [26]. Подробное описание применения формулы Фробениуса для обращения матриц приведено в приложении 5. Вычислительная сложность данной операции рассчитывается по формуле (87).

Третья операция декоррелятора (4) – вычисление произведения квадратной комплексной матрицы размерности $N \times N$ на комплексный вектор размерности N . Эта операция требует выполнения N^2 операций умножения и $N^2 - N$ операций сложения над комплексными величинами, или $4N^2$ операций умножения и $2N^2 - 2(N^2 - N)$ операций сложения над действительными числами.

Обозначим $Z_{TRMATVEC}(N)$ общее количество элементарных арифметических операций для вычисления произведения комплексной матрицы $N \times N$ на комплексный вектор размерности N следующим образом [65],[67],[68]:

$$Z_{TRMATVEC}(N) = 4N^2 + 2N^2 - 2(N^2 - N) = 8N^2 - 2N. \quad (8)$$

Стоит отметить, что операцию вычисления произведения квадратной комплексной матрицы размерности $N \times N$ на комплексный вектор размерности N необходимо выполнить 2 раза для вычисления оценки $\hat{\mathbf{x}}_{ZF}$ с использованием декоррелятора по формуле (4). Причем для вычисления произведения матрицы $(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1}$ на результирующий вектор $\mathbf{H}^H \mathbf{y}$ количество операций также может быть сокращено по сравнению с операцией произведения матрицы \mathbf{H}^H на вектор \mathbf{y} за счёт того, что матрица $(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1}$ будет обладать свойством эрмитовости. Подробный расчёт сложности операции произведения матрицы $(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1}$ на результирующий вектор $\mathbf{H}^H \mathbf{y}$ приведен в приложении 5.

Таким образом, требуемое количество элементарных арифметических операций вычисления оценки вектора переданных символов на приёмной стороне

для систем беспроводной связи MIMO применяя в качестве демодулятора декоррелятор, будет зависеть от количества передающих и приёмных антенн N , и с учетом выражений (78), (81), (87), (91) будет равно:

$$\begin{aligned} Z_{ZF}(N) &= Z_{TRMATCONJ}(N) + Z_{INVCONJ}(N) + Z_{TRMATVEC}(N) + Z_{TRMATVECCONJ}(N) = \\ &= 2N^3 + 2N^3 - N^2 - N + 2N^3 - 2N^2 + N + 2N^3 - 4N^2 + 2N + 4N^2 - 2N + \\ &+ 4N^2 - 4N + 8N^2 - 2N = 8N^3 + 9N^2 - 4N \end{aligned} \quad (9)$$

где $Z_{TRMATCONJ}(N)$ – вычислительная сложность операции умножения двух матриц эрмитово-сопряженных матриц размерности $N \times N$, $Z_{INVCONJ}(N)$ – вычислительная сложность операции обращения эрмитовой матрицы, $Z_{TRMATVEC}(N)$ – вычислительная сложность операции произведения матрицы размерности $N \times N$ на вектор размерности N , $Z_{TRMATVECCONJ}(N)$ – вычислительная сложность операции произведения эрмитовой матрицы размерности $N \times N$ на вектор размерности N .

Далее произведем оценку требуемого количества элементарных арифметических операций, необходимых для получения оценки $\hat{\mathbf{x}}_{MMSE}$ согласно формуле (5). При сравнении (4) и (5), нетрудно заметить, что разница между этими алгоритмами состоит только в одной операции: для алгоритма оптимального по критерию минимума среднеквадратической ошибки добавляется еще одна операция, помимо учтенных в (9) – операция сложения двух матриц размерности $N \times N$, одна из которых диагональная, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, нулевые, а вторая – эрмитова [66].

Эта операция представляет собой сумму результирующей матрицы $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ и $2\sigma^2 \mathbf{I}$. Традиционно сложение двух матриц подразумевает поэлементное сложение матриц. Эрмитова матрица $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ и диагональная матрица $2\sigma^2 \mathbf{I}$ содержат на главной диагонали действительные числа. Для вычисления суммы двух матриц $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ и $2\sigma^2 \mathbf{I}$ достаточно к элементам главной диагонали матрицы $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ прибавить элементы главной диагонали матрицы $2\sigma^2 \mathbf{I}$. Вычислительная сложность операции сложения эрмитовой и диагональной матрицы $\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I}$ будет равна количеству элементов, расположенных на главных диагоналях этих матриц – N операций сложения над действительными числами.

Обозначим $Z_{SUMMAT}(N)$ выражение для вычислительной сложности получения суммы квадратной матрицы размерности $N \times N$ и диагональной матрицы размерности $N \times N$ [65],[67],[68]:

$$Z_{SUMMAT}(N) = N. \quad (10)$$

Стоит отметить, что при анализе вычислительной сложности алгоритма, оптимального по критерию минимума среднеквадратической ошибки, мы не будем брать в расчёт операцию умножения числа $2\sigma^2$ на единичную матрицу \mathbf{I} , так как $2\sigma^2$ вычисляется заранее и диагональные элементы первого слагаемого (матрицы $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$) – действительные числа.

Таким образом, вычислительная сложность получения оценки $\hat{\mathbf{x}}_{MMSE}$ на приёмной стороне с учетом выражений (10), (78), (81), (87), (91) будет равна:

$$\begin{aligned} Z_{MMSE}(N) &= Z_{TRMATCONJ}(N) + Z_{INVCONJ}(N) + Z_{TRMATVEC}(N) + Z_{TRMATVECCONJ}(N) + \\ &+ Z_{SUMMAT}(N) = 2N^3 + 2N^3 - N^2 - N + 2N^3 - 2N^2 + N + 2N^3 - 4N^2 + \quad . \quad (11) \\ &+ 2N + 4N^2 - 2N + 4N^2 - 4N + 8N^2 - 2N + N = 8N^3 + 9N^2 - 3N \end{aligned}$$

Для сравнения вычислительной сложности известных линейных алгоритмов демодуляции сигнала на приёмной стороне систем беспроводной связи, основанных на технологии MIMO, произведем сравнение количества требуемых арифметических операций получения оценок $\hat{\mathbf{x}}_{ZF}$ и $\hat{\mathbf{x}}_{MMSE}$ для различных антенных конфигураций.

Результаты сравнения приведены в таблице 3.

Таблица 3. Вычислительная сложность известных линейных алгоритмов демодуляции

	Количество операций для вычисления оценки вектора переданных символов	
Демодулятор	Декоррелятор (4), $Z_{ZF}(N)$	Алгоритм МСКО (5), $Z_{MMSE}(N)$
Антенная конфигурация	Действ. умножений/делений и сложений/вычитаний	Действ. умножений/делений и сложений/вычитаний
2×2	90	92
4×4	636	640
8×8	4 632	4 640
16×16	34 992	35 008
32×32	271 200	271 232
64×64	2 133 696	2 133 760
128×128	16 924 032	16 924 160

Как видно из таблицы 3, оба линейных алгоритма практически не отличаются с точки зрения вычислительной сложности, но при этом алгоритм МСКО обладает лучшими характеристиками помехоустойчивости при любых значениях ОСШ, что показано на рисунке 5 и рисунке 6 [63]. По этой причине алгоритм МСКО и является наилучшим среди линейных алгоритмов обработки сигналов в системах беспроводной связи ММО. По причине роста количества передающих и приёмных антенн использование данного алгоритма в системах связи massive ММО может быть трудно реализуемо. Далее предлагается способ снижения требуемого количества операций, необходимых для получения оценки $\hat{\mathbf{x}}_{MMSE}$, без изменения характеристик алгоритма МСКО.

2.2 Новая реализация известного алгоритма демодуляции МСКО для систем massive MIMO

При увеличении количества антенн на передающей и приёмной сторонах возрастает и сложность обработки сигналов, в частности, сложность вычисления оценки вектора переданных символов на приёмной стороне. Вопросы снижения вычислительной сложности алгоритмов демодуляции для систем беспроводной связи, основанных на использовании технологии MIMO, рассматривались практически сразу после её появления [70],[71].

Рассмотрим применение рекурсивного алгоритма Штрассена (67), (68) для быстрого умножения матриц, позволяющего произвести умножение двух квадратных матриц размерности $N \times N$ с вычислительной сложностью $O(N^{2.81})$ [21], и метода 3М (75), использование которого позволяет снизить сложность вычисления произведения двух комплексных чисел (матриц) [24], к выражению (5) известного алгоритма демодуляции МСКО [72],[73],[74].

Как известно [21],[23], алгоритм Штрассена (67), (68) наиболее эффективен для плотных матриц размерности не менее 40×40 . Матрица канала \mathbf{H} как раз является плотной, так как содержит коэффициенты передачи между каждым элементом передающей антенны и каждым элементом приёмной антенны, а её размерность зависит от количества антенн. Как было сказано в параграфе 1.1, для технологии massive MIMO характерно, что на передающей и приёмной сторонах количество антенн как раз может быть 40 и более [12],[75].

Кроме того, с учетом того, что алгоритм Штрассена (67), (68) используется рекурсивно для матриц размерности более, чем 2×2 , а также подразумевает представление исходной матрицы размерности $N \times N$ в виде матриц размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ [21], мы будем рассматривать такие значения N , которые являются точной степенью 2. Подробное описание алгоритма Штрассена и оценка его

эффективности с точки зрения снижения вычислительной сложности вычисления произведения двух матриц приведены в приложении 3.

Метод ЗМ (75) может быть использован как для снижения вычислительной сложности умножения двух комплексных чисел, так и для снижения вычислительной сложности операции вычисления произведения двух матриц или матрицы на вектор, состоящих из комплексных чисел. Подробное описание метода ЗМ приведено в приложении 4. Применение данного метода обусловлено тем, что элементы матрицы канала \mathbf{H} являются комплексными величинами [1]. При этом известные линейные алгоритмы демодуляции (4) и (5) содержат в себе операции вычисления произведения двух комплексных квадратных матриц. Так как комплексная величина состоит из двух частей (действительной и мнимой), которые, в свою очередь, являются действительными числами, и формального символа i , все операции с комплексными числами в итоге сводятся к операциям над действительными числами с плавающей запятой.

Для снижения вычислительной сложности получения оценки вектора переданных символов на приёмной стороне для систем связи massive MIMO предлагается новая реализация известного алгоритма демодуляции МСКО, основанная на использовании алгоритма Штрассена (67), (68) и метода ЗМ (75) совместно.

Обратившись снова к выражению (5), перечислим все матрично-векторные операции, из которых состоит данный алгоритм:

1. **Вычисление произведения двух квадратных матриц размерности $N \times N$;**
2. **Вычисление суммы двух квадратных матриц размерности $N \times N$;**
3. **Обращение матрицы размерности $N \times N$;**
4. **Вычисление произведения квадратной матрицы размерности $N \times N$ на вектор размерности N (эту операцию необходимо выполнить два раза).**

Для вычисления обращения матрицы размерности $N \times N$, содержащей комплексные числа, с использованием формулы Фробениуса необходимо

вычислить 4 умножения матриц размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ [26]. Для снижения сложности этой операции предлагается также применить алгоритм Штрассена (67), (68) и метод 3М (75) совместно.

Кроме того, предлагается использовать отдельно метод 3М (75) для снижения вычислительной сложности операции вычисления произведения квадратной матрицы размерности $N \times N$ на вектор размерности N .

Для снижения сложности операции вычисления произведения двух матриц \mathbf{H}^H и \mathbf{H} предлагается использовать метод 3М (75) и алгоритм Штрассена (67), (68) следующим образом:

1. Представим исходные матрицы \mathbf{H}^H и \mathbf{H} размерности $N \times N$ в виде четырех матриц равной размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ следующим образом:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{00} & \mathbf{h}_{01} \\ \mathbf{h}_{10} & \mathbf{h}_{11} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}^H = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{00}^H & \mathbf{h}_{10}^H \\ \mathbf{h}_{01}^H & \mathbf{h}_{11}^H \end{bmatrix}.$$

Таким образом, произведение матриц \mathbf{H}^H и \mathbf{H} можно записать как:

$$\mathbf{H}^H \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{00}^H & \mathbf{h}_{10}^H \\ \mathbf{h}_{01}^H & \mathbf{h}_{11}^H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{00} & \mathbf{h}_{01} \\ \mathbf{h}_{10} & \mathbf{h}_{11} \end{bmatrix} \quad (12)$$

2. Запишем произведение матриц $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ следующим образом:

$$\mathbf{H}^H \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{00} + \mathbf{h}_{10}^H \mathbf{h}_{10} & \mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{01} + \mathbf{h}_{10}^H \mathbf{h}_{11} \\ \mathbf{h}_{01}^H \mathbf{h}_{00} + \mathbf{h}_{11}^H \mathbf{h}_{10} & \mathbf{h}_{01}^H \mathbf{h}_{01} + \mathbf{h}_{11}^H \mathbf{h}_{11} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Так как матрицы \mathbf{H}^H и \mathbf{H} – эрмитово-сопряженные, результирующая матрица $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ будет эрмитовой. Для вычисления $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ необходимо вычислить элементы главной диагонали результирующей матрицы $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$, а также поддиагональные элементы, так как наддиагональные элементы эрмитовой матрицы будут равны комплексно-сопряженным поддиагональным элементам. Таким образом, в для получения результата по

формуле (13) нет необходимости вычислять $\mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{01} + \mathbf{h}_{10}^H \mathbf{h}_{11}$ и $\mathbf{h}_{01}^H \mathbf{h}_{00} + \mathbf{h}_{11}^H \mathbf{h}_{10}$ – достаточно вычислить $\mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{01} + \mathbf{h}_{10}^H \mathbf{h}_{11}$, так как $(\mathbf{h}_{01}^H \mathbf{h}_{00} + \mathbf{h}_{11}^H \mathbf{h}_{10}) = (\mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{01} + \mathbf{h}_{10}^H \mathbf{h}_{11})^H$.

3. Вычисление матричных произведений $\mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{00}$, $\mathbf{h}_{10}^H \mathbf{h}_{10}$, $\mathbf{h}_{01}^H \mathbf{h}_{01}$, $\mathbf{h}_{11}^H \mathbf{h}_{11}$ предлагается выполнить с использованием метода ЗМ (75). Стоит отметить, что для данных произведений необходимо вычислить только элементы главной диагонали и поддиагональные элементы. Рассмотрим на примере $\mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{00}$ использование метода ЗМ (75) для вычисления этого произведения. Вычисление произведений $\mathbf{h}_{10}^H \mathbf{h}_{10}$, $\mathbf{h}_{01}^H \mathbf{h}_{01}$, $\mathbf{h}_{11}^H \mathbf{h}_{11}$ предлагается осуществить таким же способом, как и $\mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{00}$.

Введем обозначение $\mathbf{F} = \mathbf{h}_{10}^H \mathbf{h}_{10}$. Столбцы $\mathbf{f}^{[c]}$ при $c = 0, 1, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right)$ матрицы

\mathbf{F} можно представить в виде умножений матрицы \mathbf{h}_{10}^H на столбцы $\mathbf{h}_{10}^{[c]}$ матрицы \mathbf{h}_{10} следующим образом:

$$\mathbf{F} = \mathbf{h}_{10}^H \mathbf{h}_{10} = \mathbf{h}_{10}^H \left[\mathbf{h}_{10}^{[1]} \mathbf{h}_{10}^{[2]} \dots \mathbf{h}_{10}^{[\frac{N}{2}]} \right] = \left[\mathbf{f}^{[1]} \mathbf{f}^{[2]} \dots \mathbf{f}^{[\frac{N}{2}]} \right], \text{ где } [] \text{ указывает номер столбца,}$$

причем для столбцов матрицы \mathbf{F} при $c = 2, \dots, \frac{N}{2}$ нет необходимости

вычислять все элементы, так как матрицы и – эрмитово-сопряженные.

Схематично необходимые для вычисления элементы матрицы изображены на рисунке 9.

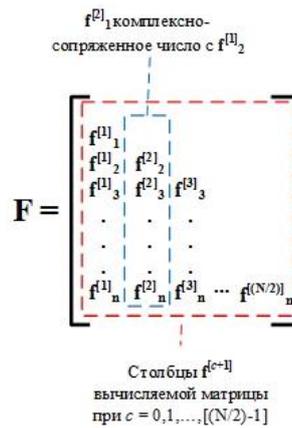


Рисунок 9. Алгоритм вычисления произведения двух эрмитово-сопряженных матриц

4. Для вычисления матрицы $\mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{01} + \mathbf{h}_{10}^H \mathbf{h}_{11}$, содержащей комплексные числа, необходимо вычислить два матричных произведения: $\mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{01}$ и $\mathbf{h}_{10}^H \mathbf{h}_{11}$. Эти операции предлагается также выполнить с использованием метода 3М (75). На примере $\mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{01}$ рассмотрим использование метода 3М (75) и алгоритма Штрассена (67), (68) для вычисления произведения $\mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{01}$. Вычисление произведения $\mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{01}$ предлагается осуществить таким же способом, как и $\mathbf{h}_{10}^H \mathbf{h}_{11}$. Представим каждую матрицу \mathbf{h}_{00}^H и \mathbf{h}_{01} в виде суммы двух матриц, содержащих значения действительной и мнимой части исходных матриц \mathbf{h}_{00}^H и \mathbf{h}_{01} :

$$\mathbf{h}_{00}^H = (\mathbf{h}_{00}^H)_R + i(\mathbf{h}_{00}^H)_I,$$

$$\mathbf{h}_{01} = (\mathbf{h}_{01})_R + i(\mathbf{h}_{01})_I,$$

где $()_R$ – значения действительной части элементов исходной матрицы, $()_I$ – мнимой.

Используя метод 3М (75), вычислить произведение $\mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{01}$ можно следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{01} = & \left((\mathbf{h}_{00}^H)_R (\mathbf{h}_{01})_R - (\mathbf{h}_{00}^H)_I (\mathbf{h}_{01})_I \right) + \\ & + i \left[\left((\mathbf{h}_{00}^H)_R + (\mathbf{h}_{00}^H)_I \right) \left((\mathbf{h}_{01})_R + (\mathbf{h}_{01})_I \right) - (\mathbf{h}_{00}^H)_R (\mathbf{h}_{01})_R - (\mathbf{h}_{00}^H)_I (\mathbf{h}_{01})_I \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Вычисление произведений $(\mathbf{h}_{00}^H)_R (\mathbf{h}_{01})_R$, $(\mathbf{h}_{00}^H)_I (\mathbf{h}_{01})_I$, $((\mathbf{h}_{00}^H)_R + (\mathbf{h}_{00}^H)_I)((\mathbf{h}_{01})_R + (\mathbf{h}_{01})_I)$ предлагается выполнить с использованием алгоритма Штрассена (67), (68). Для максимально эффективного использования алгоритма Штрассена (67), (68) его применение в рекурсии имеет место для вычисления матричных произведений в формуле (14) для матриц размерности $\frac{N}{2} = 16$ и более [21], а произведение матриц меньшей размерности производится по формулам (65), (66).

Произведем описание предлагаемого алгоритма А1 (15) вычисления произведения двух матриц \mathbf{H}^H и \mathbf{H} .

Входные данные: комплексная матрица \mathbf{H} размерности $N \times N$.

Шаг 1. Задать матрицу \mathbf{H}^H .

Шаг 2. Представить матрицы \mathbf{H}^H и \mathbf{H} в виде четырех матриц равной размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{00} & \mathbf{h}_{01} \\ \mathbf{h}_{10} & \mathbf{h}_{11} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}^H &= \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{00}^H & \mathbf{h}_{10}^H \\ \mathbf{h}_{01}^H & \mathbf{h}_{11}^H \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

Произведение этих матриц представить, согласно формуле (13):

$$\mathbf{H}^H \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{00} + \mathbf{h}_{10}^H \mathbf{h}_{10} & \mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{01} + \mathbf{h}_{10}^H \mathbf{h}_{11} \\ \mathbf{h}_{01}^H \mathbf{h}_{00} + \mathbf{h}_{11}^H \mathbf{h}_{10} & \mathbf{h}_{01}^H \mathbf{h}_{01} + \mathbf{h}_{11}^H \mathbf{h}_{11} \end{bmatrix}.$$

Шаг 3. Вычислить $\mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{00}$, $\mathbf{h}_{10}^H \mathbf{h}_{10}$, $\mathbf{h}_{01}^H \mathbf{h}_{01}$, $\mathbf{h}_{11}^H \mathbf{h}_{11}$ с использованием метода ЗМ

(75) при $c = 0, 1, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right)$ следующим образом:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{00} = \mathbf{h}_{00}^H [\mathbf{h}_{00}^{[c+1]}] = [\mathbf{f}_n^{[c+1]}]_1,$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{h}_{10}^H \mathbf{h}_{10} = \mathbf{h}_{10}^H [\mathbf{h}_{10}^{[c+1]}] = [\mathbf{f}_n^{[c+1]}]_2,$$

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{h}_{01}^H \mathbf{h}_{01} = \mathbf{h}_{01}^H [\mathbf{h}_{01}^{[c+1]}] = [\mathbf{f}_n^{[c+1]}]_3,$$

$$\mathbf{F}_4 = \mathbf{h}_{11}^H \mathbf{h}_{11} = \mathbf{h}_{11}^H [\mathbf{h}_{11}^{[c+1]}] = [\mathbf{f}_n^{[c+1]}]_4,$$

где $n = \left[\frac{N}{2} - \left(\frac{N}{2} - c\right); \frac{N}{2}\right]$ – номер элемента в столбце.

Шаг 4. Представить каждую из матриц \mathbf{h}_{00}^H , \mathbf{h}_{01} , \mathbf{h}_{01}^H и \mathbf{h}_{11} в виде суммы двух матриц:

$$\mathbf{h}_{00}^H = (\mathbf{h}_{00}^H)_R + i(\mathbf{h}_{00}^H)_I,$$

$$\mathbf{h}_{01} = (\mathbf{h}_{01})_R + i(\mathbf{h}_{01})_I,$$

$$\mathbf{h}_{01}^H = (\mathbf{h}_{01}^H)_R + i(\mathbf{h}_{01}^H)_I,$$

$$\mathbf{h}_{11} = (\mathbf{h}_{11})_R + i(\mathbf{h}_{11})_I.$$

Шаг 5. Вычислить $\mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{01}$ и $\mathbf{h}_{10}^H \mathbf{h}_{11}$ с использованием метода ЗМ (75) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{01} &= \left((\mathbf{h}_{00}^H)_R (\mathbf{h}_{01})_R - (\mathbf{h}_{00}^H)_I (\mathbf{h}_{01})_I \right) + \\ &+ i \left[\left((\mathbf{h}_{00}^H)_R + (\mathbf{h}_{00}^H)_I \right) \left((\mathbf{h}_{01})_R + (\mathbf{h}_{01})_I \right) - (\mathbf{h}_{00}^H)_R (\mathbf{h}_{01})_R - (\mathbf{h}_{00}^H)_I (\mathbf{h}_{01})_I \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{10}^H \mathbf{h}_{11} &= \left((\mathbf{h}_{10}^H)_R (\mathbf{h}_{11})_R - (\mathbf{h}_{10}^H)_I (\mathbf{h}_{11})_I \right) + \\ &+ i \left[\left((\mathbf{h}_{10}^H)_R + (\mathbf{h}_{10}^H)_I \right) \left((\mathbf{h}_{11})_R + (\mathbf{h}_{11})_I \right) - (\mathbf{h}_{10}^H)_R (\mathbf{h}_{11})_R - (\mathbf{h}_{10}^H)_I (\mathbf{h}_{11})_I \right]. \end{aligned}$$

При этом каждое из матричных произведений

$$(\mathbf{h}_{00}^H)_R (\mathbf{h}_{01})_R,$$

$(\mathbf{h}_{00}^H)_I (\mathbf{h}_{01})_I,$ $((\mathbf{h}_{00}^H)_R + (\mathbf{h}_{00}^H)_I)((\mathbf{h}_{01})_R + (\mathbf{h}_{01})_I),$ $(\mathbf{h}_{10}^H)_R (\mathbf{h}_{11})_R,$ $(\mathbf{h}_{10}^H)_I (\mathbf{h}_{11})_I,$ $((\mathbf{h}_{10}^H)_R + (\mathbf{h}_{10}^H)_I)((\mathbf{h}_{11})_R + (\mathbf{h}_{11})_I)$	
<p>при $\frac{N}{2} \geq 16$ вычислить с использованием алгоритма Штрассена по формулам (67), (68).</p> <p>При $\frac{N}{2} < 16$ – вычислить традиционным методом по формулам (65), (66).</p> <p>Выходные данные: матрица размерности $N \times N$, содержащая комплексные числа и равная произведению матрицы на \mathbf{H}^H на матрицу \mathbf{H}.</p>	

Теперь рассмотрим алгоритм снижения сложности вычисления обратной матрицы с использованием формулы Фробениуса (86) из приложения 5. Согласно алгоритму (5), необходимо рассчитать обращение для матрицы $\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I}$. Введём следующее обозначение: $\mathbf{T} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I})$.

Как видно из описания формулы Фробениуса (86), для обращения матрицы размерности $N \times N$ необходимо будет выполнить в том числе 4 умножения матриц размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$. Для снижения вычислительной сложности 4 операций умножения матриц размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ предлагается использовать алгоритм Штрассена (67), (68) и метод 3М (75). Далее описан предлагаемый алгоритм А2 (16) вычисления матрицы \mathbf{T}^{-1} размерности $N \times N$, обратной к матрице \mathbf{T} .

Входные данные: комплексная матрица $\mathbf{T} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I})$ размерности $N \times N$.

Шаг 1. Представить матрицу $\mathbf{T} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I})$ в виде матриц равной размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ следующим образом:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{00} & \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{t}_{10} & \mathbf{t}_{11} \end{bmatrix}.$$

Шаг 2. Задать \mathbf{t}_{01}^H и, используя рекурсивно формулу Фробениуса (86), вычислить \mathbf{t}_{00}^{-1} . Обозначим: $\mathbf{W} = \mathbf{t}_{01}^H \mathbf{t}_{00}^{-1}$, $\mathbf{G} = (\mathbf{t}_{11} - \mathbf{t}_{10} \mathbf{W}^H)$.

Шаг 3. Вычислить $\mathbf{W} = \mathbf{t}_{01}^H \mathbf{t}_{00}^{-1}$ с использованием метода 3М (75) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = \mathbf{t}_{01}^H \mathbf{t}_{11}^{-1} = & \left((\mathbf{t}_{01}^H)_R (\mathbf{t}_{11}^{-1})_R - (\mathbf{t}_{01}^H)_I (\mathbf{t}_{11}^{-1})_I \right) + \\ & + i \left[\left((\mathbf{t}_{01}^H)_R + (\mathbf{t}_{01}^H)_I \right) \left((\mathbf{t}_{11}^{-1})_R + (\mathbf{t}_{11}^{-1})_I \right) - (\mathbf{t}_{01}^H)_R (\mathbf{t}_{11}^{-1})_R - (\mathbf{t}_{01}^H)_I (\mathbf{t}_{11}^{-1})_I \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

При этом каждое из матричных произведений

$$(\mathbf{t}_{01}^H)_R (\mathbf{t}_{11}^{-1})_R,$$

$$(\mathbf{t}_{01}^H)_I (\mathbf{t}_{11}^{-1})_I,$$

$$\left((\mathbf{t}_{01}^H)_R + (\mathbf{t}_{01}^H)_I \right) \left((\mathbf{t}_{11}^{-1})_R + (\mathbf{t}_{11}^{-1})_I \right)$$

при $\frac{N}{2} \geq 16$ вычислить с использованием алгоритма Штрассена по формулам (67), (68).

При $\frac{N}{2} < 16$ – вычислить традиционным методом по формулам (65), (66).

Шаг 4. Задать \mathbf{W}^H .

Шаг 5. Представить каждую из матриц \mathbf{t}_{10} , \mathbf{W} и \mathbf{W}^H в виде суммы двух матриц следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_{10} &= (\mathbf{t}_{10})_R + i(\mathbf{t}_{10})_I, \\ \mathbf{W} &= \mathbf{W}_R + i\mathbf{W}_I, \\ \mathbf{W}^H &= (\mathbf{W}^H)_R + i(\mathbf{W}^H)_I.\end{aligned}$$

Шаг 6. Вычислить $\mathbf{t}_{10}\mathbf{W}^H$ с использованием метода 3М (75) следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_{10}\mathbf{W}^H &= ((\mathbf{t}_{10})_R(\mathbf{W}^H)_R - (\mathbf{t}_{10})_I(\mathbf{W}^H)_I) + \\ &+ i\left[((\mathbf{t}_{10})_R + (\mathbf{t}_{10})_I)((\mathbf{W}^H)_R + (\mathbf{W}^H)_I) - (\mathbf{t}_{10})_R(\mathbf{W}^H)_R - (\mathbf{t}_{10})_I(\mathbf{W}^H)_I \right].\end{aligned}$$

При этом каждое из матричных произведений

$$\begin{aligned}(\mathbf{t}_{10})_R(\mathbf{W}^H)_R, \\ (\mathbf{t}_{10})_I(\mathbf{W}^H)_I, \\ ((\mathbf{t}_{10})_R + (\mathbf{t}_{10})_I)((\mathbf{W}^H)_R + (\mathbf{W}^H)_I)\end{aligned}$$

при $\frac{N}{2} \geq 16$ вычислить с использованием алгоритма Штрассена по формулам (67), (68).

При $\frac{N}{2} < 16$ – вычислить традиционным методом по формулам (65), (66).

Шаг 7. Вычислить $\mathbf{G} = (\mathbf{t}_{11} - \mathbf{t}_{10}\mathbf{W}^H)$.

Шаг 8. Вычислить \mathbf{G}^{-1} , используя рекурсивно формулу Фробениуса (86).

Шаг 9. Представить матрицу \mathbf{G}^{-1} в виде суммы двух матриц следующим образом:

$$\mathbf{G}^{-1} = (\mathbf{G}^{-1})_R + i(\mathbf{G}^{-1})_I.$$

Шаг 10. Вычислить $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{W}$, $\mathbf{W}^H(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{W})$ с использованием метода 3М (75) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = \mathbf{U}_R + i\mathbf{U}_I = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{W} &= ((\mathbf{G}^{-1})_R \mathbf{W}_R - (\mathbf{G}^{-1})_I \mathbf{W}_I) + \\ &+ i \left[((\mathbf{G}^{-1})_R + (\mathbf{G}^{-1})_I)(\mathbf{W}_R + \mathbf{W}_I) - (\mathbf{G}^{-1})_R \mathbf{W}_R - (\mathbf{G}^{-1})_I \mathbf{W}_I \right], \\ \mathbf{W}^H(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{W}) = \mathbf{W}^H\mathbf{U} &= ((\mathbf{W}^H)_R \mathbf{U}_R - (\mathbf{W}^H)_I \mathbf{U}_I) + \\ &+ i \left[((\mathbf{W}^H)_R + (\mathbf{W}^H)_I)(\mathbf{U}_R + \mathbf{U}_I) - (\mathbf{W}^H)_R \mathbf{U}_R - (\mathbf{W}^H)_I \mathbf{U}_I \right]. \end{aligned}$$

При этом каждое из матричных произведений

$$\begin{aligned} &(\mathbf{G}^{-1})_R \mathbf{W}_R, \\ &(\mathbf{G}^{-1})_I \mathbf{W}_I, \\ &((\mathbf{G}^{-1})_R + (\mathbf{G}^{-1})_I)(\mathbf{W}_R + \mathbf{W}_I), \\ &(\mathbf{W}^H)_R \mathbf{U}_R, \\ &(\mathbf{W}^H)_I \mathbf{U}_I, \\ &((\mathbf{W}^H)_R + (\mathbf{W}^H)_I)(\mathbf{U}_R + \mathbf{U}_I) \end{aligned}$$

при $\frac{N}{2} \geq 16$ вычислить с использованием алгоритма Штрассена по формулам (67), (68).

При $\frac{N}{2} < 16$ – вычислить традиционным методом по формулам (65), (66).

Шаг 11. Вычислить $\mathbf{t}_{00}^{-1} + \mathbf{W}^H\mathbf{G}^{-1}\mathbf{W}$.

Шаг 12. Присвоить $\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{00}^{-1} + \mathbf{W}^H \mathbf{G}^{-1} \mathbf{W} & -(\mathbf{G}^{-1} \mathbf{W})^H \\ \mathbf{G}^{-1} \mathbf{W} & \mathbf{G}^{-1} \end{bmatrix}$.

Выходные данные: комплексная матрица \mathbf{T}^{-1} размерности $N \times N$, обратная к матрице \mathbf{T} .

Последняя операция, сложность которой предлагается снизить – вычисление произведения квадратной матрицы размерности $N \times N$ на вектор размерности N . Для снижения вычислительной сложности этой операции предлагается использовать метод 3М (75). Произведем описание предлагаемого алгоритма А3 (17) вычисления произведения квадратной матрицы на вектор.

Входные данные: комплексная матрица \mathbf{H}^H размерности $N \times N$, комплексный вектор \mathbf{y} размерности N .

Шаг 1. Представить матрицу \mathbf{H}^H в виде суммы двух матриц следующим образом:

$$\mathbf{H}^H = (\mathbf{H}^H)_R + i(\mathbf{H}^H)_I.$$

Представить вектор \mathbf{y} в виде суммы двух векторов следующим образом:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_R + i\mathbf{y}_I.$$

Шаг 2. Вычислить $\mathbf{H}^H \mathbf{y}$ с использованием метода 3М по формуле (75) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^H \mathbf{y} = & \left((\mathbf{H}^H)_R (\mathbf{y})_R - (\mathbf{H}^H)_I (\mathbf{y})_I \right) + \\ & + i \left[\left((\mathbf{H}^H)_R + (\mathbf{H}^H)_I \right) \left((\mathbf{y})_R + (\mathbf{y})_I \right) - (\mathbf{H}^H)_R (\mathbf{y})_R - (\mathbf{H}^H)_I (\mathbf{y})_I \right]. \end{aligned}$$

Выходные данные: вектор размерности N , содержащий комплексные числа и равный произведению матрицы на \mathbf{H}^H на вектор \mathbf{y} .

(17)

Таким образом, разработанный алгоритм вычисления оценки вектора переданных символов на приёмной стороне систем беспроводной связи, использующих технологию massive MIMO, основан на совместном использовании алгоритма Штрассена (67), (68) и метода ЗМ (75). В результате предложен новый алгоритм вычисления произведения двух эрмитово-сопряженных матриц A1 (15), новый алгоритм вычисления обратной матрицы A2 (16) и алгоритм использования метода ЗМ для вычисления произведения матрицы на вектор A3 (17).

Далее приведено подробное описание новой реализации демодулятора МСКО в виде алгоритма A4 (18).

Входные данные: комплексная матрица \mathbf{H} размерности $N \times N$, комплексный вектор \mathbf{y} размерности N , диагональная матрица $2\sigma^2\mathbf{I}$ размерности $N \times N$.

Шаг 1. Вычислить $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ с использованием алгоритма A1 (15).

Шаг 2. Вычислить $\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I}$.

Шаг 3. Вычислить $\mathbf{H}^H \mathbf{y}$ с использованием алгоритма A3 (17).

Шаг 4. Вычислить $\mathbf{T}^{-1} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I})^{-1}$ с использованием алгоритма A2 (16).

Шаг 5. Вычислить $\hat{\mathbf{x}}_{MMSE} = \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{H}^H \mathbf{y})$.

Выходные данные: вектор $\hat{\mathbf{x}}_{MMSE}$ размерности N , содержащий комплексные числа.

(18)

Далее сравним количество элементарных арифметических операций, необходимых для вычисления оценки вектора переданных символов на приёмной стороне, с использованием известного алгоритма МСКО (5) и с использованием разработанного алгоритма А4 (18).

2.3 Анализ вычислительной сложности новой реализации известного алгоритма демодуляции МСКО

Для анализа вычислительной сложности новой реализации демодулятора МСКО в виде алгоритма А4 (18) проведена оценка количества требуемых элементарных арифметических операций получения оценки с использованием алгоритма МСКО (5) и при использовании нового алгоритма А4 (18).

Так как разработанный алгоритм А4 (18) состоит только из точных операций, то никаких изменений характеристик помехоустойчивости по сравнению с известным алгоритмом демодуляции МСКО (5) нет.

Определим сложность вычисления операции вычисления произведения двух матриц \mathbf{H}^H и \mathbf{H} с использованием алгоритма А1 (15). Для начала рассчитаем сложность операций вычисления произведения двух эрмитово-сопряженных матриц размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ с использованием метода ЗМ (75), выполняемых на

Шаге 3 алгоритма А1 (15). Сложность Z_{3MHERM} каждой из операций вычисления \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_3 , \mathbf{F}_4 может быть рассчитана следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_{3MHERM} \left(\frac{N}{2} \right) &= \left[3 \frac{N}{2} \left(\left(\frac{N}{2} \right)^2 - \frac{N^2}{8} \right) \right]_{MULT} + \left[\left(3 \frac{N}{2} + 2 \right) \left(\left(\frac{N}{2} \right)^2 - \frac{N^2}{8} \right) \right]_{ADD} = \\ &= \left[\frac{3N^3}{16} \right]_{MULT} + \left[\frac{3N^3}{16} + \frac{N^2}{4} \right]_{ADD} \end{aligned} \quad (19)$$

Соответственно, для вычисления матричных произведений $\mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{00}$, $\mathbf{h}_{01}^H \mathbf{h}_{10}$, $\mathbf{h}_{10}^H \mathbf{h}_{01}$, $\mathbf{h}_{11}^H \mathbf{h}_{11}$ сложность, рассчитываемая по формуле (19), увеличится в 4 раза, а

также добавятся операции две операции сложения диагональных и поддиагональных элементов матриц размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$, что составит сложность

$\left(\frac{N}{2}\right)$ сложений действительных чисел элементов главной диагонали и $\left(\left(\frac{N}{2}\right)^2 - \frac{N}{2}\right)\frac{1}{2}$ сложений комплексных чисел для одной матрицы, или $2\left(\frac{N^2 + 2N}{4}\right)$

сложений действительных чисел для двух сложений матриц размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$.

Таким образом, вычислительная сложность операций на **Шаге 3** алгоритма A1 (15) может быть рассчитана как:

$$Z_{3MHALFMAT}\left(\frac{N}{2}\right) = 4Z_{3MHERM}\left(\frac{N}{2}\right) + 2\left(\frac{N^2 + 2N}{4}\right). \quad (20)$$

Сложность $Z_{3MFULLSTMAT}$ вычисления $\mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{01} + \mathbf{h}_{01}^H \mathbf{h}_{11}$ в алгоритме A1 (15) необходимо выполнить следующие операции:

$$Z_{3MFULLSTMAT}\left(\frac{N}{2}\right) = \begin{cases} 1, \frac{N}{2} = 1 \\ \left[8Z_{3MFULLSTMAT}\left(\frac{N}{4}\right) \right]_{MULT} + \left[4\left(\frac{N}{4}\right)^2 \right]_{ADD}, 2 \leq \frac{N}{2} < 16. \\ \left[7Z_{3MFULLSTMAT}\left(\frac{N}{4}\right) \right]_{MULT} + \left[18\left(\frac{N}{4}\right)^2 \right]_{ADD}, \frac{N}{2} \geq 16 \end{cases} \quad (21)$$

Также, согласно формуле (13), необходимо вычислить 5 сложений матриц размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$, сложность операции сложений матриц размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$

может быть записана как $Z_{ADDMAT}\left(\frac{N}{2}\right) = \left(\frac{N}{2}\right)^2$.

Общая сложность вычисления матрицы $\mathbf{h}_{00}^H \mathbf{h}_{01} + \mathbf{h}_{10}^H \mathbf{h}_{11}$ будет равна:

$$Z_{3MSTR}\left(\frac{N}{2}\right) = 2\left[3Z_{3MFULLSTMAT}\left(\frac{N}{2}\right) \right]_{MULT} + \left[6\left(\frac{N}{2}\right)^2 \right]_{ADD} \quad (22)$$

Таким образом, общая вычислительная сложность вычисления произведения двух матриц \mathbf{H}^H и \mathbf{H} с использованием разработанного алгоритма A1 (15) равна:

$$Z_{PROPMAT}(N) = Z_{3MSTR}\left(\frac{N}{2}\right) + Z_{3MHALFMAT}\left(\frac{N}{2}\right) \quad (23)$$

В таблице 4 приведено сравнение количества требуемых элементарных арифметических операций, необходимых для получения произведения двух квадратных матриц с использованием известного алгоритма (65), (66) и разработанного алгоритма A1 (15).

Таблица 4. Анализ эффективности разработанного алгоритма A1 (15) для вычисления произведения двух эрмитово-сопряженных матриц

	Количество операций для вычисления произведения двух матриц \mathbf{H}^H и \mathbf{H}		Отношение вычислительной сложности разработанного алгоритма к вычислительной сложности известного алгоритма
	Известный алгоритм (65), (66)	Разработанный алгоритм A1 (15)	
Антенная конфигурация $N \times N$	Действ. умножений/делений и сложений/вычитаний	Действ. умножений/делений и сложений/вычитаний	
2×2	28	30	1,07
4×4	240	214	0,89
8×8	1 984	1 620	0,82
16×16	16 128	12 616	0,78
32×32	130 048	99 216	0,76
64×64	1 044 480	762 784	0,73
128×128	8 372 224	5 809 344	0,69

Теперь рассчитаем сложность операции обращения матрицы $\mathbf{T} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I})$ при использовании алгоритма А2 (16). По формуле (86) для вычисления \mathbf{T}^{-1} необходимо выполнить:

- 2 обращения матриц размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$: \mathbf{t}_{00}^{-1} , \mathbf{G}^{-1} ;
- 4 умножения матриц размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$: $\mathbf{t}_{01}^H \mathbf{t}_{11}^{-1}$, $\mathbf{G}^{-1} \mathbf{W}$, $\mathbf{W}^H (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{W})$, $\mathbf{t}_{10} \mathbf{W}^H$;
- 2 сложения матриц размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$: $\mathbf{t}_{00}^{-1} + \mathbf{W}^H \mathbf{G}^{-1} \mathbf{W}$, $\mathbf{t}_{11} - \mathbf{t}_{10} \mathbf{W}^H$.

Операции обращения матриц размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ в формуле (86) предлагается выполнять рекурсивно с использованием формулы Фробениуса (86), причем по формуле (88) нетрудно рассчитать, что сложность данной операции $Z_{INVCONJ}(2)$ при $N = 2$ составит 14 арифметических операций над действительными числами [59].

Для сокращения сложности вычисления матрицы \mathbf{T}^{-1} операции умножения матриц $\mathbf{t}_{01}^H \mathbf{t}_{11}^{-1}$, $\mathbf{G}^{-1} \mathbf{W}$, $\mathbf{W}^H (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{W})$, $\mathbf{t}_{10} \mathbf{W}^H$ в формуле (86) при размерности матрицы \mathbf{T} равной или большей, чем 32×32 предлагается вычислять с использованием алгоритма Штрассена (67), (68) и метода 3М (75). Оценка вычислительной сложности каждой из операций $\mathbf{t}_{01}^H \mathbf{t}_{11}^{-1}$, $\mathbf{G}^{-1} \mathbf{W}$, $\mathbf{W}^H (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{W})$, $\mathbf{t}_{10} \mathbf{W}^H$ рассчитывается по формуле (23).

Таким образом, вычислительную сложность получения матрицы \mathbf{T}^{-1} при использовании алгоритма А2 (16) можно выразить следующим образом:

$$Z_{FROINV}(N) = \begin{cases} 14, N = 2 \\ 2Z_{FROINV}\left(\frac{N}{2}\right) + 4\left[8\left(\frac{N}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{N}{2}\right)^2\right] + 4\left(\frac{N}{2}\right)^2, 2 < N < 64 \\ 2Z_{FROINV}\left(\frac{N}{2}\right) + 4\left[3Z_{3MSTRMAT}\left(\frac{N}{2}\right) + 5\left(\frac{N}{2}\right)^2\right] + 4\left(\frac{N}{2}\right)^2, N \geq 64 \end{cases} \quad (24)$$

В таблице 5 приведен сравнительный анализ количества элементарных арифметических операций необходимых для вычисления матрицы \mathbf{T}^{-1} с использованием известного алгоритма (86) и разработанного алгоритма A2 (16).

Таблица 5. Анализ эффективности разработанного алгоритма A2 (16) для вычисления обратной матрицы

	Количество операций для обращения \mathbf{T}^{-1}		Отношение вычислительной сложности разработанного алгоритма к вычислительной сложности известного алгоритма
	Известный алгоритм (86)	Разработанный алгоритм A2 (16)	
Антенная конфигурация $N \times N$	Действ. умножений/делений и сложений/вычитаний	Действ. умножений/делений и сложений/вычитаний	
2×2	14	14	1
4×4	172	268	1,55
8×8	1 688	2 520	1,49
16×16	14 896	10 416	0,7
32×32	125 024	58 464	0,47
64×64	1 024 192	380 352	0,37
128×128	8 290 688	2 604 672	0,31

Как видно из таблицы 5, предложенный алгоритм А2 (16) для вычисления обратной матрицы позволяет снизить количество элементарных арифметических операций в 1,5-3 раза по сравнению с известным алгоритмом (86) для матриц размерности от 16×16 до 128×128 , соответственно.

Вычислительная сложность алгоритма А3 (17) рассчитывается по формуле (79).

Таким образом, сложность вычисления оценки вектора переданных символов $\hat{\mathbf{x}}_{MMSE}$ на приёмной стороне в системах беспроводной связи, использующих технологию massive MIMO с использованием разработанного алгоритма А4 (18), с учетом выражений (10), (23), (24), (79), (91) может быть рассчитана по формуле:

$$\begin{aligned} Z_{MMSE3MST}(N) = & Z_{PROPMAT}(N) + Z_{SUMMAT}(N) + Z_{FROINV}(N) + \\ & + Z_{3MMATVEC}(N) + Z_{TRMATVECCONJ}(N) \end{aligned} \quad (25)$$

В таблице 6 приведено сравнение количества операций, требуемых для вычисления оценки $\hat{\mathbf{x}}_{MMSE}$ с использованием известного алгоритма (5) и разработанного алгоритма А4 (18).

Таблица 6. Анализ сложности вычисления оценки вектора переданных символов на приёмной стороне

	Количество операций для вычисления оценки $\hat{\mathbf{x}}_{MMSE}$		Отношение вычислительной сложности разработанного алгоритма к вычислительной сложности известного алгоритма
	Известный алгоритм МСКО (5), $Z_{MMSE}(N)$	Разработанный алгоритм А4 (18), $Z_{MMSE3MST}(N)$	
Демодулятор			
Антенная конфигурация $N \times N$	Действ. умножений/делений и сложений/вычитаний	Действ. умножений/делений и сложений/вычитаний	
2×2	92	96	1,04
4×4	640	706	1,10
8×8	4 640	5 068	1,09
16×16	35 008	26 808	0,77
32×32	271 232	192 912	0,64
64×64	2 133 760	1 204 320	0,56
128×128	16 924 160	8 659 264	0,51

Как видно из таблицы 6, использование разработанного алгоритма А4 (18) позволяет сократить количество требуемых арифметических операций для вычисления оценки вектора переданных символов в 1,4-2 раза по сравнению с известным алгоритмом демодуляции МСКО (5) в системах беспроводной связи, использующих многоэлементные антенны с антенными конфигурациями 16×16 и более.

Из графика, представленного на рисунке 10 видно, что при увеличении количества антенн эффективность разработанного алгоритма А4 (18) увеличивается по сравнению с известным алгоритмом (5).

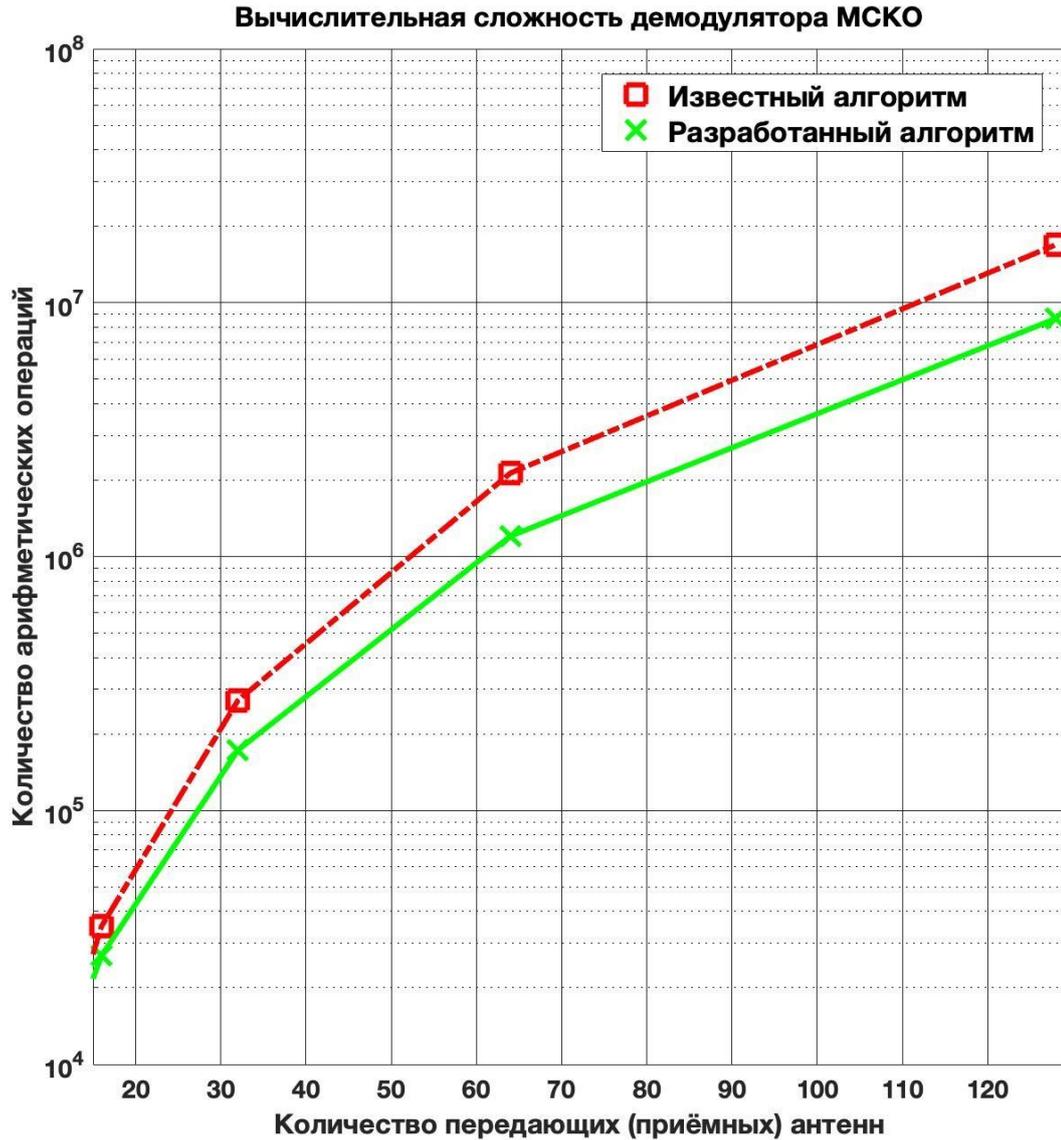


Рисунок 10. Зависимость вычислительной сложности алгоритма демодуляции МСКО от количества антенн

Таким образом, применение алгоритма Штрассена (67), (68) и метода ЗМ (75) к известному алгоритму демодуляции МСКО позволяет снизить общее количество элементарных арифметических операций в 2 раза для систем связи massive MIMO без потерь в помехоустойчивости.

2.4 Выводы

1. На основе известного алгоритма демодуляции МСКО разработана его модификация в виде алгоритма А4 (18) с меньшей вычислительной сложностью без потерь в помехоустойчивости для систем связи massive MIMO.
2. Предложенная модификация наилучшего среди линейных алгоритма демодуляции МСКО в виде алгоритма А4 (18) позволяет сократить его вычислительную сложность в 1,4-2 раза без потерь в помехоустойчивости для систем massive MIMO, имеющих от 16 до 128 передающих и приёмных антенн, соответственно.

3. Итерационный алгоритм демодуляции для систем massive MIMO с низкой вычислительной сложностью

В данной главе дано описание нового итерационного алгоритма демодуляции с низкой вычислительной сложностью, применение которого предполагается для систем беспроводной связи massive MIMO. По сравнению с алгоритмом А4 (18), рассмотренным ранее, итерационный характер алгоритма позволяет ещё больше снизить вычислительную сложность получения оценки вектора переданных символов.

Произведен анализ вычислительной сложности разработанного итерационного алгоритма демодуляции и сравнение разработанного алгоритма с известным алгоритмом МСКО с точки зрения вычислительной сложности и помехоустойчивости.

Предложен новый метод приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции информационных символов, который позволяет снизить вычислительную сложность получения «мягких» оценок символов в системах связи с помехоустойчивым кодированием.

3.1 Итерационный алгоритм демодуляции для систем massive MIMO

В параграфе 2.2 рассмотрены способы снижения вычислительной сложности алгоритма МСКО (5) без изменения его характеристик. К сожалению, потенциала алгоритма Штрассена (67), (68) и метода ЗМ (75) недостаточно для сокращения количества элементарных арифметических операций вычисления оценки вектора переданных символов в несколько раз, по сравнению с известным алгоритмом МСКО (5). Использование алгоритма Штрассена (67), (68) и метода ЗМ (75) для снижения вычислительной сложности алгоритма МСКО (5) не позволяет внести

никаких изменений в характеристики данного алгоритма. Поэтому далее предлагается новый итерационный алгоритм, который позволяет снизить вычислительную сложность процедуры демодуляции на приёмной стороне систем связи больше, чем алгоритм А4 (18), предложенный ранее.

Для снижения вычислительной сложности процедуры демодуляции предлагается отказаться от самой трудоемкой операции – обращение матрицы [76]. Данная операция является неотъемлемой частью известных алгоритмов демодуляции: декоррелятора (4) и алгоритма МСКО (5).

Для начала введём следующее обозначение:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}^H \mathbf{y}.$$

Теперь умножим обе части выражения (5) на матрицу $\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I}$ следующим образом:

$$(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I}) \hat{\mathbf{x}}_{MMSE} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I}) (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{y}. \quad (26)$$

Известно, что умножение матрицы на обратную к ней дает в результате единичную матрицу \mathbf{I} [26],[65],[66]. С учетом этого, выражение (26) можно привести к виду:

$$(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I}) \hat{\mathbf{x}}_{MMSE} = \mathbf{Y}. \quad (27)$$

Получившееся выражение (27) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Решением СЛАУ (27) является оценка вектора переданных символов $\hat{\mathbf{x}}_{MMSE}$.

В литературе [25]–[30],[77],[78] приводится описание различных методов решения СЛАУ. Все они подразделяются на две большие группы: точные методы и итерационные. Безусловно, использование точных методов решения СЛАУ позволит получить точно такую же оценку вектора переданных символов, как и при вычислении оценки по формуле (5).

Для снижения вычислительной сложности получения оценки вектора переданных символов на приёмной стороне, согласно формуле (27), предлагается использовать итерационные методы решения СЛАУ. Отличием итерационных методов от точных является возможность сократить количество требуемых

операций для получения результата за счет уменьшения количества итераций нахождения решения, но при этом снижается точность решения. Увеличение количества итераций при условии сходимости итерационного метода увеличивает точность полученного решения и в то же время увеличивает количество арифметических операций, требуемых для получения решения. Поэтому основной задачей при выборе итерационного метода решения СЛАУ является поиск компромисса между вычислительной сложностью метода и его точностью.

В качестве итерационного метода решения для СЛАУ (27) предлагается использовать итерационный стабилизированный метод бисопряжённых градиентов [29],[30].

Стабилизированный метод бисопряжённых градиентов был выбран после анализа сходимости различных методов и анализа их вычислительной сложности. Этот метод относится к классу проекционных методов, является развитием широко распространённого метода сопряженных градиентов. Этот метод позволяет решать системы общего вида и большой размерности, вне зависимости от симметрии или положительной определенности матрицы системы.

Решение системы линейных алгебраических уравнений, полученное с помощью итерационного метода решения, приближенное, поэтому имеет место замена $\hat{\mathbf{x}}_{MMSE}$ на $\hat{\mathbf{x}}_{ITER}$ в выражении (27), где $\|\hat{\mathbf{x}}_{MMSE} - \hat{\mathbf{x}}_{ITER}\| = \varepsilon$, где ε – некоторая величина отклонения от точного решения, которая должна быть мала.

С учетом описанной замены выражение (27) принимает вид:

$$(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I}) \hat{\mathbf{x}}_{ITER} = \mathbf{Y}. \quad (28)$$

Как было сказано ранее, для решения СЛАУ (28) предлагается использовать стабилизированный метод бисопряжённых градиентов. Далее приведем алгоритм A5 (29) работы данного метода, который описан в литературе [29],[30],[79].

<p>Входные данные: матрица $\mathbf{T} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I})$ размерности $N \times N$, вектор \mathbf{Y} размерности N.</p>	(29)
--	------

Шаг 1. Выбор некоторого начального приближения к решению системы уравнений $\hat{\mathbf{x}}_{BiCGstab}^{(0)}$. Обычно данное приближение выбирается нулевым. Задать максимальное количество итераций L .

Шаг 2. Вычислить невязку:

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{Y} - \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}_{ITER}^{(0)}.$$

Так как $\hat{\mathbf{x}}_{ITER}^{(0)} = \mathbf{0}$, то $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{Y}$.

Шаг 3. Задать вектор $\bar{\mathbf{r}}^{(0)}$, удовлетворяющий условию $(\mathbf{r}^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}^{(0)}) \neq 0$:

$$\bar{\mathbf{r}}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}.$$

Шаг 4. Задать базисный вектор $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$.

Шаг 5. Установить номер итерации $l = 0$.

Шаг 6. Вычислить:

$$\alpha^{(l)} = \frac{(\mathbf{r}^{(l)}, \bar{\mathbf{r}}^{(0)})}{(\mathbf{T}\mathbf{p}^{(l)}, \bar{\mathbf{r}}^{(0)})},$$

$$\mathbf{s}^{(l)} = \mathbf{r}^{(l)} - \alpha^{(l)}\mathbf{T}\mathbf{p}^{(l)},$$

$$\omega^{(l)} = \frac{(\mathbf{T}\mathbf{s}^{(l)}, \mathbf{s}^{(l)})}{(\mathbf{T}\mathbf{s}^{(l)}, \mathbf{T}\mathbf{s}^{(l)})},$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{ITER}^{(l+1)} = \hat{\mathbf{x}}^{(l)} + \alpha^{(l)}\mathbf{p}^{(l)} + \omega^{(l)}\mathbf{s}^{(l)}.$$

Если $(l+1) < L$, то переход к **Шагу 7**.

Если $(l+1) = L$, то переход к **Шагу 8**.

Шаг 7. Вычислить:

$$\mathbf{r}^{(l+1)} = \mathbf{Y} - \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}_{ITER}^{(l+1)},$$

$$\beta^{(l)} = \frac{(\mathbf{r}^{(l+1)}, \bar{\mathbf{r}}^{(0)})}{(\mathbf{r}^{(l)}, \bar{\mathbf{r}}^{(0)})},$$

$$\mathbf{p}^{(l+1)} = \mathbf{r}^{(l+1)} + \beta^{(l)} \mathbf{p}^{(l)} + \omega^{(l)} \mathbf{T} \mathbf{p}^{(l)}.$$

Задать $l = (l + 1)$.

Шаг 8. Принять $\hat{\mathbf{x}}_{ITER} = \hat{\mathbf{x}}_{ITER}^{(l+1)}$ как решение.

Выходные данные: вектор $\hat{\mathbf{x}}_{ITER}$ размерности N .

Отметим, что для получения максимального снижения вычислительной сложности решения СЛАУ при использовании итерационного метода должно выполняться условие $L \ll N$ [80].

Как видно из описания алгоритма А5 (29) стабилизированного метода бисопряженных градиентов, в качестве входных данных требуется знать матрицу СЛАУ \mathbf{T} , что требует выполнение операции вычисления произведения двух матриц \mathbf{H}^H и \mathbf{H} , асимптотическая сложность которой равна N^3 , как показано в приложении 5.

Для снижения вычислительной сложности решения СЛАУ (28) предлагается отказаться от вычисления матрицы СЛАУ \mathbf{T} , чтобы исключить операцию вычисления произведения двух матриц \mathbf{H}^H и \mathbf{H} . Далее приведем описание измененного алгоритма А6 (30) стабилизированного метода бисопряженных градиентов с учетом того, что матрица СЛАУ \mathbf{T} не вычисляется заранее.

Входные данные: матрица \mathbf{H} размерности $N \times N$, диагональная матрица $2\sigma^2 \mathbf{I}$ размерности $N \times N$, вектор \mathbf{Y} размерности N .

Шаг 1. Выбор начального приближения к решению системы уравнений (30)

$\hat{\mathbf{x}}_{ITER}^{(0)} = 0$. Задать максимальное количество итераций L .

Шаг 2. Вычислить невязку:

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{Y} - (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I}) \hat{\mathbf{x}}_{ITER}^{(0)} = \mathbf{Y} - \mathbf{H}^H (\mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{ITER}^{(0)}) + 2\sigma^2 (\mathbf{I} \hat{\mathbf{x}}_{ITER}^{(0)}).$$

Так как $\hat{\mathbf{x}}_{ITER}^{(0)} = \mathbf{0}$, то $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{Y}$.

Шаг 3. Задать вектор $\bar{\mathbf{r}}^{(0)}$, удовлетворяющий условию $(\mathbf{r}^{(0)}, \bar{\mathbf{r}}^{(0)}) \neq 0$:

$$\bar{\mathbf{r}}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}.$$

Шаг 4. Задать базисный вектор $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$.

Шаг 5. Установить номер итерации $l = 0$.

Шаг 6. Вычислить:

$$\alpha^{(l)} = \frac{(\mathbf{r}^{(l)}, \bar{\mathbf{r}}^{(0)})}{([\mathbf{H}^H (\mathbf{H} \mathbf{p}^{(l)}) + 2\sigma^2 (\mathbf{I} \mathbf{p}^{(l)})], \bar{\mathbf{r}}^{(0)})},$$

$$\mathbf{s}^{(l)} = \mathbf{r}^{(l)} - \alpha^{(l)} [\mathbf{H}^H (\mathbf{H} \mathbf{p}^{(l)}) + 2\sigma^2 (\mathbf{I} \mathbf{p}^{(l)})],$$

$$\omega^{(l)} = \frac{([\mathbf{H}^H (\mathbf{H} \mathbf{s}^{(l)}) + 2\sigma^2 (\mathbf{I} \mathbf{s}^{(l)})], \mathbf{s}^{(l)})}{([\mathbf{H}^H (\mathbf{H} \mathbf{s}^{(l)}) + 2\sigma^2 (\mathbf{I} \mathbf{s}^{(l)})], [\mathbf{H}^H (\mathbf{H} \mathbf{s}^{(l)}) + 2\sigma^2 (\mathbf{I} \mathbf{s}^{(l)})])},$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{ITER}^{(l+1)} = \hat{\mathbf{x}}^{(l)} + \alpha^{(l)} \mathbf{p}^{(l)} + \omega^{(l)} \mathbf{s}^{(l)}.$$

Если $(l+1) < L$, то переход к **Шагу 7**.

Если $(l+1) = L$, то переход к **Шагу 8**.

Шаг 7. Вычислить:

$$\mathbf{r}^{(l+1)} = \mathbf{Y} - \mathbf{H}^H (\mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{ITER}^{(l+1)}) + 2\sigma^2 (\mathbf{I} \hat{\mathbf{x}}_{ITER}^{(l+1)}),$$

Или

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(l+1)} &= \mathbf{Y} - (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I}) \hat{\mathbf{x}}_{ITER}^{(l+1)} = \\ &= \mathbf{Y} - (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I}) (\hat{\mathbf{x}}^{(l)} + \alpha^{(l)} \mathbf{p}^{(l)} + \omega^{(l)} \mathbf{s}^{(l)}) = \\ &= \mathbf{Y} - \mathbf{H}^H (\mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}^{(l)}) + 2\sigma^2 (\mathbf{I} \hat{\mathbf{x}}^{(l)}) + \alpha^{(l)} [\mathbf{H}^H (\mathbf{H} \mathbf{p}^{(l)}) + 2\sigma^2 (\mathbf{I} \mathbf{p}^{(l)})] + \\ &+ \omega^{(l)} [\mathbf{H}^H (\mathbf{H} \mathbf{s}^{(l)}) + 2\sigma^2 (\mathbf{I} \mathbf{s}^{(l)})] \end{aligned}$$

$$\beta^{(l)} = \frac{(\mathbf{r}^{(l+1)}, \bar{\mathbf{r}}^{(0)})}{(\mathbf{r}^{(l)}, \bar{\mathbf{r}}^{(0)})},$$

$$\mathbf{p}^{(l+1)} = \mathbf{r}^{(l+1)} + \beta^{(l)} \mathbf{p}^{(l)} + \omega^{(l)} [\mathbf{H}^H (\mathbf{H} \mathbf{p}^{(l)}) + 2\sigma^2 (\mathbf{I} \mathbf{p}^{(l)})].$$

Задать $l = (l+1)$.

Шаг 8. Принять $\hat{\mathbf{x}}_{ITER} = \hat{\mathbf{x}}_{ITER}^{(l+1)}$ как решение.

Выходные данные: вектор $\hat{\mathbf{x}}_{ITER}$ размерности N .

Приведем описание разработанного итерационного алгоритма демодуляции А7 (31) для систем беспроводной передачи данных, использующих технологию massive MIMO.

Входные данные: матрица \mathbf{H} размерности $N \times N$, диагональная матрица $2\sigma^2 \mathbf{I}$ размерности $N \times N$, вектор \mathbf{y} размерности N .

Шаг 1. Вычислить \mathbf{H}^H .

Шаг 2. Вычислить $\mathbf{Y} = \mathbf{H}^H \mathbf{y}$ с использованием алгоритма А3 (17).

Шаг 3. Задать L .

Шаг 4. Решить СЛАУ $(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I}) \hat{\mathbf{x}}_{ITER} = \mathbf{Y}$ с использованием алгоритма А6 (30).

Выходные данные: оценка вектора переданных символов $\hat{\mathbf{x}}_{ITER}$.

(31)

Далее сравним количество элементарных арифметических операций, необходимых для вычисления оценок вектора переданных символов $\hat{\mathbf{x}}_{ITER}$ и $\hat{\mathbf{x}}_{MMSE}$.

3.2 Анализ вычислительной сложности разработанного итерационного алгоритма демодуляции для систем massive MIMO

Для оценки вычислительной сложности разработанного итерационного алгоритма демодуляции А7 (31) произведем подсчёт элементарных арифметических операций, выполняемых для получения оценки $\hat{\mathbf{x}}_{ITER}$.

Для начала необходимо вычислить вектор $\mathbf{Y} = \mathbf{H}^H \mathbf{y}$. Для этого необходимо вычислить произведение квадратной матрицы размерности $N \times N$ на вектор размерности N . Так как эта операция выполняется с использованием алгоритма А3 (17), то её сложность рассчитывается по формуле (79).

После вычисления \mathbf{Y} можно составить СЛАУ (28). Для решения задачи демодуляции необходимо вычислить оценку вектора переданных символов $\hat{\mathbf{x}}_{ITER}$ с использованием стабилизированного метода бисопряжённых градиентов, согласно алгоритму А6 (30).

Рассмотрим подробно арифметические операции, выполняемые на всех шагах алгоритма А6 (30):

- **Шаг 1, Шаг 2, Шаг 3, Шаг 4, Шаг 5.** На этих шагах вычислительных операций не требуется.
- **Шаг 6.** На данном шаге на каждой итерации требуется выполнить следующие операции:
 - 4 произведения квадратной матрицы размерности $N \times N$ на вектор размерности N :

$$\mathbf{H} \mathbf{p}^{(l)},$$

$$\mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{p}^{(l)}),$$

$$\mathbf{H}\mathbf{s}^{(l)},$$

$$\mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{s}^{(l)});$$

- 4 скалярных произведения векторов размерности N :

$$(\mathbf{r}^{(l)}, \bar{\mathbf{r}}^{(0)}),$$

$$([\mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{p}^{(l)}) + 2\sigma^2 (\mathbf{I}\mathbf{p}^{(l)})], \bar{\mathbf{r}}^{(0)}),$$

$$([\mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{s}^{(l)}) + 2\sigma^2 \mathbf{I}\mathbf{s}^{(l)}], \mathbf{s}^{(l)}),$$

$$([\mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{s}^{(l)}) + 2\sigma^2 \mathbf{I}\mathbf{s}^{(l)}], [\mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{s}^{(l)}) + 2\sigma^2 \mathbf{I}\mathbf{s}^{(l)}]);$$

- 5 произведений вектора размерности N на число:

$$\alpha^{(l)} [\mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{p}^{(l)}) + 2\sigma^2 \mathbf{I}\mathbf{p}^{(l)}],$$

$$\alpha^{(l)} \mathbf{p}^{(l)},$$

$$\omega^{(l)} \mathbf{s}^{(l)},$$

$$2\sigma^2 (\mathbf{I}\mathbf{p}^{(l)}),$$

$$2\sigma^2 (\mathbf{I}\mathbf{s}^{(l)});$$

- 4 суммы векторов размерности N :

$$\mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{p}^{(l)}) + 2\sigma^2 \mathbf{I}\mathbf{p}^{(l)},$$

$$\mathbf{r}^{(l)} - \alpha^{(l)} [\mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{p}^{(l)}) + 2\sigma^2 \mathbf{I}\mathbf{p}^{(l)}],$$

$$\hat{\mathbf{x}}^{(l)} + \alpha^{(l)} \mathbf{p}^{(l)},$$

$$(\hat{\mathbf{x}}^{(l)} + \alpha^{(l)} \mathbf{p}^{(l)}) + \omega^{(l)} \mathbf{s}^{(l)}.$$

• **Шаг 7.** На данном шаге на всех итерациях, кроме последней, требуется выполнить следующие операции:

- 2 скалярных произведения векторов:

$$(\mathbf{r}^{(l+1)}, \bar{\mathbf{r}}^{(0)}),$$

$$(\mathbf{r}^{(l)}, \bar{\mathbf{r}}^{(0)});$$

- 3 произведения вектора размерности N на число:

$$\begin{aligned} & \omega^{(l)} \left[\mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{s}^{(l)}) + 2\sigma^2 (\mathbf{I}\mathbf{s}^{(l)}) \right], \\ & \beta^{(l)} \mathbf{p}^{(l)}, \\ & \omega^{(l)} \left[\mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{p}^{(l)}) + 2\sigma^2 (\mathbf{I}\mathbf{p}^{(l)}) \right]; \end{aligned}$$

- 4 суммы векторов размерности N :

$$\begin{aligned} & \beta^{(l)} \mathbf{p}^{(l)} + \omega^{(l)} \left[\mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{p}^{(l)}) + 2\sigma^2 (\mathbf{I}\mathbf{p}^{(l)}) \right], \\ & \mathbf{r}^{(l+1)} + \left(\beta^{(l)} \mathbf{p}^{(l)} + \omega^{(l)} \left[\mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{p}^{(l)}) + 2\sigma^2 (\mathbf{I}\mathbf{p}^{(l)}) \right] \right), \\ & \left[\mathbf{Y} - \mathbf{H}^H (\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}^{(l)}) + 2\sigma^2 (\mathbf{I}\hat{\mathbf{x}}^{(l)}) \right] + \alpha^{(l)} \left[\mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{p}^{(l)}) + 2\sigma^2 (\mathbf{I}\mathbf{p}^{(l)}) \right], \\ & \left(\mathbf{Y} - \mathbf{H}^H (\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}^{(l)}) + 2\sigma^2 (\mathbf{I}\hat{\mathbf{x}}^{(l)}) + \alpha^{(l)} \left[\mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{p}^{(l)}) + 2\sigma^2 (\mathbf{I}\mathbf{p}^{(l)}) \right] \right) + \\ & + \omega^{(l)} \left[\mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{s}^{(l)}) + 2\sigma^2 (\mathbf{I}\mathbf{s}^{(l)}) \right] \end{aligned}$$

Операции произведения квадратной матрицы размерности $N \times N$ на вектор размерности N предлагается выполнить с использованием метода 3М (75), как описано в приложении 4. Таким образом, вычислительная сложность операции рассчитывается по формуле (79).

Операция вычисления скалярного произведения двух векторов размерности N включает в себя операции умножения всех N компонентов одного вектора на все N компонентов другого вектора и последующее суммирование всех результатов этих умножений. Таким образом, вычислительная сложность данной операции составляет N операций умножения и $N - 1$ операций сложения. Так как в нашем случае компоненты векторов – комплексные величины, то при количество элементарных арифметических операций над действительными числами будет равно:

$$Z_{SKAL}(N) = 4N + 2N + 2(N - 1) = 8N - 2. \quad (32)$$

Сложность вычисления произведения вектора размерности N на число составит N операций умножения. С учетом того, что вектор содержит комплексные числа количество операций увеличится в 2 раза и составит:

$$Z_{NUMVEC}(N) = 2N. \quad (33)$$

Вычисление суммы двух векторов размерности N представляет из себя сложение N элементов этих векторов, элементы которых являются комплексными числами, поэтому сложность данной операции может быть оценена:

$$Z_{VECSUM}(N) = 2N. \quad (34)$$

Таким образом, общая сложность алгоритма А7 (31), может быть рассчитана по выражениям (32), (33), (34), (79) как:

$$\begin{aligned} Z_{ITER}(N) &= Z_{3MMATVEC}(N) + L \left(4Z_{3MMATVEC}(N) + 4Z_{SKAL}(N) + \right) + \\ &+ (L-1) \left(2Z_{SKAL}(N) + 3Z_{NUMVEC}(N) + 4Z_{VECSUM}(N) \right) = \\ &= 7N^2 + N + L \left[4(7N^2 + N) + 4(8N - 2) + 5(2N) + 4(2N) \right] + \\ &+ (L-1) \left[2(8N - 2) + 3(2N) + 4(2N) \right] = \quad (35) \\ &= 7N^2 + N + L \left[28N^2 + 4N + 32N - 12 + 10N + 8N \right] + \\ &+ (L-1) \left[16N - 4 + 6N + 8N \right] = \\ &= 7N^2 + N + L \left[28N^2 + 54N - 12 \right] + (L-1) \left[30N - 4 \right] \end{aligned}$$

Как видно из выражения (35), вычислительная сложность алгоритма А7 (31) зависит от максимального количества итераций L . Таким образом, асимптотическая вычислительная сложность алгоритма А7 (31) равна LN^2 . Как известно, точность решения СЛАУ итерационным методом также зависит от количества итераций. Далее приводится оценка вычислительной сложности алгоритма А7 (31) для разного количества итераций решения СЛАУ (28) стабилизированным методом бисопряжённых градиентов, согласно алгоритму А6 (30).

В таблице 7 приведено сравнение количества операций, требуемых для вычисления оценки $\hat{\mathbf{x}}_{MMSE}$ с использованием известного алгоритма (5) и $\hat{\mathbf{x}}_{ITER}$ с использованием разработанного алгоритма А7 (31) с количеством итераций $L = \frac{N}{4}$ для антенных конфигураций massive MIMO.

Таблица 7. Вычислительная сложность известного алгоритма МСКО (5) и итерационного алгоритма демодуляции при $L = \frac{N}{4}$

	Количество операций для вычисления оценки вектора переданных символов		Отношение вычислительной сложности разработанного алгоритма к вычислительной сложности известного алгоритма
	Известный алгоритм МСКО (5), $Z_{MMSE}(N)$	Разработанный алгоритм А7 (31), $Z_{ITER}(N)$	
Демодулятор			
Антенная конфигурация $N \times N$	Действ. умножений/делений и сложений/вычитаний	Действ. умножений/делений и сложений/вычитаний	
64×64	2 133 760	2 039 620	0,96
128×128	16 924 160	15 502 980	0,91

Как видно из таблицы 7, при $L = \frac{N}{4}$ выигрыш разработанного алгоритма А7 (31) перед известным алгоритмом МСКО (5) составляет менее 10%. Теперь сравним вычислительную сложность известного алгоритма МСКО (5) с разработанным алгоритмом А7 (31) при $L = \frac{N}{8}$ для антенных конфигураций massive MIMO. Результаты данного сравнения приведены в таблице 8.

Таблица 8. Вычислительная сложность известного алгоритма МСКО (5) и итерационного алгоритма демодуляции при $L = \frac{N}{8}$

Демодулятор	Количество операций для вычисления оценки вектора переданных символов		Отношение вычислительной сложности разработанного алгоритма к вычислительной сложности известного алгоритма
	Известный алгоритм МСКО (5)	Разработанный алгоритм А7 (31), $Z_{ITER}(N)$	
Антенная конфигурация $N \times N$	Действ. умножений/делений и сложений/вычитаний	Действ. умножений/делений и сложений/вычитаний	
64×64	2 133 760	1 076 132	0,50
128×128	16 924 160	7 978 820	0,47

Из таблицы 8 видно, что сокращение количества итераций разработанного алгоритма А7 (31) с $L = \frac{N}{4}$ до $L = \frac{N}{8}$ позволяет увеличить выигрыш в вычислительной сложности разработанного алгоритма А7 (31) перед известным алгоритмом МСКО (5) с 10% до 50%. Таким образом, вычислительная сложность разработанного алгоритма А7 (31) при $L = \frac{N}{8}$ в 2 раза меньше сложности известного алгоритма МСКО (5) для систем massive MIMO. Снижение вычислительной сложности в этом случае сравнимо с алгоритмом А4 (18), который был описан в параграфе 2.2.

Для большего снижения вычислительной сложности процедуры демодуляции в системе massive MIMO проанализируем сложность разработанного алгоритма А7 (31) при $L = \frac{N}{16}$. Результаты анализа приведены в таблице 9.

Таблица 9. Вычислительная сложность известного алгоритма МСКО (5) и итерационного алгоритма демодуляции при $L = \frac{N}{16}$

	Количество операций для вычисления оценки вектора переданных символов		Отношение вычислительной сложности разработанного алгоритма к вычислительной сложности известного алгоритма
Демодулятор	Известный алгоритм МСКО (5)	Разработанный алгоритм А7 (31), $Z_{ITER}(N)$	
Антенная конфигурация $N \times N$	Действ. умножений/делений и сложений/вычитаний	Действ. умножений/делений и сложений/вычитаний	
64×64	2 133 760	594 388	0,28
128×128	16 924 160	4 216 740	0,25

Таким образом, использование разработанного алгоритма А7 (31) для демодуляции сигнала с количеством итераций $L = \frac{N}{16}$ позволяет получить выигрыш в вычислительной сложности в 4 раза по сравнению с известным алгоритмом МСКО (5).

Дальнейшее снижение итераций для вычисления оценки $\hat{\mathbf{x}}_{ITER}$ с использованием разработанного алгоритма А7 (31) позволит получить еще больший выигрыш в вычислительной сложности по сравнению с известным алгоритмом МСКО (5). В таблице 10 приведен анализ сложности разработанного алгоритма А7 (31) при $L = \frac{N}{32}$.

Таблица 10. Вычислительная сложность известного алгоритма МСКО (5) и итерационного алгоритма демодуляции при $L = \frac{N}{32}$

	Количество операций для вычисления оценки вектора переданных символов		Отношение вычислительной сложности разработанного алгоритма к вычислительной сложности известного алгоритма
Демодулятор	Известный алгоритм МСКО (5)	Разработанный алгоритм А7 (31), $Z_{ITER}(N)$	
Антенная конфигурация $N \times N$	Действ. умножений/делений и сложений/вычитаний	Действ. умножений/делений и сложений/вычитаний	
128×128	16 924 160	2 335 700	0,14

Использование разработанного алгоритма А7 (31) для нахождения оценки $\hat{\mathbf{x}}_{ITER}$ с количеством итераций $L = \frac{N}{32}$ целесообразно использовать для антенной конфигурации 128×128. Как видно из таблицы 10, в этом случае вычислительная сложность разработанного алгоритма А7 (31) в 7 раз меньше, чем у известного алгоритма МСКО (5).

Далее произведем сравнение помехоустойчивости разработанного алгоритма А7 (31) с известным алгоритмом МСКО (5).

3.3 Исследование помехоустойчивости разработанного итерационного алгоритма демодуляции для систем massive MIMO

Для оценки эффективности разработанного итерационного алгоритма А7 (31) произведено сравнение его помехоустойчивости на основе коэффициента битовой

ошибки BER с известным алгоритмом МСКО (5) при модуляции 16-КАМ и 4-ФМ для антенных конфигураций 64×64 и 128×128 [81]. Условия моделирования для антенной конфигурации 64×64 представлены в таблице 11.

Таблица 11. Параметры модели для сравнения помехоустойчивости известного алгоритма МСКО (5) и итерационного алгоритма А7 (31) в системе massive MIMO 64×64

Параметр	Значение
Канал связи	MIMO
Замирания в канале	Рэлеевские некоррелированные
Количество передающих антенн	64
Количество приёмных антенн	64
Архитектура	V-BLAST
Метод модуляции	4-ФМ
Демодулятор	МСКО (5), итерационный алгоритм А7 (31)
Помехоустойчивое кодирование	–
Количество итераций для алгоритма А7 (31)	$L = \frac{N}{16}$

Результаты моделирования помехоустойчивости при условиях, приведенных в таблице 11, представлены на рисунке 11.

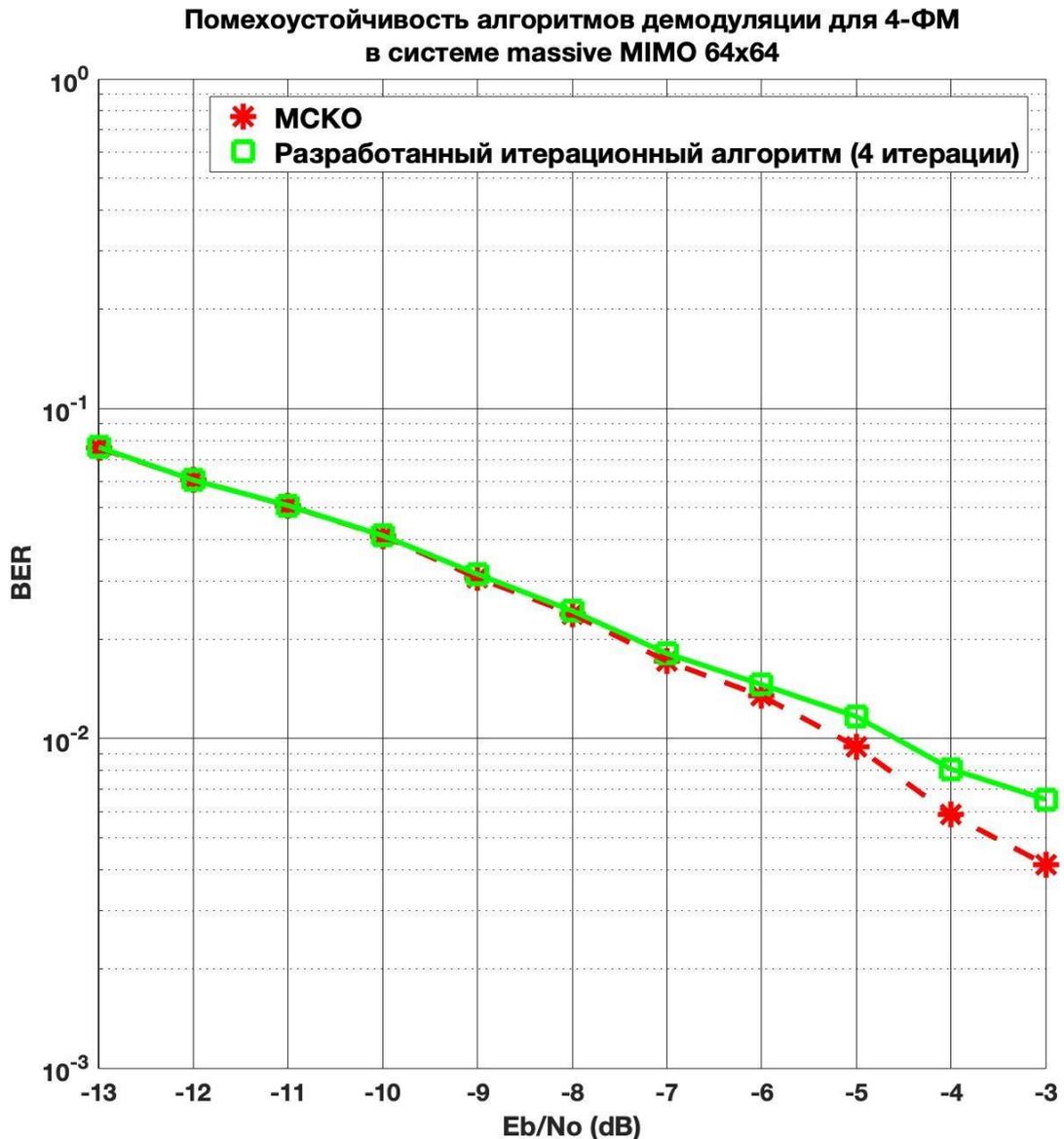


Рисунок 11. Сравнение помехоустойчивости при модуляции 4-ФМ в системе massive MIMO 64×64

Как видно из рисунка 11, разработанный алгоритм А7 (31) по сравнению с известным алгоритмом МСКО (5) при модуляции 4-ФМ не имеет потерь по уровню коэффициента битовых ошибок $BER = 5 \cdot 10^{-2}$, при этом вычислительная сложность разработанного алгоритма А7 (31) в 4 раза меньше сложности известного алгоритма МСКО (5).

Далее произведем сравнение помехоустойчивости по коэффициенту битовой ошибки BER в системе massive MIMO с антенной конфигурацией 128×128 при модуляции 4-ФМ, согласно условиям, приведенным в таблице 12.

Таблица 12. Параметры модели для сравнения помехоустойчивости известного алгоритма МСКО (5) и итерационного алгоритма А7 (31) в системе massive MIMO 128×128

Параметр	Значение
Канал связи	MIMO
Замирания в канале	Рэлеевские некоррелированные
Количество передающих антенн	128
Количество приёмных антенн	128
Архитектура	V-BLAST
Метод модуляции	4-ФМ
Демодулятор	МСКО (5), итерационный алгоритм А7 (31)
Помехоустойчивое кодирование	–
Количество итераций для алгоритма А7 (31)	$L = \frac{N}{32}$

Результаты моделирования помехоустойчивости известного алгоритма демодуляции МСКО (5) и разработанного итерационного алгоритма А7 (31) представлены на рисунке 12.

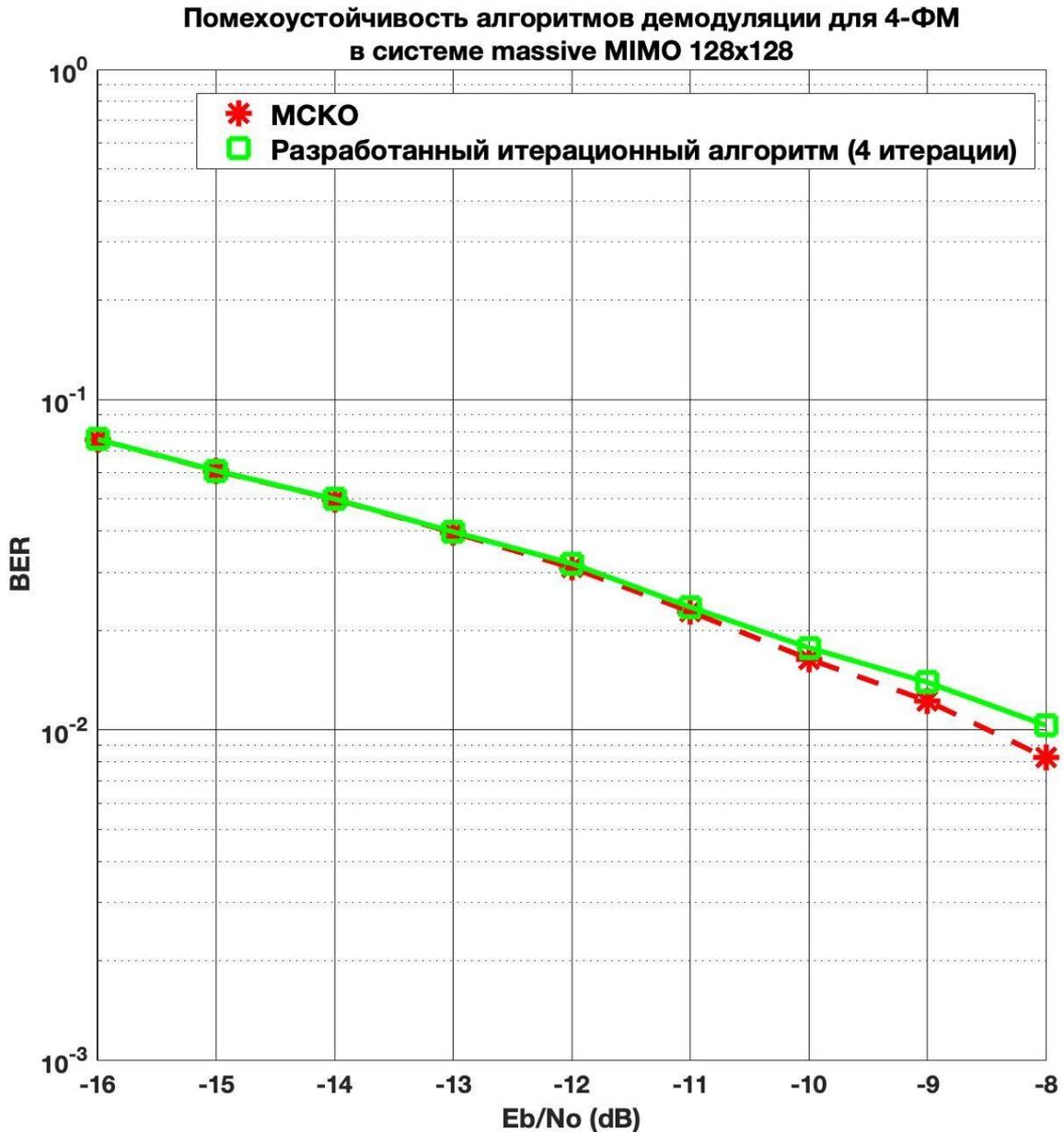


Рисунок 12. Сравнение помехоустойчивости при модуляции 4-ФМ в системе massive MIMO 128×128

На рисунке 12 видно, что потери в помехоустойчивости разработанного алгоритма А7 (31) по сравнению с известным алгоритмом МСКО (5) при модуляции 4-ФМ по уровню коэффициента битовых ошибок $BER = 5 \cdot 10^{-2}$ отсутствуют, при этом вычислительная сложность разработанного алгоритма А7 (31) в 7 раз меньше сложности известного алгоритма МСКО (5).

Далее произведем сравнение помехоустойчивости по коэффициенту битовой ошибки BER в системе massive MIMO с антенной конфигурацией 128×128 при модуляции 16-QAM, согласно условиям, приведенным в таблице 13.

Таблица 13. Параметры модели для сравнения помехоустойчивости известного алгоритма МСКО (5) и итерационного алгоритма А7 (31) в системе massive MIMO 128×128

Параметр	Значение
Канал связи	MIMO
Замирания в канале	Рэлеевские некоррелированные
Количество передающих антенн	128
Количество приёмных антенн	128
Архитектура	V-BLAST
Метод модуляции	16-QAM
Демодулятор	МСКО (5), итерационный алгоритм А7 (31)
Помехоустойчивое кодирование	–
Количество итераций для алгоритма А7 (31)	$L = \frac{N}{16}$

Результаты моделирования помехоустойчивости известного алгоритма демодуляции МСКО (5) и разработанного итерационного алгоритма А7 (31) представлены на рисунке 13.

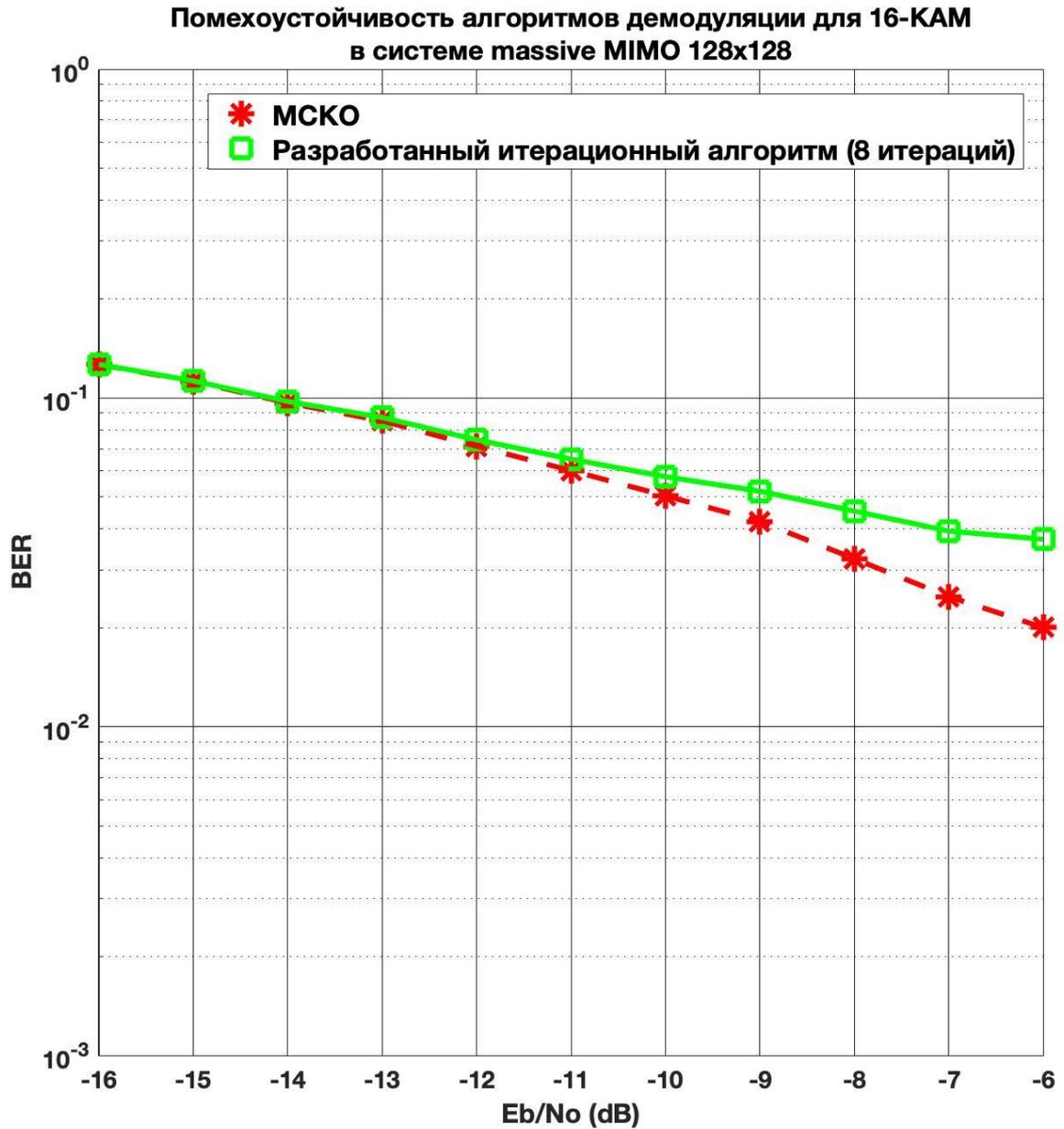


Рисунок 13. Сравнение помехоустойчивости при модуляции 16-КАМ в системе massive MIMO 128×128

Как видно из рисунка 13, потери в помехоустойчивости разработанного алгоритма А7 (31) по сравнению с известным алгоритмом МСКО (5) при модуляции 16-КАМ по уровню коэффициента битовых ошибок $BER = 5 \cdot 10^{-2}$

составляют порядка 1 дБ, при этом вычислительная сложность разработанного алгоритма А7 (31) в 4 раза меньше сложности известного алгоритма МСКО (5).

По результатам моделирования можно сделать вывод, что применение разработанного итерационного алгоритма А7 (31) целесообразно для систем беспроводной связи с антенными конфигурациями massive MIMO.

Далее рассмотрим возможность применения разработанного итерационного алгоритма А7 (31) для систем беспроводной связи massive MIMO, использующих помехоустойчивое кодирование.

3.4 Алгоритм вычисления дисперсий ошибок демодуляции для систем связи с помехоустойчивым кодированием и мягким декодированием

Часто для увеличения помехоустойчивости систем связи по сравнению с традиционными схемами обработки сигналов используется помехоустойчивое кодирование [2],[37],[82],[83]. Рассмотрим систему связи с пространственным мультиплексированием, основанную на архитектуре V-BLAST. В этом случае входной поток бит сначала подвергается процедуре кодирования, а затем уже разбивается на блоки, количество которых соответствует количеству передающих антенн M .

В системах связи с помехоустойчивым кодированием и мягким декодированием при демодуляции сигнала на приёмной стороне необходимо учитывать дисперсию ошибок демодуляции [1],[84],[85]. Для каждого символа дисперсия равна соответствующему элементу главной диагонали корреляционной матрицы ошибок демодуляции [1],[86]. Значение дисперсии ошибки демодуляции подается на вход демодулятора, использующего логарифмическое отношение правдоподобия для демодуляции каждого символа [87],[88]–[90].

В случае использования известного алгоритма демодуляции МСКО (5) корреляционная матрица ошибок демодуляции будет выглядеть следующим образом [1],[4],[36],[90]–[92]:

$$\mathbf{R}_{MMSE} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I})^{-1} 2\sigma^2. \quad (36)$$

С учетом того, что $\mathbf{T} = \mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I}$, выражение (36) можно записать как:

$$\mathbf{R}_{MMSE} = \mathbf{T}^{-1} 2\sigma^2 \quad (37)$$

Как видно из (36), вычисление корреляционной матрицы ошибок демодуляции требует выполнения операции обращения матрицы. В параграфе 2.1, показано, что данная операция имеет асимптотическую вычислительную сложность N^3 . Таким образом, для систем беспроводной связи с помехоустойчивым кодированием недостаточно снизить сложность операции вычисления оценок вектора переданных символов. Необходимо также снизить сложность операции вычисления диагональных элементов корреляционной матрицы ошибок оценивания (36). Отметим, что для процедуры демодуляции по критерию логарифмического отношения правдоподобия необходимо знать только элементы главной диагонали матрицы \mathbf{R}_{MMSE} . Значения элементов корреляционной матрицы \mathbf{R}_{MMSE} , расположенных не на главной диагонали, не играют роли при «мягкой» демодуляции.

Для снижения вычислительной сложности операции вычисления элементов главной диагонали матрицы \mathbf{R}_{MMSE} предлагается использовать некоторые члены ряда Неймана [86],[93]. Рассмотрим это подробнее.

Введем следующее обозначение:

\mathbf{K} – матрица, элементы главной диагонали которой совпадают с элементами матрицы \mathbf{T} , а остальные элементы нулевые.

Для нахождения приближенного значения элементов обратной матрицы справедливо представление [86]:

$$\mathbf{T}^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} (\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{T} \mathbf{K}^{-1} - \mathbf{I}))^s \mathbf{K}^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} (\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{K}^{-1} - \mathbf{K}^{-1})^s \mathbf{K}^{-1}. \quad (38)$$

Так как нам необходимо снизить сложность вычисления операции вычисления корреляционной матрицы ошибок демодуляции \mathbf{R}_{MMSE} , то сделать это возможно, отказавшись от арифметических операций, асимптотическая сложность которых равна N^3 и выше. В связи с этим, для приближенного вычисления $(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I})^{-1}$ с низкой вычислительной сложностью по формуле (38) необходимо ограничиться членами ряда Неймана порядка, не выше первого.

Обозначим $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^{-1}$. Таким образом, выражение (38) принимает вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}} &\approx (\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{K}^{-1} - \mathbf{K}^{-1})^0 \mathbf{K}^{-1} + (\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{K}^{-1} - \mathbf{K}^{-1})^1 \mathbf{K}^{-1} \approx \\ &\approx \mathbf{K}^{-1} + (\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{K}^{-1} - \mathbf{K}^{-1}) \mathbf{K}^{-1} \approx 2\mathbf{K}^{-1} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{K}^{-2} - \mathbf{K}^{-2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Для повышения точности приближенного нахождения элементов главной диагонали матрицы введём нормировочный коэффициент f :

$$f = \sqrt{\frac{N}{2\sigma^2}}. \quad (40)$$

Умножим все слагаемые из выражения (39), которые выбраны нами для вычисления приближенного значения обратной матрицы, на коэффициент f :

$$\hat{\mathbf{T}} = (2\mathbf{K}^{-1} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{K}^{-2} - \mathbf{K}^{-2}) f. \quad (41)$$

Введение коэффициента f позволяет уменьшить ошибку аппроксимации обратной матрицы, вызванную усечением ряда Неймана. Корреляционная матрица в таком случае может быть вычислена как:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{T}} 2\sigma^2. \quad (42)$$

Так как матрица \mathbf{K}^{-1} содержит только элементы на главной диагонали и дисперсиями ошибок демодуляции являются элементы главной диагонали матрицы $\tilde{\mathbf{R}}$, нет необходимости вычислять все элементы матрицы \mathbf{T} . Достаточно вычислить элементы её главной диагонали, так как результатом произведения $\mathbf{K}^{-1} \mathbf{T}$ также будет матрица, содержащая элементы только на главной диагонали, то есть, $diag(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{T}) = diag(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K})$, где $diag(\)$ – операций извлечения элементов

главной диагонали матрицы в вектор. Таким образом, выражение (41) можно записать следующим образом:

$$\hat{\mathbf{T}} = (2\mathbf{K}^{-1} - (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K})\mathbf{K}^{-2} - \mathbf{K}^{-2})f = (2\mathbf{K}^{-1} - 2\mathbf{K}^{-2})f. \quad (43)$$

Далее приведено описание разработанного алгоритма А8 (44) приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции, использование которого позволяет снизить вычислительную сложность демодуляции сигнала в системах связи с помехоустойчивым кодированием, использующих технологию massive MIMO.

Входные данные: комплексная матрица \mathbf{H} размерности $N \times N$, суммарная дисперсия действительной и мнимой компоненты вектора гауссовского шума $2\sigma^2$, диагональная матрица $2\sigma^2\mathbf{I}$ размерности $N \times N$.

Шаг 1. Задать матрицу \mathbf{H}^H .

Шаг 2. Вычислить коэффициент $f = \sqrt{\frac{N}{2\sigma^2}}$.

Шаг 3. Вычислить вектор \mathbf{k} , состоящий из элементов главной диагонали матрицы $(\mathbf{H}^H\mathbf{H} + 2\sigma^2\mathbf{I})$. (44)

Элементы вектора \mathbf{k} вычислить следующим образом при $i = 1 \dots N$:

$$\mathbf{k}_i = \sum_{m=1}^N h_{im}^H h_{mi} + 2\sigma^2,$$

где h_{ik}^H – элементы матрицы \mathbf{H}^H , h_{ki} – элементы матрицы \mathbf{H} .

Задать матрицу $\mathbf{K} = \text{diag}(\mathbf{k})$, $\text{diag}(\mathbf{k})$ – операция формирования матрицы, на главной диагонали которой находятся элементы вектора \mathbf{k} , а остальные элементы нулевые.

Шаг 4. Вычислить $\hat{\mathbf{T}} = (2\mathbf{K}^{-1} - 2\mathbf{K}^{-2})f$.

Шаг 5. Вычислить $\tilde{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{T}}2\sigma^2$.

Шаг 6. Присвоить $\tilde{r} = \text{diag}(\tilde{\mathbf{R}})$.

Выходные данные: вектор дисперсий ошибок демодуляции \tilde{r} размерности N .

В результате, используя разработанной алгоритм А8 (44) приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции, мы получим приближенное значение элементов главной диагонали корреляционной матрицы ошибок демодуляции $\tilde{\mathbf{R}}$. Для демодуляции символов на приёмной стороне по критерию логарифмического отношения правдоподобия нам необходимы только элементы главной диагонали матрицы $\tilde{\mathbf{R}}$. Эти элементы являются элементами вектора $\tilde{\mathbf{r}}$:

$$\tilde{r}_i = \tilde{R}_{ii}, \quad (45)$$

где $i = 1 \dots N$. Соответственно, при демодуляции символа, принятого i -ой антенной, по критерию логарифмического отношения правдоподобия на демодулятор также необходимо подать соответствующее значение \tilde{r}_i дисперсии ошибки демодуляции этого символа. Далее произведем оценку вычислительной сложности разработанного алгоритма А8 (44) приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции.

3.5 Анализ вычислительной сложности разработанного алгоритма приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции для систем связи с помехоустойчивым кодированием

Для вычисления корреляционной матрицы ошибок демодуляции \mathbf{R}_{MMSE} при использовании известного алгоритма демодуляции МСКО (5) по формуле (36) необходимо будет матрицу $(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I})^{-1}$, вычисленную при демодуляции по формуле (5), умножить на число $2\sigma^2$. Таким образом, для вычисления корреляционной матрицы ошибок демодуляции \mathbf{R}_{MMSE} не требуется повторно вычислять матрицу $(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I})^{-1}$. Сложность операции вычисления произведения квадратной эрмитовой матрицы $(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I})^{-1}$ размерности $N \times N$ на число требует:

1. N операций умножения действительных чисел: умножение действительных элементов главной диагонали эрмитовой матрицы $(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I})^{-1}$ на число $2\sigma^2$;

2. $N(N-1)$ операций умножения действительного числа на комплексное: умножение комплексных элементов эрмитовой матрицы $(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I})^{-1}$, расположенных не на главной диагонали, на число $2\sigma^2$.

Таким образом, вычислительная сложность операции произведения квадратной эрмитовой матрицы $(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I})^{-1}$ размерности $N \times N$ на число $2\sigma^2$ можно выразить как:

$$Z_{NUMMAT}(N) = N + 2N(N-1) = N + 2N^2 - 2N = 2N^2 - N. \quad (46)$$

Общее количество элементарных арифметических операций над действительными числами требуемых для демодуляции сигнала с использованием известного алгоритма демодуляции МСКО (5) в системах связи с помехоустойчивым кодированием можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_{KNOWN}(N) &= Z_{MMSE}(N) + Z_{NUMMAT}(N) = (8N^3 + 9N^2 - 3N) + (2N^2 - N) = \\ &= 8N^3 + 11N^2 - 4N \end{aligned} \quad (47)$$

где $Z_{MMSE}(N)$ – сложность вычисления оценки $\hat{\mathbf{x}}_{MMSE}$, $Z_{NUMMAT}(N)$ – сложность операции произведения матрицы размерности $N \times N$ на число.

Далее оценим сложность приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции с использованием разработанного алгоритма А8 (44).

Для вычисления $\tilde{\mathbf{R}}$ с использованием разработанного алгоритма А8 (44) необходимо выполнить следующие операции:

1. На **Шаге 3** разработанного алгоритма А8 (44) необходимо выполнить операцию вычисления диагональных элементов матрицы $\mathbf{T} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I})$: для этого требуется N^2 умножений комплексно-сопряженных чисел и $2N - 1$ сложений действительных чисел;

2. На **Шаге 4** разработанного алгоритма А8 (44) необходимо выполнить следующие операции:

2.1. Вычисление матрицы \mathbf{K}^{-1} обратной к диагональной матрице \mathbf{K} : эта операция требует N делений действительных чисел;

2.2. Вычисление произведения диагональной матрицы \mathbf{K}^{-1} на число 2: эта операция требует N умножений действительных чисел;

2.3. Вычисление диагональной матрицы \mathbf{K}^{-2} : для этого требуется N умножений действительных чисел и N делений действительных чисел;

2.4. Вычисление произведения диагональной матрицы \mathbf{K}^{-2} на число 2: эта операция требует N умножений действительных чисел;

2.5. Вычисление разности двух диагональных матриц $2\mathbf{K}^{-1}$ и $2\mathbf{K}^{-2}$: эта операция требует N сложений действительных чисел;

2.6. Вычисление произведения диагональной матрицы $(2\mathbf{K}^{-1} - 2\mathbf{K}^{-2})$ на число f : эта операция требует N умножений действительных чисел.

3. На **Шаге 5** разработанного алгоритма А8 (44) необходимо выполнить следующую операцию:

3.1. Вычисление произведения диагональной матрицы на число $2\sigma^2$: эта операция требует N умножений действительных чисел.

Как описано в приложении 5, одно умножение комплексно-сопряженных чисел требует выполнения двух умножений над действительными числами и одного сложения над действительными числами. Таким образом, вычислительная сложность операций, выполняемых на **Шаге 3** разработанного алгоритма А8 (44) для действительных чисел может быть выражена следующим образом:

$$Z_{DIAGCALC}(N) = 2N^2 + N^2 + 2N - 1 = 3N^2 + 2N - 1. \quad (48)$$

Далее рассмотрим сложность операций, выполняемых на **Шаге 4** разработанного алгоритма А8 (44). Вычислительная сложность обращения диагональной матрицы \mathbf{K} можно записать как:

$$Z_{DIAGINV}(N) = N. \quad (49)$$

Сложность вычисления произведения диагональной матрицы размерности $N \times N$ на число выразим следующим образом:

$$Z_{DIAGNUM}(N) = N. \quad (50)$$

А сложность вычисления диагональной матрицы \mathbf{K}^{-2} можно записать так:

$$Z_{INV2}(N) = 2N. \quad (51)$$

Сложность вычисления разности двух диагональных матриц $2\mathbf{K}^{-1}$ и $2\mathbf{K}^{-2}$ запишем следующим образом:

$$Z_{DIAGSUM}(N) = N. \quad (52)$$

Вычислительная сложность операции, выполняемой на **Шаге 5** разработанного алгоритма А8 (44), может быть рассчитана с использованием выражения (50).

Таким образом, с учетом выражений (48), (49), (50), (51), (52) общая сложность вычисления дисперсий ошибок демодуляции с использованием разработанного алгоритма А8 (44) может быть выражена следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_{DISP}(N) &= Z_{DIAGCALC}(N) + Z_{DIAGINV}(N) + 4Z_{DIAGNUM}(N) + Z_{INV2}(N) + \\ &+ Z_{DIAGSUM}(N) = 3N^2 + 2N - 1 + N + 4N + 2N + N = 3N^2 + 10N - 1. \end{aligned} \quad (53)$$

Далее произведем оценку эффективности использования разработанных алгоритмов в системе massive MIMO.

3.6 Совместное использование разработанных алгоритмов в системах связи massive MIMO с помехоустойчивым кодированием

Рассмотрим случай совместного использования разработанных алгоритмов – итерационного алгоритма демодуляции A7 (31) и алгоритма приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции A8 (44) – для снижения вычислительной сложности процедуры обработки сигнала на приёмной стороне в системах беспроводной связи massive MIMO с помехоустойчивым кодированием.

Для начала произведём оценку количества необходимых операций для обработки сигнала при приёме. Рассматривать будем сложность двух процедур: демодуляции сигнала и вычисления дисперсий ошибок демодуляции.

Осуществить демодуляцию сигнала можно, используя известный алгоритм МСКО (5) или применив разработанный итерационный алгоритм демодуляции A7 (31), который обладает меньше вычислительной сложностью по сравнению с известным алгоритмом МСКО (5).

Количество элементарных арифметических операций, требуемых для вычисления оценки вектора переданных символов с применением алгоритма МСКО (5), определяется выражением (11). Сложность вычисления оценки вектора переданных символов с применением разработанного итерационного алгоритма демодуляции A7 (31) также оценена ранее по формуле (35).

После процедуры демодуляции необходимо вычислить дисперсии ошибок демодуляции для демодуляции сигнала по критерию логарифмического отношения правдоподобия. Значения дисперсий ошибок демодуляции – это элементы главной диагонали корреляционной матрицы ошибок демодуляции. При использовании для демодуляции известного алгоритма МСКО (5) вычисление корреляционной

матрицы ошибок демодуляции производится по формуле (36). Для снижения сложности вычисления ошибок демодуляции был разработан новый алгоритм А8 (44), вычислительная сложность которого определяется формулой (53).

Таким образом, общее количество элементарных арифметических операций, необходимых для обработки сигнала на приёмной стороне, может быть оценено как сумма количества операций, требуемых для алгоритма демодуляции, и количества операций, необходимых для вычисления ошибок демодуляции.

Используя для демодуляции известный алгоритм МСКО (5) и известный алгоритм вычисления дисперсий ошибок демодуляции (36), общее количество элементарных арифметических операций, необходимых для обработки сигнала на приёмной стороне, можно рассчитать по формуле (47).

При использовании разработанного итерационного алгоритма демодуляции А7 (31) и разработанного алгоритма приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции А8 (44) общее количество элементарных арифметических операций для демодуляции сигнала на приёмной стороне можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_{PROP}(N) &= Z_{ITER}(N) + Z_{DISP}(N) = \\ &= 7N^2 + N + L[28N^2 + 54N - 12] + (L-1)[30N - 4] + 3N^2 + 10N - 1 = . \quad (54) \\ &= 10N^2 + 11N - 1 + L[28N^2 + 54N - 12] + (L-1)[30N - 4] \end{aligned}$$

Для оценки эффективности разработанного итерационного алгоритма демодуляции А7 (31) и разработанного алгоритма приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции А8 (44) проведем сравнительный анализ количества элементарных арифметических операций, требуемых для обработки сигнала на приёмной стороне в системах связи massive MIMO с помехоустойчивым кодированием, и помехоустойчивости известных и разработанных алгоритмов демодуляции на основе коэффициента ошибок по кадрам (Frame Error Rate, FER) и коэффициента битовых ошибок BER.

Произведем анализ помехоустойчивости системы связи massive MIMO с помехоустойчивым кодированием на основе коэффициента ошибок по кадрам для

антенной конфигурации 64×64 при модуляции 4-ФМ методом моделирования [40],[41], согласно условиям, приведенным в таблице 14.

Таблица 14. Параметры модели для сравнения помехоустойчивости известных алгоритмов (5) и (36) и разработанных алгоритмов А7 (31) и А8 (44) в системе massive MIMO 64×64 при модуляции 4-ФМ

Параметр	Значение
Канал связи	MIMO
Замирания в канале	Рэлеевские некоррелированные
Количество передающих антенн	64
Количество приёмных антенн	64
Архитектура	V-BLAST
Метод модуляции	4-ФМ
Демодулятор	МСКО (5) и алгоритма вычисления дисперсий ошибок демодуляции (36), итерационный алгоритм А7 (31) и алгоритм приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции А8 (44)
Помехоустойчивое кодирование	Сверточное кодирование (скорость $\frac{1}{2}$)
Количество итераций для алгоритма А7 (31)	$L = 4$

График зависимости коэффициента ошибок по кадрам от ОСШ в системе massive MIMO для антенной конфигурации 64×64 при модуляции 4-ФМ приведен на рисунке 14.

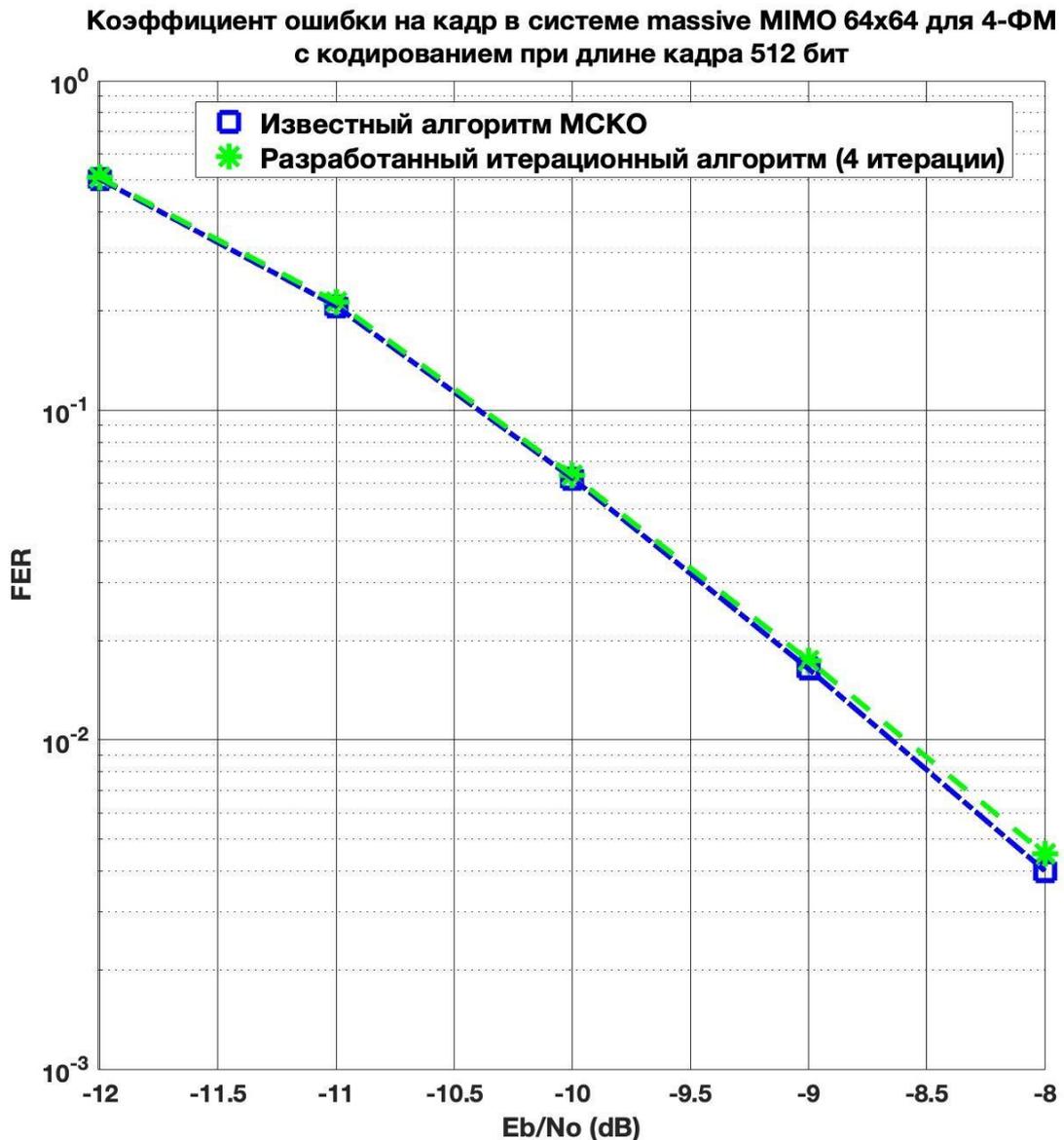


Рисунок 14. Коэффициент ошибки на кадр в системе massive MIMO 64×64 при модуляции 4-ФМ и помехоустойчивым кодированием

По графику, приведенному на рисунке 14, видно, что потери при использовании разработанных алгоритмов А7 (31) и А8 (44) в системе massive MIMO 64×64 с помехоустойчивым кодированием при модуляции 4-ФМ составляют 0,05 дБ по уровню $FER = 10^{-2}$ по сравнению с использованием известных алгоритмов (5) и (36).

Результаты моделирования помехоустойчивости на основе BER при условиях, приведенных в таблице 14, представлены на рисунке 15.

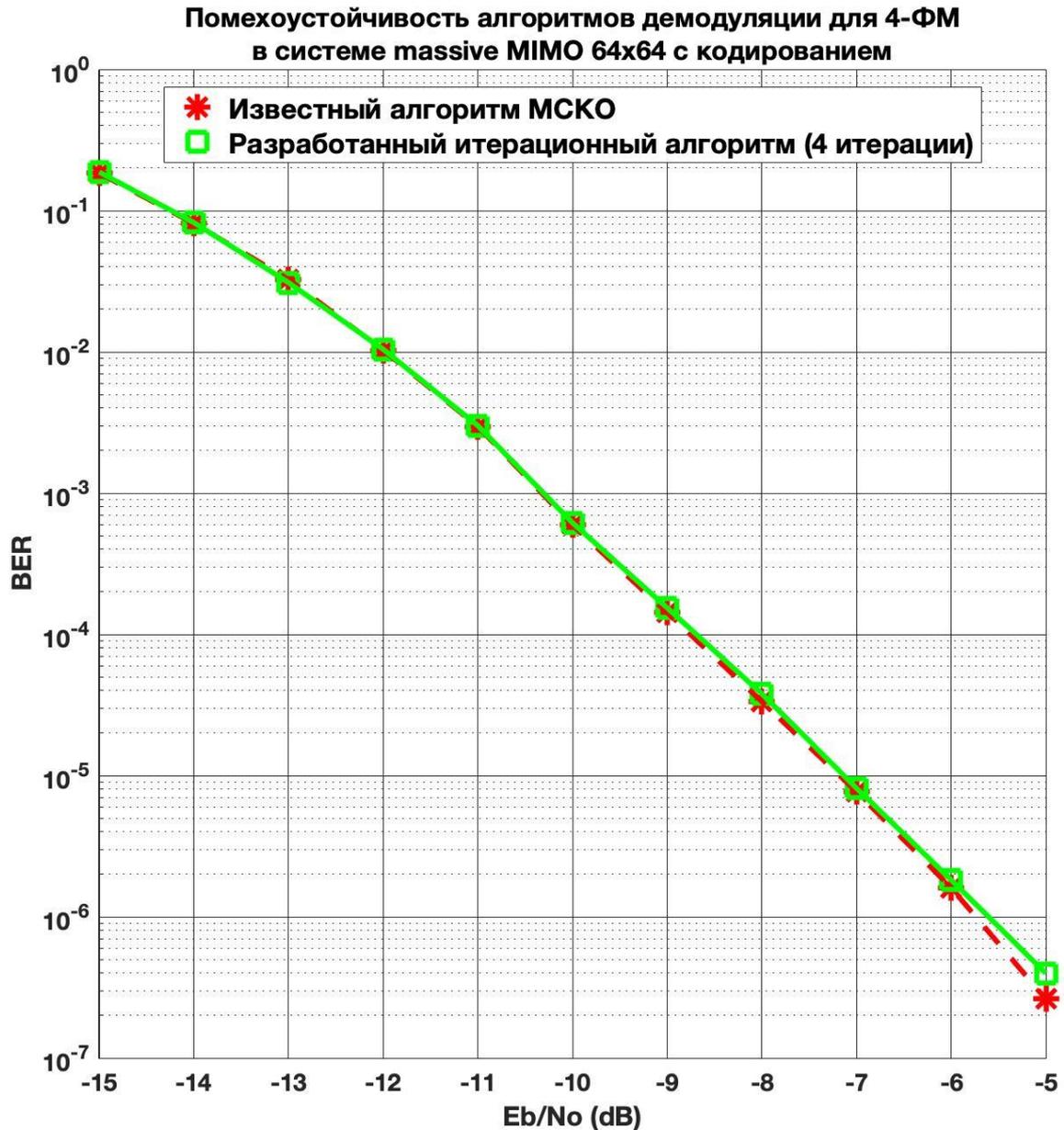


Рисунок 15. Сравнение помехоустойчивости в системе massive MIMO 64×64 при модуляции 4-ФМ и помехоустойчивым кодированием

При совместном использовании разработанного итерационного алгоритма демодуляции А7 (31) и разработанного алгоритма приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции А8 (44) в системе massive MIMO 64×64 при модуляции 4-ФМ имеются потери 0,05 дБ по уровню $BER = 10^{-5}$ по сравнению с совместным использованием известного алгоритма МСКО (5) и известного

алгоритма вычисления дисперсий ошибок демодуляции (36), что показано на рисунке 15.

Анализ помехоустойчивости системы связи massive MIMO с помехоустойчивым кодированием для антенной конфигурации 128×128 при модуляции 4-ФМ произведен методом моделирования [40],[41], согласно условиям, приведенным в таблице 15.

Таблица 15. Параметры модели для сравнения помехоустойчивости известных алгоритмов (5) и (36) и разработанных алгоритмов А7 (31) и А8 (44) в системе massive MIMO 128×128 при модуляции 4-ФМ

Параметр	Значение
Канал связи	MIMO
Замирания в канале	Рэлеевские некоррелированные
Количество передающих антенн	128
Количество приёмных антенн	128
Архитектура	V-BLAST
Метод модуляции	4-ФМ
Демодулятор	МСКО (5) и алгоритма вычисления дисперсий ошибок демодуляции (36), итерационный алгоритм А7 (31) и алгоритм приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции А8 (44)
Помехоустойчивое кодирование	Сверточное кодирование (скорость $\frac{1}{2}$)
Количество итераций для алгоритма А7 (31)	$L = 8$

В результате моделирования получен график зависимости коэффициента ошибки на кадр от ОСШ для известных и разработанных алгоритмов демодуляции, что показано на рисунке 16.

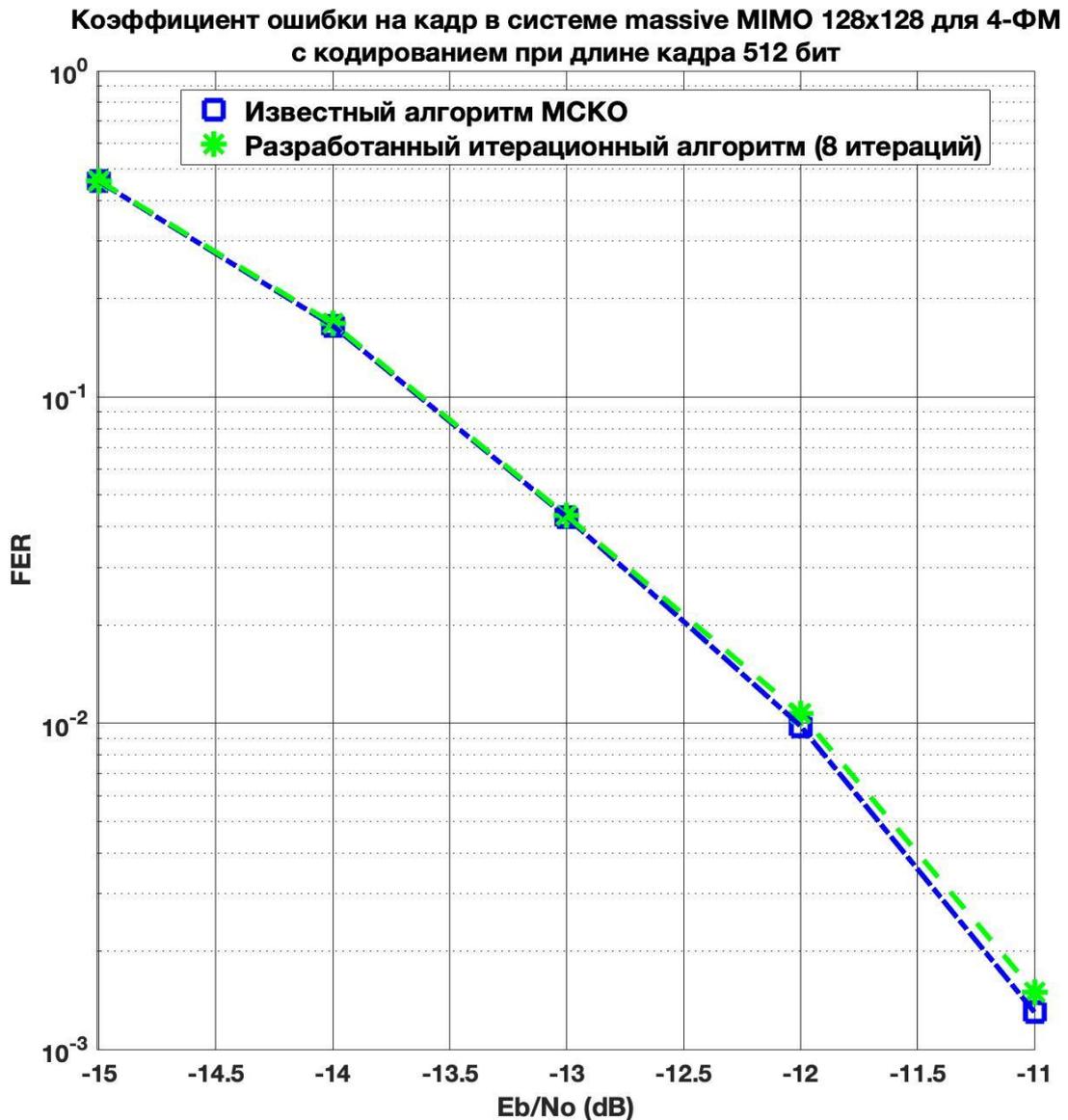


Рисунок 16. Коэффициент ошибки на кадр в системе massive MIMO 128×128 при модуляции 4-ФМ и помехоустойчивым кодированием

Как видно по рисунку 16, потери при использовании разработанных алгоритмов А7 (31) и А8 (44) в системе massive MIMO 128×128 с помехоустойчивым кодированием при модуляции 4-ФМ составляют 0,05 дБ по

уровню $FER = 10^{-2}$ по сравнению с использованием известных алгоритмов (5) и (36).

Результаты моделирования помехоустойчивости на основе BER при условиях, приведенных в таблице 15, представлены на рисунке 17.

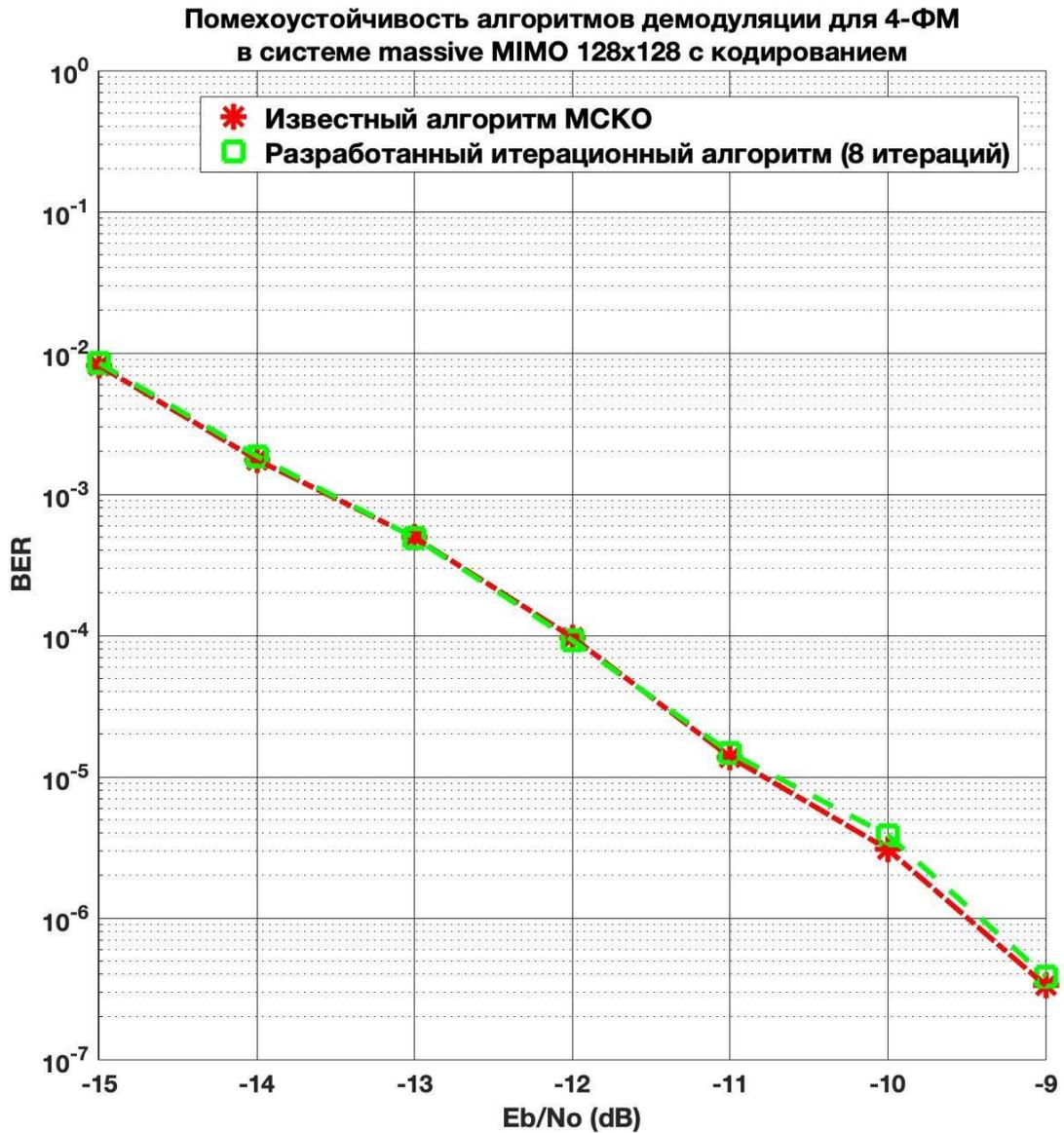


Рисунок 17. Сравнение помехоустойчивости в системе massive MIMO 128×128 при модуляции 4-ФМ и помехоустойчивым кодированием

Как видно из рисунка 17, при совместном использовании разработанного итерационного алгоритма демодуляции А7 (31) и разработанного алгоритма

приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции А8 (44) при модуляции 4-ФМ имеются потери 0,1 дБ по уровню $BER=10^{-5}$ по сравнению с совместным использованием известного алгоритма МСКО (5) и известного алгоритма вычисления дисперсий ошибок демодуляции (36).

Произведем оценку вычислительной сложности демодуляции сигнала при совместном использовании алгоритма демодуляции А7 (31) с количеством итераций $L = \frac{N}{16}$ и алгоритма приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции А8 (44) в системе massive MIMO с антенной конфигурацией 128×128 . Результаты приведены в таблице 16.

Таблица 16. Вычислительная сложность различных демодуляторов в системах связи с помехоустойчивым кодированием при $L = \frac{N}{16}$

	Количество операций для вычисления оценки вектора переданных символов		Отношение вычислительной сложности разработанных алгоритмов к вычислительной сложности известных алгоритмов
	Известный алгоритм МСКО (5) и (36), $Z_{KNOWN}(N)$	Разработанный алгоритм А7 (31) и разработанный алгоритм А8 (44), $Z_{PROP}(N)$	
Демодулятор			
Антенная конфигурация $N \times N$	Действ. умножений/делений и сложений/вычитаний	Действ. умножений/делений и сложений/вычитаний	
64×64	2 141 888	433 279	0,2
128×128	16 956 800	3 304 703	0,2

Таким образом, совместное использование алгоритма демодуляции А7 (31) и алгоритма приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции А8 (44) позволяет снизить сложность демодуляции сигнала в системе massive MIMO с помехоустойчивым кодированием при модуляции 4-ФМ в 5 раз по сравнению с совместным использованием известного алгоритма МСКО (5) и известного алгоритма вычисления дисперсий ошибок демодуляции (36).

Теперь произведем анализ помехоустойчивости системы связи massive MIMO с помехоустойчивым кодированием для антенной конфигурации 64×64 при модуляции 16-КАМ. Условия моделирования приведены в таблице 17.

Таблица 17. Параметры модели для сравнения помехоустойчивости демодуляторов в системе massive MIMO 64×64 при модуляции 16-КАМ

Параметр	Значение
Канал связи	MIMO
Замирания в канале	Рэлеевские некоррелированные
Количество передающих антенн	64
Количество приёмных антенн	64
Архитектура	V-BLAST
Метод модуляции	16-КАМ
Демодулятор	МСКО (5) и алгоритма вычисления дисперсий ошибок демодуляции (36), итерационный алгоритм А7 (31) и алгоритм приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции А8 (44)
Помехоустойчивое кодирование	Сверточное кодирование (скорость $\frac{1}{2}$)
Количество итераций для алгоритма А7 (31)	$L = 8$

Результаты моделирования помехоустойчивости на основе FER при условиях, приведенных в таблице 17, представлены на рисунке 18.

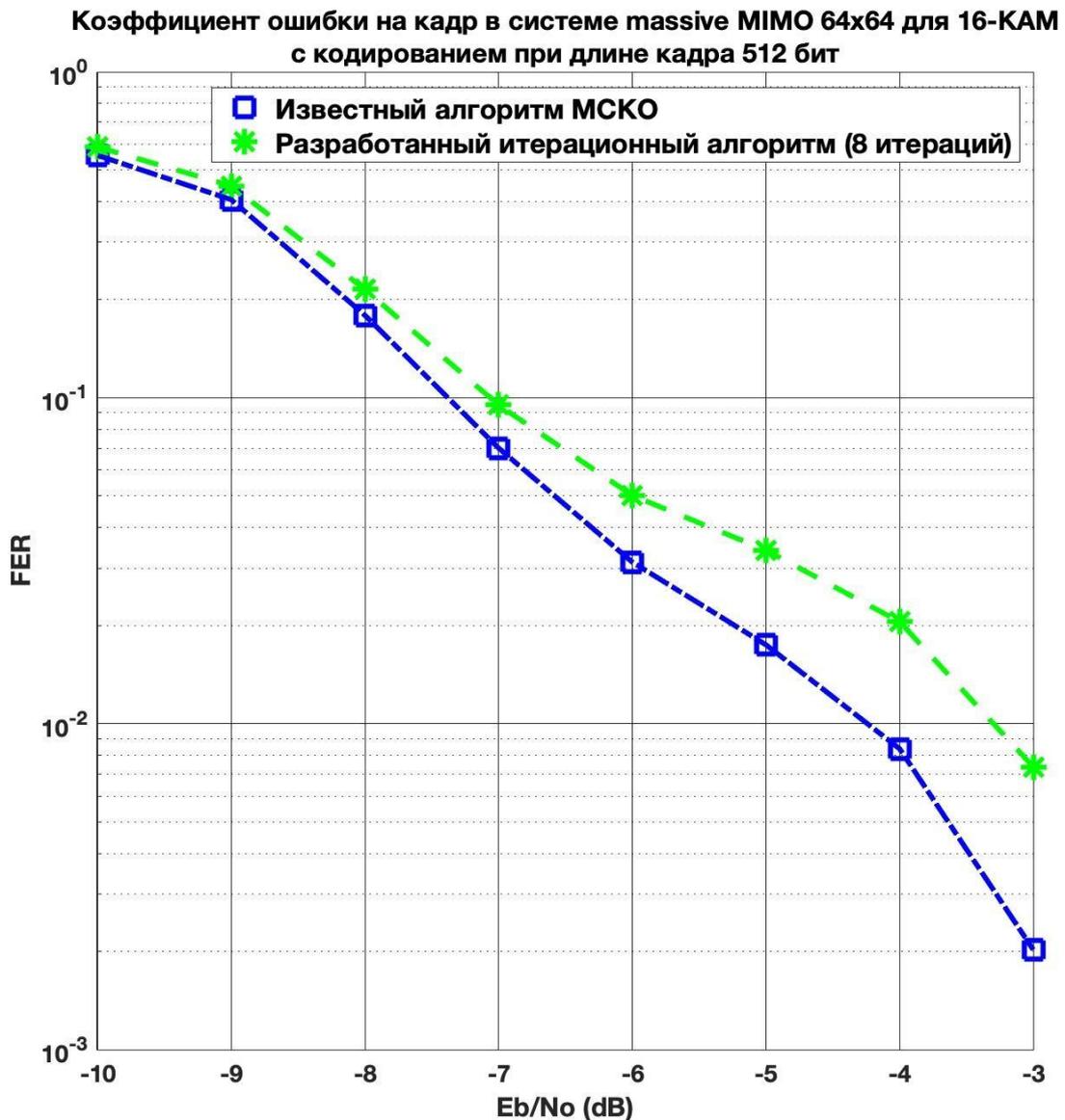


Рисунок 18. Коэффициент ошибки на кадр в системе massive MIMO 64×64 с помехоустойчивым кодированием при модуляции 16-КАМ

На рисунке 18 видно, что потери в помехоустойчивости при модуляции 16-КАМ в случае совместного использования алгоритма демодуляции А7 (31) и алгоритма приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции А8 (44) составляют 1 дБ по уровню $FER=10^{-2}$ по сравнению со случаем совместного

использования известного алгоритма МСКО (5) и известного алгоритма вычисления дисперсий ошибок демодуляции (36).

Сравним вычислительную сложность демодуляции сигнала при совместном использовании алгоритма демодуляции А7 (31) с количеством итераций $L = 8$ и алгоритма приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции А8 (44) с известным алгоритмом МСКО (5) и известным алгоритмом вычисления дисперсий ошибок демодуляции (36) в системе massive MIMO с антенной конфигурацией 64×64 . Результаты приведены в таблице 18.

Таблица 18. Вычислительная сложность известных и разработанных алгоритмов демодуляции в системах связи с помехоустойчивым кодированием при $L = 8$

	Количество операций для вычисления оценки вектора переданных символов		Отношение вычислительной сложности разработанных алгоритмов к вычислительной сложности известных алгоритмов
Демодулятор	Известный алгоритм МСКО (5) и (36), $Z_{KNOWN}(N)$	Разработанный алгоритм А7 (31) и разработанный алгоритм А8 (44), $Z_{PROP}(N)$	
Антенная конфигурация $N \times N$	Действ. умножений/делений и сложений/вычитаний	Действ. умножений/делений и сложений/вычитаний	
64×64	2 141 888	829 055	0,39

Таким образом, совместное использование разработанных алгоритмов А7 (31) и А8 (44) позволяет снизить сложность демодуляции сигнала в системе massive MIMO с антенной конфигурацией 64×64 с помехоустойчивым кодированием при модуляции 16-QAM в 2,5 раза по сравнению с совместным использованием

известного алгоритма МСКО (5) и известного алгоритма вычисления дисперсий ошибок демодуляции (36).

Далее произведем анализ помехоустойчивости системы связи massive MIMO с помехоустойчивым кодированием для антенной конфигурации 128×128 при модуляции 16-QAM, согласно условиям, приведенным в таблице 19.

Таблица 19. Параметры модели для сравнения помехоустойчивости демодуляторов в системе massive MIMO 128×128 при модуляции 16-QAM

Параметр	Значение
Канал связи	MIMO
Замирания в канале	Рэлеевские некоррелированные
Количество передающих антенн	128
Количество приёмных антенн	128
Архитектура	V-BLAST
Метод модуляции	16-QAM
Демодулятор	МСКО (5) и алгоритма вычисления дисперсий ошибок демодуляции (36), итерационный алгоритм A7 (31) и алгоритм приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции A8 (44)
Помехоустойчивое кодирование	Сверточное кодирование (скорость $\frac{1}{2}$)
Количество итераций для алгоритма A7 (31)	$L = 12$

Графики зависимости коэффициента ошибки на кадр для системы massive MIMO с антенной конфигурацией 128×128 при модуляции 16-QAM и помехоустойчивым кодированием приведены на рисунке 19.

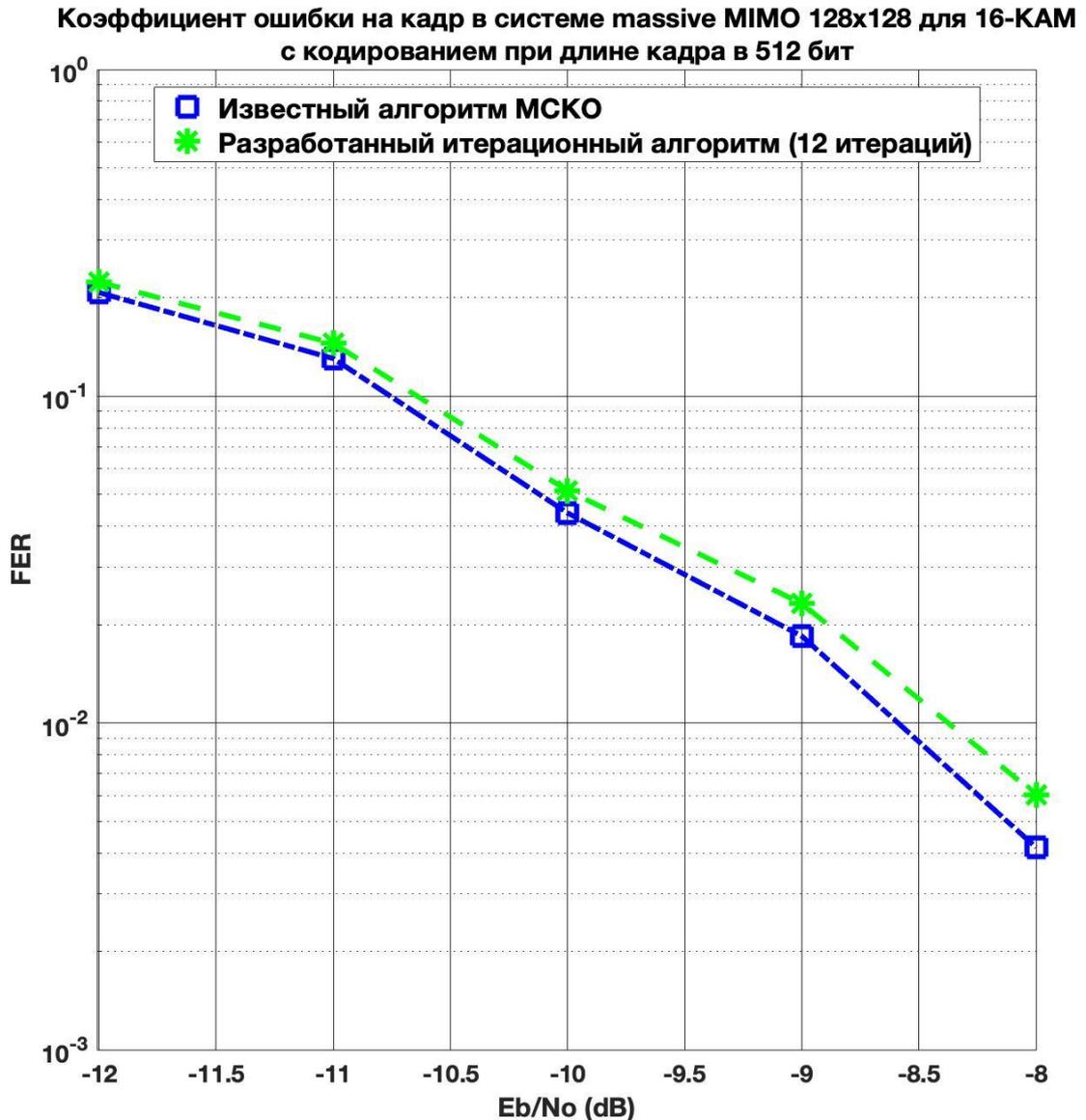


Рисунок 19. Коэффициент ошибки на кадр в системе massive MIMO 128×128 с помехоустойчивым кодированием при модуляции 16-QAM

По рисунку 19 видно, что совместное использование алгоритма демодуляции A7 (31) и алгоритма приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции A8 (44) в системе massive MIMO с помехоустойчивым кодированием при модуляции 16-QAM дает потери порядка 0,2 дБ по уровню $FER=10^{-2}$ по сравнению с совместным использованием известного алгоритма МСКО (5) и известного алгоритма вычисления дисперсий ошибок демодуляции (36).

Результаты моделирования помехоустойчивости при условиях, приведенных в таблице 19, представлены на рисунке 20.

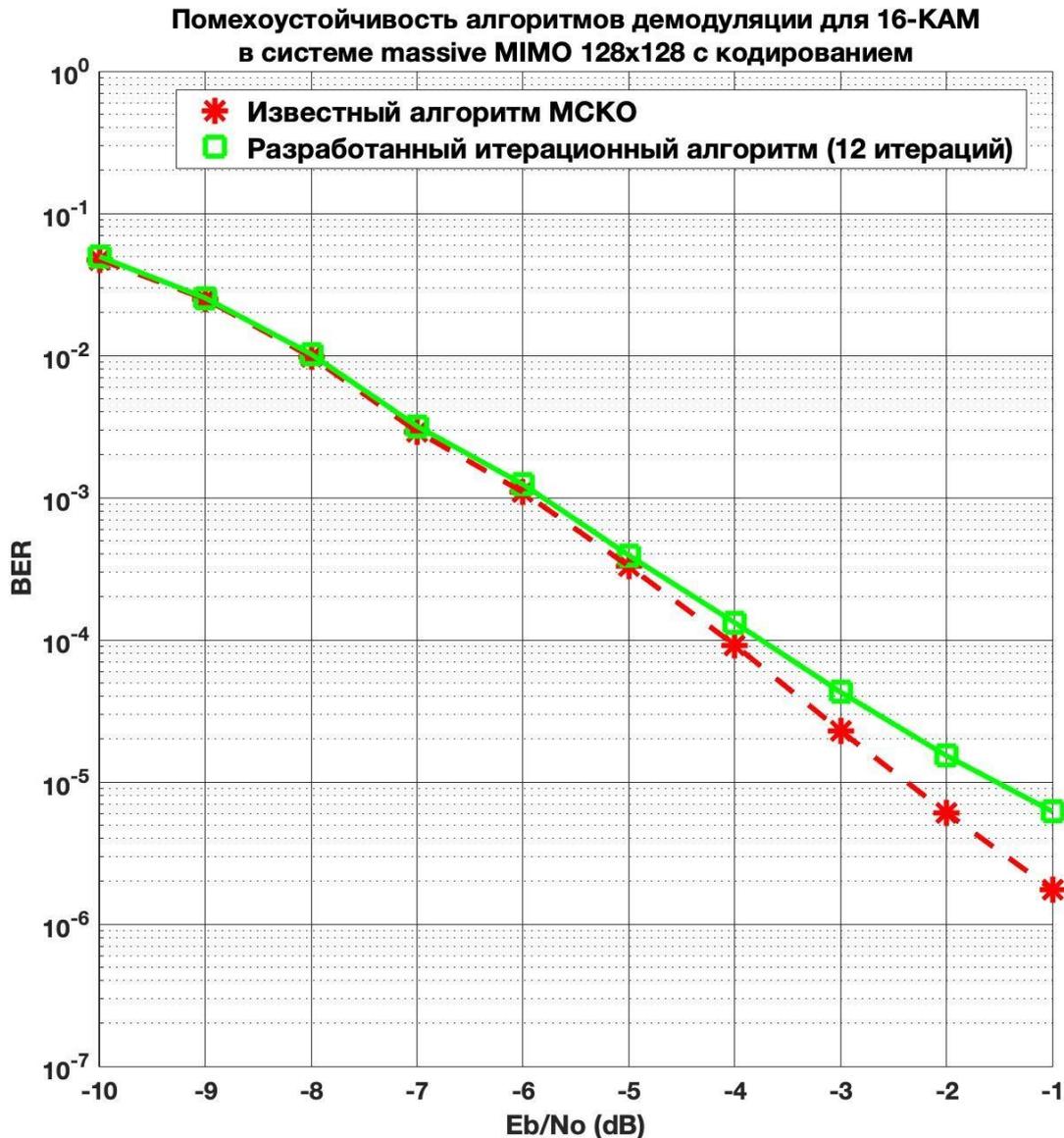


Рисунок 20. Сравнение помехоустойчивости в системе massive MIMO 128×128 с помехоустойчивым кодированием при модуляции 16-КАМ

На рисунке 20 видно, что потери в помехоустойчивости при модуляции 16-КАМ в случае совместного использования алгоритма демодуляции А7 (31) и алгоритма приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции А8 (44) составляют 1 дБ по уровню $BER = 10^{-5}$ по сравнению со случаем совместного

использования известного алгоритма МСКО (5) и известного алгоритма вычисления дисперсий ошибок демодуляции (36).

Далее произведем оценку вычислительной сложности демодуляции сигнала при совместном использовании алгоритма демодуляции А7 (31) с количеством итераций $L=12$ и алгоритма приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции А8 (44) в системе massive MIMO с антенной конфигурацией 128×128 . Результаты приведены в таблице 20.

Таблица 20. Вычислительная сложность известных и разработанных алгоритмов демодуляции в системах связи с помехоустойчивым кодированием при $L=12$

	Количество операций для вычисления оценки вектора переданных символов		Отношение вычислительной сложности разработанных алгоритмов к вычислительной сложности известных алгоритмов
Демодулятор	Известный алгоритм МСКО (5) и (36), $Z_{KNOWN}(N)$	Разработанный алгоритм А7 (31) и разработанный алгоритм А8 (44), $Z_{PROP}(N)$	
Антенная конфигурация $N \times N$	Действ. умножений/делений и сложений/вычитаний	Действ. умножений/делений и сложений/вычитаний	
128×128	16 956 800	4 882 687	0,29

В этом случае, при $L=12$, совместное использование алгоритма демодуляции А7 (31) и алгоритма приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции А8 (44) позволяет снизить сложность демодуляции сигнала в системе massive MIMO с помехоустойчивым кодированием при модуляции 16-QAM в 3,5

раза по сравнению с совместным использованием известного алгоритма МСКО (5) и известного алгоритма вычисления дисперсий ошибок демодуляции (36).

3.7 Выводы

1. Разработан новый итерационный алгоритм демодуляции А7 (31) с меньшей вычислительной сложностью при допустимых потерях в помехоустойчивости по сравнению с известным алгоритмом МСКО.

2. Разработан новый алгоритм приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции А8 (44), обладающий меньшей вычислительной сложностью по сравнению с известным алгоритмом вычисления корреляционной матрицы ошибок демодуляции МСКО.

3. Использование разработанных алгоритмов А7 (31) и А8 (44) в системе massive MIMO с антенными конфигурациями 64×64 , 128×128 и помехоустойчивым кодированием при модуляции 4-ФМ позволяет снизить сложность демодуляции сигнала в 5 раз по сравнению с использованием известного алгоритма МСКО (5) и (36), при этом потери в помехоустойчивости составляют 0,05 дБ по уровню коэффициента ошибки по кадрам $FER = 10^{-2}$.

4. Использование разработанных алгоритмов А7 (31) и А8 (44) в системе massive MIMO с антенной конфигурацией 64×64 и помехоустойчивым кодированием при модуляции 16-КАМ позволяет снизить сложность демодуляции сигнала в 2,5 раза по сравнению с использованием известных алгоритмов МСКО (5) и (36), при этом потери в помехоустойчивости составляют 1 дБ по уровню коэффициента ошибки по кадрам $FER = 10^{-2}$.

5. Использование разработанных алгоритмов А7 (31) и А8 (44) в системе massive MIMO с антенной конфигурацией 128×128 и помехоустойчивым кодированием при модуляции 16-КАМ позволяет снизить сложность демодуляции сигнала в 3,5 раза по сравнению с использованием известных алгоритмов МСКО

(5) и (36), при этом потери в помехоустойчивости составляют 0,2 дБ по уровню коэффициента ошибки по кадрам $FER = 10^{-2}$.

4. Оценка возможности практической реализации разработанных алгоритмов в системах беспроводной связи

В данной главе описаны варианты реализации алгоритмов обработки сигналов на приёмной стороне в системах связи с большим количеством передающих и приёмных антенн.

Дано описание основных характеристик сигнальных процессоров, применяемых для цифровой обработки сигнала. Произведен обзор основных процессоров, используемых для цифровой обработки сигналов, в современных системах связи.

Произведены расчеты требуемого на обработку сигнала времени для систем беспроводной связи massive MIMO при использовании различных цифровых сигнальных процессоров.

Произведена оценка возможности реализации итерационного алгоритма демодуляции A7 (31) и алгоритма приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции A8 (44) на цифровых сигнальных процессорах (ЦСП) и при использовании Field-Programmable Gate Array (FPGA).

4.1 Основные характеристики цифровых сигнальных процессоров

В настоящее время для цифровой обработки сигналов применяются специализированные сигнальные процессоры [94],[95]. ЦСП – микропроцессоры, предназначенные для обработки сигналов в реальном масштабе времени [96]. ЦСП может получать и передавать данные в реальном масштабе времени, не прерывая при этом выполнение внутренних математических операций [94]–[96].

На вход ЦСП поступают оцифрованные физические сигналы, а ЦСП осуществляет обработку этих сигналов, то есть, процессор выполняет

определенный набор математических операций над входными сигналами, согласно заданному алгоритму. Для таких процессоров характерна оптимизация времени выполнения ими простейших математических операций: умножения/деления и сложения/вычитания [94]–[96].

Отличительными особенностями среди характеристик ЦСП являются:

- высокоскоростная арифметика;
- передача и получение данных в реальном масштабе времени;
- архитектура памяти с множественным доступом.

ЦСП имеет несколько блоков: ядро процессора, память программ, память данных и внутренние периферийные устройства [94]–[96]. Между собой эти блоки связаны шинами: шиной адреса памяти данных, шиной адреса программ памяти, шиной данных памяти данных, шиной данных памяти программ [94]. Вычислительные устройства входят в состав ядра процессора. Ядро ЦСП – это базовый вычислительный элемент. Оно включает в свой состав вычислительные блоки, наборы регистров, программный автомат, память программ и данных. Память, входящая в состав ядра, называется локальной [94]–[96].

К основным характеристикам ЦСП относят [94]–[100], например:

1. **Тип арифметики:** обработка данных с фиксированной точкой или данные с плавающей точкой;
2. **Разрядность данных:** для данных с фиксированной точкой разрядность составляет 16 бит, а для данных с плавающей точкой она равна 32 бита;
3. **Быстродействие:** данная характеристика оценивается как совокупность нескольких характеристик:
 - 3.1. тактовая частота;
 - 3.2. количество выполняемых инструкций в единицу времени;
 - 3.3. количество выполняемых операций с плавающей точкой в единицу времени;
 - 3.4. количество выполняемых операций умножения с накоплением;
4. **Потребляемая мощность.**

Стоит отметить, что для обработки сигналов обычно используется формат данных с плавающей точкой. Это обусловлено стремлением и необходимостью повышения точности результатов при решении задач обработки сигналов.

Производительность ЦСП чаще всего определяется скоростью выполнения операций умножения и сложения над числами с фиксированной или плавающей точкой, или, другими словами, количество инструкций, выполняемых в единицу времени. Количественная характеристика быстродействия процессоров, отражающая количество операций, выполняемых процессором в секунду, обычно выражается в миллионах операций в секунду и обозначается как MIPS (Million Instructions Per Second). Для ЦСП, осуществляющих обработку чисел с плавающей точкой, также существует характеристика количества операций с плавающей точкой, выполняемых в секунду, MFLOPS (Million Floating-point Operations Per Second). Но сравнивать производительность различных ЦСП по показателю MIPS не целесообразно, так как для выполнения одной и той же инструкции в зависимости от типа процессора может выполняться неодинаковое количество операций. Современные цифровые сигнальные процессоры способны выполнять многие операции с плавающей точкой за один такт [96],[98],[99],[101].

Процедура выбора и применения цифровых сигнальных процессоров для конкретной задачи обычно связана с оценкой основных характеристик ЦСП [97]. Во многих случаях при подборе ЦСП роль играет не только производительность процессора, но и такие характеристики, как используемый объем памяти и уровень энергопотребления. Стоит отметить, что чаще всего все эти характеристики зависят друг от друга: например, для повышения производительности нужна быстродействующая память, что, в свою очередь, обуславливает увеличение энергопотребления. Для мобильных устройств выбор ЦСП часто ограничивается как раз по показателю энергопотребления.

Таким образом, снижение количества выполняемых операций в единицу времени в рамках одной и той же процедуры может снизить энергопотребление ЦСП, что, например, позволит увеличить время работы мобильного устройства от

батареи. Кроме того, срок службы элементов питания также связан с энергопотреблением.

Далее рассмотрим ЦСП, используемые для реализации алгоритмов цифровой обработки сигналов в системах беспроводной связи.

4.2 Исследование существующих сигнальных процессоров

В современном мире рынок ЦСП представлен следующими производителями [102],[103], например:

- Texas Instruments;
- Freescale Semiconductor;
- Analog Devices;
- Philips Semiconductors;
- Agere Systems;
- Toshiba;
- DSP Group;
- NEC Electronics;
- Fujitsu;
- Intersil.

При разработке устройств цифровой обработки сигналов существует ряд особенностей выбора необходимого ЦСП. Например, одной из таких особенностей является наличие собственных кодов команд, присущих конкретному производителю. Кроме того, рассматриваются основные характеристики ЦСП: его производительность, энергопотребление, формат входных данных. Часто ЦСП может быть не применим для решения какой-либо задачи именно из-за своих характеристик. Например, производительность процессора не позволяет осуществлять требуемое количество операций за отведенный для этого интервал

времени. Далее рассмотрим некоторые ЦСП, используемые в системах беспроводной связи [104],[105].

Семейство ЦСП TMS320C67x (например, TMS320C6713B) обрабатывает данные с плавающей запятой в составе платформы TMS320C6000 производства Texas Instruments [106].

На тактовой частоте в 225 МГц C6713B обладает следующими показателями производительности [106]:

- 1350 млн. операций с плавающей точкой в секунду (MFLOPS);
- 1800 млн. инструкций в секунду (MIPS);
- 450 млн. умножений-накоплений в секунду (MMACS).

На тактовой частоте в 300 МГц C6713B обладает следующими показателями производительности [106]:

- 1800 млн. операций с плавающей точкой в секунду (MFLOPS);
- 2400 млн. инструкций в секунду (MIPS);
- 600 млн. умножений-накоплений в секунду (MMACS).

Развитие данной серии ЦСП привело к появлению высокопроизводительного процессора TMS320C6678 [107], обрабатывающего данные как с фиксированной, так и с плавающей точкой. Процессор TMS320C6678 работает на тактовой частоте 1,25 ГГц [107],[108]. В основе функционирования этого ЦСП лежит набор операционных ядер C66x CorePack, количество и состав которых зависят от конкретной модели процессора. ЦСП TMS320C6678 включает в свой состав 8 ядер ЦСП-типа [108]. Ядро процессора TMS320C66xx строится по архитектуре с очень длинным командным словом (Very Long Instruction Word, VLIW) [107].

Основной упор, с точки зрения вычислительных ресурсов процессора, в архитектуре C66x сделан на многоядерность и на расширение возможностей векторной арифметики [107],[108].

ЦСП TMS320C6678 обладает следующими показателями производительности [107]:

- количество ядер: 8;

- 22400 млн. операций с плавающей точкой в секунду (MFLOPS) на ядро (максимальная производительность 160 GFLOPS);

- 44800 млн. умножений-накоплений в секунду (MMACS) на ядро.

Далее рассмотрим ЦСП, производимые компанией Analog Devices.

ЦСП компании Analog Devices образуют два семейства: ADSP-21xx и ADSP-21xxx [109]. Семейство ADSP-21xx – набор однокристальных 16-разрядных микропроцессоров с общей базовой архитектурой, оптимизированной для выполнения алгоритмов цифровой обработки сигналов и других приложений, требующих высокопроизводительных вычислений с фиксированной точкой [109].

На тактовой частоте в 200 МГц ADSP-21266 обладает следующими показателями производительности [109]:

- 1200 млн. операций с плавающей точкой в секунду (MFLOPS).

Для разнообразных задач обработки сигналов, где требуется совместная работа нескольких процессоров для выполнения функций с большим объемом вычислений в режиме реального времени главным образом предусмотрен ЦСП ADSP-TS101S [109].

ЦСП ADSP-TS101S семейства TigerSHARC основан на статической суперскалярной архитектуре, которая совмещает в себе функции архитектур компьютера с уменьшенным набором инструкций (Reduced Instruction Set Computer, RISC), VLIW и стандартных ЦСП [110].

На тактовой частоте в 300 МГц ADSP-TS101S [110] обладает следующими показателями производительности:

- 1800 млн. операций с плавающей точкой в секунду (MFLOPS).

Параметры рассмотренных ЦСП сведены в таблице 21.

Таблица 21. Основные параметры цифровых сигнальных процессоров

Параметр	Характеристика				
	Texas Instruments			Analog Devices	
Производитель				ADSP-21266	ADSP-TS101S
Модель	TMS320C6713B		TMS320C6678		
Тактовая частота, МГц	225	300	1 250		300
MFLOPS, P_{MFL}	1 350	1 800	160 000	1 200	1 800
ММАС, $P_{ММАС}$	450	600	44 800		
MIPS, P_{MIPS}	1 800	2 400			

Далее оценим возможность реализации алгоритмов демодуляции в системе massive MIMO на рассмотренных в данном параграфе ЦСП.

4.3 Оценка возможности применения ЦСП для реализации алгоритмов демодуляции

Рассмотрим возможность применения описанных в параграфе 4.2 ЦСП для реализации итерационного алгоритма демодуляции А7 (31) и алгоритма приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции А8 (44) в системах беспроводной связи massive MIMO. Также рассмотрим возможность реализации возможности применения ЦСП для реализации известного алгоритма МСКО (5) и известного алгоритма вычисления дисперсий ошибок демодуляции (36).

Сравним периоды времени, за которое будет произведена демодуляция сигнала на приёмной стороне при использовании различных цифровых сигнальных процессоров для случая совместного использования разработанных алгоритмов А7 (31) и А8 (44) и для случая совместного использования известных алгоритмов (5) и (36). Стоит отметить, что вычислительная сложность разработанного алгоритма А7

(31) зависит от количества итераций L , которое, с свою очередь, зависит от антенной конфигурации и метода модуляции в системе.

Количество требуемых элементарных арифметических операций над действительными числами для демодуляции сигнала в системе massive MIMO с помехоустойчивым кодированием при модуляции 4-ФМ приведено в таблице 16. Требуемое время для выполнения демодуляции сигнала в случае совместного использования разработанных алгоритмов А7 (31) и А8 (44) в системе massive MIMO с антенной конфигурацией $N \times N$ будем рассчитывать по формуле:

$$\Delta_{PROP}^{N \times N} = \frac{Z_{PROP}(N)}{P_{MFL}}, \quad (55)$$

где P_{MFL} – производительность цифрового сигнального процессора в MFLOPS из таблицы 21, $Z_{PROP}(N)$ – количество операций, рассчитанное по формуле (54).

Как было показано в параграфе 3.6, при совместном использовании итерационного алгоритма демодуляции А7 (31) и алгоритма приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции А8 (44) для демодуляции количество требуемых элементарных арифметических операций при модуляции 4-ФМ снижается в 5 раз по сравнению с совместным использованием известного алгоритма МСКО (5) и известного алгоритма вычисления дисперсий ошибок демодуляции (36).

Используя формулу (55), данные из таблицы 16 и характеристики ЦСП из таблицы 21 рассчитаем требуемое время на демодуляцию сигнала на приёмной стороне в системе беспроводной связи massive MIMO с антенными конфигурациями 64×64 и 128×128 при модуляции 4-ФМ. Результаты расчетов приведены в таблице 22.

Таблица 22. Время демодуляции сигнала на приёмной стороне с использованием разработанных алгоритмов А7 (31) и А8 (44) различными ЦСП

$$\text{при } L = \frac{N}{16}$$

Антенная конфигурация, $N \times N$	Модель ЦСП			
	TMS320C6713B	ADSP-21266	TMS320C6678	ADSP-TS101S
64×64	240,7 мкс	361 мкс	2,7 мкс	240,7 мкс
128×128	1 836 мкс	2 754 мкс	20,7 мкс	1 836 мкс

Затем произведем расчет требуемого времени на демодуляцию сигнала при совместном использовании итерационного алгоритма демодуляции А7 (31) и алгоритма приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции А8 (44) в системе беспроводной связи massive MIMO с антенной конфигурацией 64×64 при модуляции 16-QAM. Требуемое для демодуляции время рассчитываем по формуле (55). Результаты расчетов приведены в таблице 23.

Таблица 23. Время демодуляции сигнала на приёмной стороне с использованием разработанных алгоритмов А7 (31) и А8 (44) различными ЦСП

$$\text{при } L = 8$$

Антенная конфигурация, $N \times N$	Модель ЦСП			
	TMS320C6713B	ADSP-21266	TMS320C6678	ADSP-TS101S
64×64	460,6 мкс	690,9 мкс	5,2 мкс	460,6 мкс

Теперь рассчитаем требуемое время на демодуляцию сигнала при совместном использовании итерационного алгоритма демодуляции А7 (31) и алгоритма приближенного вычисления дисперсий ошибок демодуляции А8 (44) в системе беспроводной связи massive MIMO с антенной конфигурацией 128×128

при модуляции 16-QAM. Результаты расчетов по формуле (55) с использованием данных из таблицы 20 и характеристик ЦСП из таблицы 21 приведены в таблице 24.

Таблица 24. Время демодуляции сигнала на приёмной стороне с использованием разработанных алгоритмов А7 (31) и А8 (44) различными ЦСП при $L=12$

Антенная конфигурация, $N \times N$	Модель ЦСП			
	TMS320C6713B	ADSP-21266	TMS320C6678	ADSP-TS101S
128×128	2 712,6 мкс	4 068,9 мкс	30,5 мкс	2 712,6 мкс

Теперь произведем расчет требуемого времени на демодуляцию сигнала в системе massive MIMO с помехоустойчивым кодированием в случае совместного использования известных алгоритмов (5) и (36).

Количество требуемых элементарных арифметических операций над действительными числами в случае совместного использования для демодуляции сигнала в системе massive MIMO с помехоустойчивым кодированием использования известных алгоритмов (5) и (36) также приведено в таблице 16. Для расчета требуемого времени на демодуляцию сигнала в случае совместного использования известных алгоритмов (5) и (36) в системе massive MIMO с антенной конфигурацией $N \times N$ запишем следующую формулу:

$$\Delta_{KN}^{N \times N} = \frac{Z_{KNOWN}(N)}{P_{MFL}}, \quad (56)$$

где P_{MFL} – производительность цифрового сигнального процессора в MFLOPS из таблицы 21, $Z_{KNOWN}(N)$ – количество операций, рассчитанное по формуле (47). По формуле (56), опираясь на данные из таблицы 16 и таблицы 21, рассчитаем требуемое время на демодуляцию сигнала на приёмной стороне в системе

беспроводной связи massive MIMO с антенными конфигурациями 64×64 и 128×128 . Результаты расчетов приведены в таблице 25.

Таблица 25. Время демодуляции сигнала на приёмной стороне с использованием известных алгоритмов (5) и (36) различными ЦСП

Антенная конфигурация, $N \times N$	Модель ЦСП			
	TMS320C6713B	ADSP-21266	TMS320C6678	ADSP-TS101S
64×64	1 189,9 мкс	1 784,9 мкс	13,4 мкс	1 189,9 мкс
128×128	9 420,4 мкс	14 130, 7 мкс	105,6 мкс	9 420,4 мкс

Теперь произведем расчет длительности информационного символа для систем беспроводной связи massive MIMO с помехоустойчивым кодированием. Для расчёта потребуется вычислить скорость C_u передачи информации в канале связи, то есть, количество передаваемых бит информации в единицу времени без учета избыточных бит, вносимых в передаваемую битовую последовательность в результате использования помехоустойчивого кодирования. Для этого необходимо максимальную скорость передачи информации C_{\max} умножить на скорость кодирования r :

$$C_u = rC_{\max}. \quad (57)$$

Следующий шаг – вычисление скорости передачи информации каждой антенной C_{ant} производится по формуле:

$$C_{ant} = \frac{C_u}{N}. \quad (58)$$

Затем необходимо вычислить символьную скорость передачи B_{sym} , которая зависит от порядка модуляции k , для каждой антенны по формуле:

$$B_{sym} = \frac{C_{ant}}{\log_2(k)}. \quad (59)$$

Длительность одного информационного символа τ – величина, обратная символьной скорости, рассчитывается по следующей формуле:

$$\tau = \frac{1}{B_{sym}}. \quad (60)$$

Рассмотрим систему беспроводной связи, максимальная скорость передачи информации C_{max1} в которой равна 1 Гбит/с, что соответствует требованиям технологии 5G [111]. В рассматриваемой системе беспроводной связи используется помехоустойчивое свёрточное кодирование со скоростью $r = \frac{1}{2}$, что соответствует регламентирующим документам существующих стандартов беспроводной связи [10],[52],[53]. Используя формулы (57)–(60), рассчитаем длительность информационного символа в такой системе беспроводной связи massive MIMO для антенных конфигураций 64×64 и 128×128 . Результаты расчетов приведены в таблице 26.

Таблица 26. Параметры рассматриваемой системы беспроводной связи с максимальной скоростью передачи информации 1 Гбит/с

Антенная конфигурация	64×64	128×128	64×64	128×128
Схема модуляции	4-ФМ	4-ФМ	16-КАМ	16-КАМ
Количество бит в символе	2	2	4	4
Максимальная скорость передачи информации C_{\max}, Мбит/с	1024	1024	1024	1024
Скорость кодирования r	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Скорость передачи информации C_u, Мбит/с	512	512	512	512
Скорость передачи информации одной антенной C_{ant}	8	4	8	4
Символьная скорость B_{sym}, киლოსимволов в секунду	4000	2000	2000	1000
Длительность информационного символа τ, мкс	0,3	0,5	0,5	1

Таким образом, с учетом длительности информационного символа для различных антенных конфигураций и методов модуляции можно сделать вывод, что реализация как известных алгоритмов (5) и (36), так и разработанных алгоритмов А7 (31) и А8 (44) на рассмотренных ЦСП в системах беспроводной связи massive MIMO с максимальной скоростью передачи информации 1 Гбит/с не представляется возможной ввиду высокой вычислительной сложности, то есть, промежутка времени равного длительности одного информационного символа недостаточно для выполнения всех элементарных арифметических операций, предусмотренных алгоритмами (5) и (36).

Теперь рассчитаем параметры системы беспроводной передачи данных с максимальной скоростью передачи информации 80 Мбит/с. Несмотря на снижение скорости передачи рассматриваемой системы с 1 Гбит/с до 80 Мбит/с использование технологии ММО позволяет достигать высоких показателей спектральной эффективности системы связи [1],[99]. Используя формулы (57)–(60), рассчитаем длительность информационного символа в такой системе беспроводной связи massive ММО для антенных конфигураций 64×64 и 128×128 . Результаты расчетов приведены в таблице 27.

Таблица 27. Параметры рассматриваемой системы беспроводной связи с максимальной скоростью передачи информации 80 Мбит/с

Антенная конфигурация	64×64	128×128	64×64	128×128
Схема модуляции	4-ФМ	4-ФМ	16-КAM	16-КAM
Количество бит в символе	2	2	4	4
Максимальная скорость передачи информации C_{\max}, Мбит/с	80	80	80	80
Скорость кодирования r	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Скорость передачи информации C_u, Мбит/с	40	40	40	40
Скорость передачи информации одной антенной C_{ant}	0,6	0,3	0,6	0,3
Символьная скорость V_{sym}, киросимволов в секунду	300	150	150	75
Длительность информационного символа τ, мкс	3,3	6,7	6,7	13,3

Таким образом, как видно из таблицы 27, при использовании известных алгоритмов (5) и (36) выполнение демодуляции на рассмотренных ЦСП за период времени, равный длительности одного информационного символа невозможно даже в системе massive MIMO с максимальной скоростью передачи информации в 80 Мбит/с. При этом использование разработанных алгоритмов А7 (31) и А8 (44) позволяет осуществить демодуляцию сигнала за промежуток времени, равный длительности одного информационного символа, на рассмотренных ЦСП в системе massive MIMO с антенной конфигурацией 64×64 как при модуляции 4-ФМ, так и при модуляции 16-КАМ.

4.4 Возможность реализации разработанных алгоритмов с использованием программируемых логических интегральных схем

Программируемая логическая интегральная схема представляет собой электронный компонент, используемый для создания цифровой интегральной схемы [98]. Логика работы таких схем определяется путем программирования после производства в зависимости от требований к функционалу конечного устройства. Для программирования используется программатор и среда разработки [99],[113].

Одним из видов программируемых логических интегральных схем являются FPGA [99],[113]. Они представляют из себя полупроводниковые устройства, в основе которых находятся конфигурируемые матричные логические ячейки. Жестко зафиксированные соединения в FPGA отсутствуют. Это означает, что управлять соединениями можно программно, используя транзисторы в качестве ключей.

Основные производители FPGA на мировом рынке являются [114],[115]:

- Actel;
- Altera;

- Lattice;
- Xilinx.

Рассмотрим технические характеристики устройств FPGA производителя Xilinx, ориентированных на цифровую обработку сигналов, приведенные в таблице 28 [116]–[121].

Таблица 28. Основные характеристики FPGA Xilinx

Параметр	Семейство			
	Spartan-7	Artix-7	Kintex-7	Virtex-7
Логических ячеек ρ , тыс.	102	215	478	1955
Максимальная тактовая частота F_{CL} , МГц	550	628	741	741
Блочная память, Мбайт	4,2	13	34	68
Секций ЦСП	160	740	1920	3600
Пиковая производительность цифровой обработки сигналов для фильтров с симметричными коэффициентами, ГМАС/с	176	929	2845	5335

С учетом данных из таблицы 28, можно рассчитать время выполнения операций, не превышающих количество логических ячеек, с использованием FPGA Xilinx. Необходимый для выполнения FPGA операций интервал времени можно вычислить по формуле:

$$\delta = \frac{1}{F_{CL}}, \quad (61)$$

где F_{CL} тактовая частота FPGA. Например, при использовании FPGA модели Virtex-7 для выполнения 1 955 тысяч операций потребуется 1 такт, временной интервал которого определяется по формуле (61) следующим образом:

$$\delta_{\text{Virtex-7}} = \frac{1}{741 \cdot 10^6} = 0,0013 \cdot 10^{-6}, \quad (62)$$

где F_{cl} в зависимости от выбранной FPGA выбирается из таблицы 28.

Рассмотрим возможность реализации разработанных алгоритмов А7 (31) и А8 (44) с использованием FPGA Xilinx.

Для расчета требуемого количества тактов работы FPGA модели Virtex-7 будем использовать следующую формулу:

$$d^{N \times N} = \frac{Z_{PROP}(N)}{\rho}, \quad (63)$$

где ρ - количество логических ячеек FPGA. А для расчета времени, затрачиваемого FPGA модели Virtex-7, на $d^{N \times N}$ тактов работы введем следующую формулу:

$$\lambda^{N \times N} = d^{N \times N} \cdot \delta_{\text{Virtex-7}}. \quad (64)$$

Используя данные из таблицы 16 и таблицы 20, рассчитаем время демодуляции сигнала в системе massive MIMO с антенной конфигурацией 128×128 при модуляции 4-ФМ и 16-КАМ с использованием разработанных алгоритмов А7 (31) и А8 (44). Результаты расчетов приведены в таблице 29.

Таблица 29. Длительность демодуляции сигнала в системе massive MIMO 128×128 с использованием разработанных алгоритмов A7 (31) и A8 (44)

Метод модуляции	4-ФМ	16-КАМ
Антенная конфигурация, $N \times N$	128×128	
Количество операций для демодуляции с использованием разработанных алгоритмов A7 (31) и A8 (44)	3 304 703	4 882 687
Требуемое количество тактов FPGA модели Virtex-7	1,7	2,5
Длительность 1 такта FPGA модели Virtex-7	0,0013 мкс	
Длительность процедуры демодуляции с использованием разработанных алгоритмов A7 (31) и A8 (44)	0,0022 мкс	0,0033 мкс

Таким образом, по данным из таблицы 29, можно сделать вывод, что FPGA модели Virtex-7 для демодуляции сигнала в системе massive MIMO с антенной конфигурацией 128×128 при модуляции 4-ФМ и 16-КАМ с использованием разработанных алгоритмов A7 (31) и A8 (44) потребуется промежуток времени, который меньше длительности одного информационного символа, приведенной в таблице 26, для системы с максимальной скоростью передачи информации 1 Гбит/с при этих методах модуляции.

4.5 Выводы

1. При использовании известного алгоритма МСКО (5) и (36) демодуляция сигнала в системе massive MIMO на современных ЦСП невозможна для систем беспроводной связи со скоростью передачи информации в 1 Гбит/с и выше.

2. Использование разработанных алгоритмов А7 (31) и А8 (44) позволяет осуществить демодуляцию сигнала на современных ЦСП в системе massive MIMO с антенной конфигурацией 64×64 как при модуляции 4-ФМ, так и при модуляции 16-КАМ.

3. Использование разработанных алгоритмов А7 (31) и А8 (44) позволяет реализовать демодуляцию сигнала на FPGA модели Virtex-7 в системе massive MIMO с антенной конфигурацией 128×128 как при модуляции 4-ФМ, так и при модуляции 16-КАМ.

Заключение

Основные результаты проведенных исследований и разработок заключаются в следующем:

1. Предложенная модификация алгоритма демодуляции МСКО позволяет сократить его вычислительную сложность в 2 раза без потерь в помехоустойчивости для систем massive MIMO.

2. Разработанный итерационный алгоритм демодуляции А7 (31) для систем massive MIMO позволяет снизить вычислительную сложность демодуляции сигнала в 4 раза для антенной конфигурации 64×64 и в 7 раз для антенной конфигурации 128×128 по сравнению с известным алгоритмом демодуляции МСКО при допустимых потерях в помехоустойчивости приёма.

3. Использование разработанных алгоритмов А7 (31) и А8 (44) для систем massive MIMO с модуляцией 4-ФМ и помехоустойчивым кодированием позволяет снизить вычислительную сложность демодуляции в 5 раз при антенных конфигурациях 64×64 и 128×128 с потерями в 0,05 дБ по уровню коэффициента ошибки по кадрам $FER = 10^{-2}$ по сравнению с известным алгоритмом демодуляции МСКО (5) и (36).

4. Использование разработанных алгоритмов А7 (31) и А8 (44) для систем massive MIMO с модуляцией 16-КАМ и помехоустойчивым кодированием позволяет снизить вычислительную сложность демодуляции в 2,5 раза при антенной конфигурации 64×64 и в 3,5 раза при антенной конфигурации 128×128 с потерями в 1 дБ и 0,2 дБ по уровню коэффициента ошибки по кадрам $FER = 10^{-2}$ по сравнению с известным алгоритмом демодуляции МСКО (5) и (36) соответственно.

5. Выполнение демодуляции сигнала на современных ЦСП в системах massive MIMO при использовании известного алгоритма МСКО практически не реализуемо.

6. Использование разработанных алгоритмов А7 (31) и А8 (44) позволяет осуществить демодуляцию сигнала на современных ЦСП в системе massive MIMO с антенной конфигурацией 64×64 как при модуляции 4-ФМ, так и при модуляции 16-QAM.

7. Используя разработанные алгоритмы А7 (31) и А8 (44), можно реализовать демодулятор на FPGA модели Virtex-7 в системе massive MIMO с антенной конфигурацией 128×128 как при модуляции 4-ФМ, так и при модуляции 16-QAM.

Сокращения и обозначения

КАМ	– Квадратурно-амплитудная модуляция
МП	– Максимальное правдоподобие
МСКО	– Минимум среднеквадратической ошибки
ОСШ	– Отношение сигнал/шум
СЛАУ	– Система линейных алгебраических уравнений
ФМ	– Фазовая модуляция
ЦСП	– Цифровой сигнальный процессор
3GPP	– 3rd Generation Partnership Project / Партнерский проект по разработке систем 3-го поколения
3М	– 3 Multiplications / 3 умножения
BER	– Bit Error Rate / Коэффициент битовых ошибок
FER	– Frame Error Rate / Коэффициент ошибок по кадрам
FLOPS	– FLoating-point Operations Per Second / Количество операций с плавающей точкой в секунду
FPGA	– Field-programmable gate array
IEEE	– Institute of Electrical & Electronics Engineers / Институт инженеров по электротехнике и электронике
IPS	– Instructions Per Second / Количество инструкций в секунду
LTE	– Long Term Evolution / Сети беспроводного доступа в долгосрочной перспективе
MIMO	– Multiple-Input-Multiple-Output / Системы с несколькими антеннами на передающей и приемной сторонах
MACS	– Multiplier and Accumulator per Second / Количество операций умножения с накоплением в секунду

- MU-MIMO – Multiuser Multiple-Input-Multiple-Output / Многопользовательские системы с несколькими антеннами на передающей и приемной сторонах
- OFDM – Orthogonal-Frequency Division Multiplexing / Ортогональное мультиплексирование с частотным уплотнением
- RISC – Reduced Instruction Set Computer / Компьютер с уменьшенным набором инструкций
- SISO – Single-Input-Single-Output / Системы с одной антенной на передающей стороне и одной антенной на приемной стороне
- V-BLAST – Vertical Bell Labs Layered Space Time / Вертикальная пространственно-временная архитектура лаборатории Белла
- VLIW – Very Long Instruction Word / Архитектура с очень длинным командным словом
- ZF – Zero Forcing / Метод обнуления, декоррелятор

Литература

1. Бакулин, М.Г. Технология MIMO: принципы и алгоритмы / М.Г. Бакулин, Л.А. Варукина, В.Б. Крейнделин. – М.: Горячая линия – Телеком, 2014. – 244 с.
2. Аджемов, А.С. Общая теория связи: учебник для вузов / А.С. Аджемов, В.Г. Санников. – М.: Горячая линия – Телеком, 2018. – 624 с.
3. Быховский, М.А. Оптимальная линейная коррекция многолучевого канала связи при разнесенном приеме сигналов / М.А. Быховский // Электросвязь. – 2011. – № 12. – С. 36-41.
4. Sibille, A. MIMO: From Theory to Implementation / A. Sibille, C. Oestges, A. Zanella. – UK: Elsevier Ltd., 2011. – 384 p.
5. Ngo, H.Q. Massive MIMO: Fundamentals and System Designs / H. Q. Ngo. – Linköping University Electronic Press, 2015. – 301 p.
6. Крейнделин, В.Б. Моделирование инфокоммуникационных систем [Электронный ресурс]: Лабораторный практикум для бакалавров очной формы обучения направления 11.03.02 / В.Б. Крейнделин, А.Э. Смирнов, Т.Б.К. Бен Режеб. – М.: МТУСИ, 2018. – (http://www.mtuci.ru/structure/library/catalogue/download.php?book_id=1841).
7. Kuhn, V. Wireless Communications over MIMO Channels: Applications to CDMA and Multiple Antenna Systems / V. Kuhn. – John Wiley & Sons Ltd, 2006. – 388 p.
8. Lu, L. An Overview of Massive MIMO: Benefits and Challenges / L. Lu, G. Ye Li, A. L. Swindlehurst, A. Ashikhmin, R. Zhang. // IEEE journal of selected topics in signal processing. – 2014. – Volume: 8, issue: 5. – pp. 742-758.
9. 3GPP TS 36.201 v.8.1.0. Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); LTE Physical Layer – General Description (Release 8). – (https://www.etsi.org/deliver/etsi_ts/136200_136299/136201/08.01.00_60/ts_136201v080100p.pdf).

10. 3GPP TS 36.871 v.11.0.0. Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Downlink Multiple Input Multiple Output (MIMO) enhancement for LTE-Advanced (Release 11). – (<http://www.qtc.jp/3GPP/Specs/36871-b00.pdf>).
11. Ahmadi, S. LTE Advanced. A Practical System Approach to Understanding 3GPP LTE Releases 10 and 11 Radio Access Technologies / S. Ahmadi. – John Wiley & Sons Ltd, 2014. – 1107 p.
12. Larsson, E.G. Massive MIMO for next generation wireless systems / E. G. Larsson, O. Edfors, F. Tufvesson, T. L. Martezza // IEEE Communications Magazine. – 2014. – Volume: 52, issue: 2. – pp. 186-195.
13. Marzetta, T. L. Noncooperative Cellular Wireless with Unlimited Numbers of Base Station Antennas / T. L. Martezza // IEEE Transactions on Wireless Communications. – 2010. – Volume: 9, issue: 11. – pp. 3590-3600.
14. Rusek, F. Scaling up MIMO: Opportunities and challenges with very large arrays / F. Rusek, D. Persson, B. K. Lau, E. G. Larsson, T. Martezza, O. Edfors, F. Tufvesson // IEEE Signal Processing Magazine. – 2013. – Volume: 30, issue: 1. – pp. 40-60.
15. Крейнделин, В.Б. Сравнение алгоритмов демодуляции при увеличении количества антенн технологии Massive MIMO / В.Б. Крейнделин, А.Э. Смирнов // Международный форум информатизации (МФИ-2014). Труды конференции «Телекоммуникационные вычислительные системы». – М., МТУСИ, 2014. – С 141.
16. Jeon, C. Optimality of Large MIMO Detection via Approximate Message Passing / C. Jeon, R. Ghods, A. Maleki, C. Studer/ In proc. IEEE International Symposium on Information Theory, 2015. – pp 1227-1231.
17. Wu, S. Low-complexity iterative detection for large-scale multiuser MIMO-OFDM systems using approximate message passing / S. Wu, L. Kuang, Z. Ni, J. Lu, D. Huang, Q. Guo // IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing. – 2014. – Volume: 8, issue: 5. – pp. 902-915.
18. Jungnickel, V. The Role of Small Cells, Coordinated Multi-point, and Massive MIMO in 5G / V. Jungnickel, K. Manolakis, W. Zirwas, B. Panzner, V. Braun, M.

- Lossow, M. Sternad, R. Apelfröjd, T. Svensson // *IEEE Communications Magazine*. – 2014. – Volume: 52, issue: 5. – pp. 44-51.
19. Hoydis, J. Massive MIMO in the UL/DL of Cellular Networks: How Many Antennas Do We Need? / J. Hoydis, S. ten Brink, M. Debbah // *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*. – 2013. – Volume: 31, issue: 2. – pp. 160-171.
 20. Fadlallah, Y. Low-complexity detector for very large and massive MIMO transmission / Y. Fadlallah, A. Aissa El Bey, K. Amis, D. Pastor // *SPAWC 2015: 16th IEEE International Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications*, 2015. – pp. 251-255.
 21. Strassen, V. Gaussian Elimination is Not Optimal / V. Strassen // *Numerische Mathematik*. – 1969. – Volume: 13, issue: 4. – pp. 354-356.
 22. Aho, A.V. The design and analysis of computer algorithms / A. V. Aho, J. E. Hopcroft, Jeffrey D. Ullman. – Addison-Wesley, 1974. – 470 p.
 23. Higham, N.J. Accuracy and stability of numerical algorithms / N. J. Higham. – SIAM, 1996. – 688 p.
 24. Higham, N.J. Stability of a method for multiplying complex matrices with three real matrix multiplications / N. J. Higham // *SIAM Journal on matrix analysis and applications*. – 1992. – Volume: 13, issue: 3. – pp. 681-687.
 25. Самарский, А. А. Численные методы: учеб. пособие для вузов / А.А. Самарский, А.В. Гулин – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с.
 26. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – 5-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.
 27. Saad, Y. Iterative methods for sparse linear systems / Y. Saad. – 2nd edition with corrections. – SIAM, 2003. – 528 p.
 28. Van der Vorst, H.A. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of non-symmetric linear systems / H.A. Van der Vorst // *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. – 1992. – Volume: 13, № 2. – pp. 631-644.

29. Sleijpen, G.L.C. BiCGstab(l) and other hybrid Bi-CG methods / G.L.C. Sleijpen, H.A. Van der Vorst, D.R. Fokkema // Numerical Algorithms. – 1994. – Volume: 7. – pp. 75-109.
30. Sleijpen, G.L.C. BiCGstab(l) for linear equations involving unsymmetric matrices with complex spectrum / G.L.C. Sleijpen, D.R. Fokkema // Electronic Transactions on Numerical Analysis. – 1993. – Volume: 7. – pp. 11-32.
31. MIMO-OFDM wireless communications with MATLAB / Y. S. Cho et al. – John Wiley & Sons Ltd, 2010. – 544 p.
32. Ingle, V.K. Digital Signal Processing Using MATLAB / V.K. Ingle, J.G. Proakis. – 3-rd edition. – CL-Engineering, 2011. – 672 p.
33. Дьяконов, В. П. MATLAB. Полный самоучитель / В.П. Дьяконов. – М.: ДМК Пресс, 2012. – 768 с.: ил.
34. Васильев, К.К. Математическое моделирование систем связи: учебное пособие / К.К. Васильев – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – 170 с.
35. Левин, Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. – М.: Радио и связь, 1968. – 504 с.
36. Тихонов, В. И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
37. Волков, Л.Н. Системы цифровой радиосвязи. Базовые методы и характеристики: учебное пособие / Л.Н. Волков, М.С. Немировский, Ю.С. Шинаков. – М.: Эко-Трендз, 2005. – 392 с.
38. Гуц, А.К. Математическая логика и теория алгоритмов / А.К. Гуц. – М.: Ленанд, 2016. – 128 с.
39. Матрос, Д.Ш. Теория алгоритмов: учебник / Д.Ш. Матрос, Г.Б. Поднебесова. – М.: Бином, 2014. – 202 с.
40. Шелухин, О.И. Моделирование информационных систем: учебное пособие для вузов / О.И. Шелухин. – 2-е издание, перераб. и доп. – М.: Горячая линия – Телеком, 2012. – 516 с.: ил.
41. Сергиенко, А.Б. Цифровая связь: учебное пособие / А.Б. Сергиенко. – СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2012. – 164 с.

42. Giron-Sierra, J. M. Digital Signal Processing with Matlab examples / J. M. Giron-Sierra. – Volume 1. – Springer, 2017. – 622 p.
43. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
44. Levitin, A.V. Introduction to the design and analysis of algorithms / A.V. Levitin. – 2nd ed. – Addison-Wesley, 2007. – 592 p.
45. Savage, J.E. The Complexity of Computing / J.E.Savage. – John Wiley & Sons Ltd, 1976. – 391 p.
46. Слюсар, В. И. Системы ММО: принципы построения и обработка сигналов / В.И. Слюсар // Электроника: наука, технология, бизнес. – 2005. – № 10. – С. 52-59.
47. Ермолаев, В.Т. Теоретические основы обработки сигналов в беспроводных системах связи / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флакман. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. – 368 с.
48. Foschini, G. Layered space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multiple antennas / G. Foschini // Bell Labs Technical Journal. – 1996. – Volume:1, № 2, – pp. 41-59.
49. Крейнделин, В.Б. Новые методы обработки сигналов в системах беспроводной связи / В.Б. Крейнделин. – СПб.: Линк, 2009. – 272 с.
50. Wolniansky, P. W. V-BLAST: An architecture for realizing very high data rates over the rich-scattering wireless channel / P. W. Wolniansky, G. J. Foschini, G. D. Golden, R. A. Valenzuela // in proc. URSI International Symposium Signals, Systems, and Electronics, 1998. – pp. 295-300.
51. Hien, Q. N. Performance bounds for very large multiuser MIMO systems. Linkoping studies in science and technology. Thesis № 1562, Sweden, 2012. – 36 p.
52. IEEE Std 802.11ac™-2013 - IEEE Standard for Information technology--Telecommunications and information exchange between systems--Local and metropolitan area networks--Specific requirements--Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications--

- Amendment 4: Enhancements for Very High Throughput for Operation in Bands below 6 GHz. – (<https://ieeexplore.ieee.org/document/7797535>).
53. 3GPP TS 36.201 v.15.1.0. Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); LTE Physical Layer; General Description (Release 15). – (https://www.etsi.org/deliver/etsi_ts/136200_136299/136201/15.01.00_60/ts_136201v150100p.pdf).
 54. Elshokry, A. Performance Evaluation of MIMO Spatial Multiplexing Detection Techniques / A. Elshokry, A. Abu-Hudrouss // Journal of Al Azhar University-Gaza. – 2012. – Volume: 14. – pp. 47-60.
 55. Larsson, E.G. MIMO Detection Methods: How They Work / E.G. Larsson // Signal Processing Magazine, IEEE. – 2009. – Volume: 26, issue: 3. – pp. 91-95.
 56. Satish Kumar, N. Bit error rate, performance analysis and comparison of $M \times N$ equalizer based maximum likelihood and minimum mean square error mimo receiver for wireless channel / N. Satish Kumar, K.R. Shankar Kumar // ARPJN Journal of Engineering and Applied Sciences. – 2011. – Volume: 6, № 9. – pp. 186-195.
 57. Shankar, P. BER Performance of ZF And MMSE Equalizers For V-Blast MIMO Wireless Communication / P. Shankar, S.A. Hariprasad // International Journal Of Electronics And Computer Science Engineering. – 2012. – Volume: 1, № 4. – pp. 2306-2315.
 58. Bjornson, E. Massive MIMO: ten myths and one critical question / E. Bjornson, E.G. Larsson, T.L. Martezza // IEEE Communications Magazine. – 2016. – Volume: 54, issue: 2. – pp. 114-123.
 59. Бакулин, М.Г. Технологии в системах радиосвязи на пути к 5G / М.Г. Бакулин, В.Б. Крейнделин, Д.Ю. Панкратов. – М.: Горячая линия – Горячая линия – Телеком, 2018. – 280 с.: ил.
 60. Крейнделин, В.Б. Эффективность методов обработки сигналов в системах MU-MIMO высоких порядков / В.Б. Крейнделин, А.Э. Смирнов, Т.Б.К. Бен Режеб // T-Comm – Телекоммуникации и транспорт. – 2016. – №12. – С. 24-30.

61. Крейнделин, В.Б. Исследование радиointерфейса беспроводных систем межмашинного взаимодействия M2M / В.Б. Крейнделин, А.Э. Смирнов, Т.Б.К. Бен Режеб // Т-Comm – Телекоммуникации и транспорт. – 2014. – №6. – С. 71-74.
62. Быховский, М.А. Повышение помехоустойчивости систем MIMO за счет применения автовыбора антенн на базовой и абонентской станциях / М.А. Быховский // Электросвязь. – 2011. – № 6. – С. 28-31.
63. Смирнов, А.Э. Исследование эффективности методов демодуляции сигналов в системах связи с большим количеством антенн / А.Э.Смирнов, Т.Б.К. Бен Режеб // Труды 70-й международной конференции «Радиоэлектронные устройства и системы для инфокоммуникационных технологий – РЭУС-2015», посвященной дню Радио. Выпуск LXX. – М.: Брис-М, 2015. – С. 251-255.
64. Мальцев, И.А. Линейная алгебра: учебное пособие / И.А. Мальцев. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 384с.: ил.
65. Голуб, Дж. Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. – М.: Мир, 1999. – 548 с.
66. Horn, R. A. Matrix analysis / R.A. Horn, C.R. Johnson. – 2nd ed. – Cambridge University Press, 2013. – 662 p.
67. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен [и др.]. – 2-е издание.: пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 1296 с.
68. Ахо, А. Алгоритмы и структуры данных. Пер. с англ: уч. пособие / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2000. – 384 с.
69. Ballard, G. Communication Costs of Strassen's Matrix Multiplication / G. Ballard, J. Demmel, O. Holtz, O. Schwartz // Communications of the ACM. – 2014. – Volume: 57, № 2. – pp. 107-114.
70. Boehnke, R. Reduced complexity MMSE detection for BLAST architectures / R. Boehnke, D. Wuebben, V. Kuehn, K.D. Kammeyer // in proc. IEEE 2003 Global

- Communications Conference (Globecom'2003, San Francisco, California, USA), 2003. – pp. 2258–2262.
71. Yokota, Y. Complexity reduction for higher order MIMO decoder using block diagonalization / Y. Yokota, H. Ochi // 2013 International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communication Systems. – 2013. – pp. 235-239.
 72. Смирнов, А.Э. Снижение порядка вычислительной сложности алгоритмов детектирования в многоантенных системах за счёт использования алгоритмов быстрого умножения матриц / А.Э. Смирнов // Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения: материалы международной научно-технической конференции «INTERMATIC-2015». – М.: МИРЭА, 2015. – Т.: 15, №5. – С. 267-270.
 73. Kreyndelin, V.B. Decreasing of computational complexity of demodulation algorithms in multi-antenna systems due to application of fast algorithms / V.B. Kreyndelin, A.E. Smirnov // Telecommunications and Radio Engineering. – 2016. – Volume: 75, issue: 19. – pp. 1757-1773.
 74. Крейнделин, В.Б. Методы снижения вычислительной сложности алгоритмов демодуляции без потерь в помехоустойчивости в системах связи с большим количеством антенн / В.Б. Крейнделин, А.Э. Смирнов // Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения: материалы международной научно-технической конференции «INTERMATIC-2016». – М.: Галлея-Принт, 2016. – Т.: 16, №5. – С. 305-308.
 75. Крейнделин, В.Б. Перспективы использования систем Massive MIMO в системах беспроводной связи / В.Б. Крейнделин, А.Э. Смирнов, Т.Б.К. Бен Режеб // Перспективные технологии в средствах передачи информации: материалы 11-ой международной научно-технической конференции. – Владимир: ВлГУ, 2015. – С. 113-116.
 76. Смирнов, А.Э. Итерационный алгоритм демодуляции с низкой вычислительной сложностью для систем massive MIMO / А.Э. Смирнов // 20-я Международная конференция «DSPA-2018». Сборник докладов (Том 1).

- Серия: Цифровая обработка сигналов и её применение (выпуск XIX-1). – Москва, 2018. – С. 362-367.
77. Van der Vorst, H.A. Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems / H.A. Van der Vorst. – Cambridge University Press, 2003. – 237 p.
78. Saad, Y. Conjugate gradient-like algorithms for solving nonsymmetric linear systems / Y. Saad, M.H. Schultz // Mathematics of computation. – 1985. – Volume: 44, № 170. – pp. 417-424.
79. Bertaccini, D. Iterative Methods and Preconditioning for Large and Sparse Linear Systems with Applications / D. Bertaccini, F. Durastante. – CRC Press, 2018. – 354 p.
80. Крейнделин, В.Б. Новый алгоритм демодуляции для систем беспроводной связи, использующих технологию Massive MIMO / В.Б. Крейнделин, А.Э. Смирнов / Труды международной научно-технической конференции «Телекоммуникационные и вычислительные системы–2018». – М.: Горячая линия – Телеком, 2018. – 207-213 с.
81. Крейнделин, В.Б. Программа для реализации итерационного алгоритма демодуляции с низкой вычислительной сложностью, предназначенного для систем связи с несколькими передающими и несколькими приемными антеннами / В.Б. Крейнделин, А.Э. Смирнов, Т.Б.К. Бен Режеб // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018617048 от 15 июня 2018.
82. Скляр, Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. Пер. с англ. под ред. А.В. Назаренко / Б. Скляр. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
83. Кларк, Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи / Дж. Кларк, Дж. Кейн. – М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.
84. Hoehner, P. TCM on frequency-selective fading channels: A comparison of soft-output probabilistic equalizers / P. Hoehner // in proc. of GLOBECOM'90. – 1990. – Volume 1. – pp. 401.4.1 – 401.4.6.

85. Кириллов, Н.Е. Помехоустойчивая передача сообщений по линейным каналам со случайно изменяющимися параметрами / Н.Е. Кириллов. – М.: Связь, 1971. – 256 с.
86. Kreyndelin, V. Effective precoding and demodulation techniques for 5G communication systems / V. Kreyndelin, A. Smirnov, T. Ben Rejeb // in proc. Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications. – 2018. – pp. 1-6.
87. Tse, D. Fundamentals of Wireless Communication / D. Tse, P. Viswanath. – Cambridge Univ. Press, 2005. – 323 p.
88. Miao, G.J. Signal Processing in Digital Communications / G.J. Miao. – Artech House, 2007. – 515 p.
89. Hanzo, L. MIMO-OFDM for LTE, Wi-Fi and WiMAX. Coherent versus Non-Coherent and Cooperative Turbo-transceivers / L. Hanzo, J. Akhtman, L. Wang, M. Jiang. – John Wiley & Sons, 2011. – 658 p.
90. Шлома, А.М. Новые алгоритмы формирования и обработки сигналов в системах подвижной связи / А.М. Шлома [и др.] – М.: Горячая линия – Телеком, 2008. – 344 с.
91. Huang, H. MIMO Communications for Cellular Networks / H. Huang, S.B. Papadimas, S. Venkatesan. – Springer Science+Business Media LLC, 2012. – 314 p.
92. Тихонов, В.И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем / В.И. Тихонов, В.Н. Харисов. – М.: Радио и связь, 1991. – 608 с.
93. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов: учебник для вузов / В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.: ил.
94. Иванова, В.Г. Тяжев, А.И. Цифровая обработка сигналов и сигнальные процессоры: учебное пособие / В.Г. Иванова, А.И. Тяжев. – 2-ое изд. – Самара: ПГУТИ, 2017. – 252 с.
95. Гребешков, А.Ю. Микропроцессорные системы и программное обеспечение в средствах связи: учебное пособие. Гриф УМО/ А.Ю. Гребешков. – Самара: ПГАТИ, 2011. – 223 с.

96. Солонина, А. И. Алгоритмы и процессоры цифровой обработки сигналов / А.И. Солонина, Д.А. Улахович, Л.А. Яковлев. – СПб: БХВ-Петербург, 2001. – 464 с.
97. Smith S.W. The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing / S.W. Smith. – Second Edition. – California Technical Publishing, 1999. – 664 p.
98. Угрюмов, Е. П. Цифровая схемотехника: учеб. пособие для вузов / Е.П. Угрюмов. – 3-е издание, переработанное и дополненное. – БХВ-Петербург, 2010. – 816 с.
99. Корнилин, Д.В. Аппаратные и программные средства систем обработки информации на основе ПЛИС и микропроцессоров: учебное пособие / Д.В. Корнилин, И.А. Кудрявцев. – Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2012. – 104 с.
100. TI's new TMS320C66x fixed- and floating-point DSP core conquers the 'Need for Speed'. – (<http://www.ti.com/lit/wp/spry147/spry147.pdf>).
101. Витязев, В.В. Цифровые процессоры обработки сигналов и их применение в технике связи / В.В. Витязев, А.Н. Соловьев // Электросвязь. – 1994. – № 12.
102. Global Digital Signal Processors Market Research Report 2017 Opportunities, Product Types, Applications, Forecast to 2022. – (<https://www.marketdeeper.com/global-digital-signal-processors-market-research-report-2017-2886.html>).
103. Тенденции развития высокопроизводительных цифровых процессоров обработки сигналов. – (<https://www.soel.ru/upload/clouds/1/iblock/753/7534e711f50d5b626538990074291e01/20110508.pdf>).
104. Tsoulos, G. MIMO System Technology for Wireless Communications / G. Tsoulos. – Boca Raton: CRC Press, 2006. – 400 p.
105. Rafael, M. F. OFDM System Implementation in DSP Platform TMS320C6678 / M.F. Rafael, A. Taufik // Journal of Computer and Communications. –2016. . – № 4. – pp. 26-36.

106. TMS320C6713B Floating-Point Digital Signal Processor datasheet (Rev. B). – (<http://www.ti.com/lit/gpn/tms320c6713b>).
107. TMS320C6678 Multicore Fixed and Floating Point Digital Signal Processor datasheet (Rev. E). – (<http://www.ti.com/lit/ds/symlink/tms320c6678.pdf>).
108. TI's new TMS320C66x fixed- and floating-point DSP core conquers the 'Need for Speed'. – (<http://www.ti.com/lit/wp/spry147/spry147.pdf>).
109. ADSP-21261/ADSP-21262/ADSP-21266 SHARC Embedded Processor datasheet (Rev. G). – (http://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/ADSP-21261_21262_21266.pdf).
110. ADSP-TS101S: TigerSHARC Embedded Processor, 300 MHz, 6 Mbits, Data Sheet (Rev. C). – (<http://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/ADSP-TS101S.pdf>).
111. Recommendation ITU-R M.2083-0. IMT Vision – Framework and overall objectives of the future development of IMT for 2020 and beyond. – (https://www.itu.int/dms_pubrec/itu-r/rec/m/R-REC-M.2083-0-201509-I!!PDF-E.pdf).
112. Пономарев, Л. И. Оптимизация спектральной эффективности в многоканальных системах сотовой связи / Л.И. Пономарев, А.И. Скородумов // Радиотехника и электроника. – 2009. – Т.54, № 1. – С. 81-97.
113. Соловьев, В.В. Архитектуры ПЛИС фирмы Xilinx: CPLD и FPGA 7-й серии. / В.В. Соловьев. – М.: Горячая линия – Телеком, 2016. – 392 с.
114. Dillien P. And the Winner of Best FPGA of 2016 is... – (https://www.eetimes.com/author.asp?doc_id=1331443).
115. Top FPGA Companies For 2013. – (<http://sourcetech411.com/2013/04/top-fpga-companies-for-2013/>).
116. 7 Series FPGAs Data Sheet: Overview. – (https://www.xilinx.com/support/documentation/data_sheets/ds180_7Series_Overview.pdf).

117. KINTEX-7 FPGA Product Brief. –
[\(<https://www.xilinx.com/support/documentation/product-briefs/kintex7-product-brief.pdf>\)](https://www.xilinx.com/support/documentation/product-briefs/kintex7-product-brief.pdf).
118. ARTIX-7 FPGA Product Brief. –
[\(<https://www.xilinx.com/support/documentation/product-briefs/artix7-product-brief.pdf>\)](https://www.xilinx.com/support/documentation/product-briefs/artix7-product-brief.pdf).
119. SPARTAN-7 FPGA Product Brief. –
[\(<https://www.xilinx.com/support/documentation/product-briefs/spartan-7-product-brief.pdf>\)](https://www.xilinx.com/support/documentation/product-briefs/spartan-7-product-brief.pdf).
120. VIRTEX-7 FPGA Product Brief. –
[\(<https://www.xilinx.com/support/documentation/product-briefs/virtex7-product-brief.pdf>\)](https://www.xilinx.com/support/documentation/product-briefs/virtex7-product-brief.pdf).
121. All Programmable 7 series Product selection guide. –
[\(<https://www.xilinx.com/support/documentation/selection-guides/7-series-product-selection-guide.pdf>\)](https://www.xilinx.com/support/documentation/selection-guides/7-series-product-selection-guide.pdf).
122. Vieira, J. A flexible 100-antenna testbed for Massive MIMO / J. Vieira et al. // in proc. 2014 IEEE Globecom Workshops (GC Wkshps), 2014. – pp. 287-293.
123. Knuth, D.E. The Art of Computer programming (Volume 2), Seminumerical algorithms / D.E. Knuth. – Second Edition. – Addison-Wesley, 1981.
124. Fam, A.T. Efficient complex matrix multiplication / A.T. Fam // IEEE Transactions on Computers. – 1988. – Volume: 37, issue: 7. – pp. 877-879.
125. Winograd, S. On multiplication of 2×2 matrices / S. Winograd // Linear algebra and its applications. –1971. – Volume: 4, issue: 4. – pp. 381-388.
126. Winograd, S. On the number of multiplications required to compute certain functions / S. Winograd // Commun. Pure Appl. Math. – 1970. – Volume: 23. – pp. 165-179.
127. Ланкастер, П. Теория матриц / П. Ланкастер. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1973. – 280 с.

Приложение 1

Акты о внедрении и использовании результатов диссертационной работы

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по учебной работе ордена Трудового
Красного Знамени федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Московский технический
университет связи и информатики»,
к.т.н., доцент
Е.В. Титов



« 14 » сентября 2018 г.

Акт об использовании в учебном процессе научных
результатов диссертационной работы Смирнова А.Э.
«Исследование и разработка алгоритмов обработки сигналов в системах
беспроводной связи с большим количеством антенн»

Комиссия в составе:

- директора Департамента организации и управления учебным процессом МТУСИ Карпушиной Н.Д.;
 - заведующей Центром планирования и сопровождения учебного процесса МТУСИ Патенченковой Е.К.;
 - зав. кафедрой «Информационная безопасность» Шелухина О.И.
- удостоверяет, что в учебном процессе кафедры «Информационная безопасность» при чтении курса лекций по дисциплине «Моделирование инфокоммуникационных систем» используются результаты диссертационной работы Смирнова А.Э., а именно: проведенный диссертантом анализ вычислительной сложности алгоритмов обработки сигналов на приёмной стороне для систем беспроводной связи с многоэлементными антеннами, а также разработанные диссертантом алгоритмы детектирования сигнала на приёмной стороне с низкой вычислительной сложностью.

Директор департамента организации и управления учебным процессом МТУСИ

Н.Д. Карпушина

Заведующая центром планирования и сопровождения учебного процесса МТУСИ

Е.К. Патенченкова

Заведующий кафедрой
«Информационная безопасность»,
д.т.н., профессор

О.И. Шелухин

«Утверждаю»

Проректор по учебной работе
Московского технического
университета связи и информатики
к.т.н., доцент

«31» 08 2018 г.

Е.В. Титов



Акт об использовании в учебном процессе научных
результатов диссертационной работы Смирнова А.Э.
«Исследование и разработка алгоритмов обработки сигналов в системах
беспроводной связи с большим количеством антенн»

Настоящим актом подтверждается, что результаты исследований и
разработки алгоритмов обработки сигналов в системах беспроводной связи
с большим количеством антенн, выполненных Смирновым А.Э. в диссер-
тационной работе, используются в учебном процессе кафедры «Информа-
ционная безопасность» и отражены в лабораторном практикуме:

— Крейнделин В.Б., Смирнов А.Э., Бен Режеб Т.Б.К. Моделирование ин-
фокоммуникационных систем (для бакалавров очной формы обучения
направления 11.03.02): Лабораторный практикум. – М.: МТУСИ, 2018. – 27
с. — ЭБС МТУСИ.

Заведующий кафедрой
«Информационная безопасность»,
д.т.н., профессор

Шелухин О.И.

«Утверждаю»

Вице-президент

АО «Крафтвэй корпорэйшн ПЛС»

В.Е. Муравьев

«17» апреля 2018 г.



Акт о внедрении результатов диссертационной работы
Смирнова Алексея Эдуардовича
«Исследование и разработка алгоритмов обработки сигналов в системах
беспроводной связи с большим количеством антенн»

Научно-техническая комиссия в составе к.ф.-м.н. Сборец Ю.Н., к.ф.-м.н. Кузьмичева Д.А. и к.т.н. Гордиан А.В. составила настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы Смирнова А.Э.:

- снижение вычислительной сложности алгоритма детектирования сигнала в системах связи, использующих технологию MIMO;
 - разработка алгоритма детектирования с низкой вычислительной сложностью по сравнению с известными алгоритмами;
- были использованы и внедрены при разработке материнских плат с Wi-Fi модулями на заводе АО «Крафтвэй корпорэйшн ПЛС». Применение разработанных алгоритмов позволяет снизить количество элементарных арифметических операций для обработки сигнала по сравнению с известными алгоритмами на 30 – 80%, что приводит к:
- сокращению расходов на изготовление материнской платы за счёт использования менее производительных компонентов;
 - увеличению быстродействия тракта обработки информации.

Финансовый директор

Заместитель финансового директора

Руководитель направления

к.ф.-м.н., Сборец Ю.Н.

к.ф.-м.н., Кузьмичев Д.А.

к.т.н., Гордиан А.В.

Приложение 2

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018617048

Программа для реализации итерационного алгоритма демодуляции с низкой вычислительной сложностью, предназначенного для систем связи с несколькими передающими и несколькими приемными антеннами

Правообладатель: *Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский технический университет связи и информатики» (МТУСИ) (RU)*

Авторы: *Крейнделин Виталий Борисович (RU), Бен Резеб Тауфик Бен Камель (RU), Смирнов Алексей Эдуардович (RU)*

Заявка № **2018612196**
Дата поступления **06 марта 2018 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **15 июня 2018 г.**



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

 Г.П. Ильев

Приложение 3

Алгоритм Штрассена

Для иллюстрации использования алгоритма Штрассена рассмотрим умножение двух матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} размерности $N \times N$ друг на друга, причём N – степень числа 2. Каждую матрицу размерности $N \times N$ можно разбить на 4 равные матрицы \mathbf{a} и \mathbf{b} размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_{00} & \mathbf{c}_{01} \\ \mathbf{c}_{10} & \mathbf{c}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{00} & \mathbf{a}_{01} \\ \mathbf{a}_{10} & \mathbf{a}_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{00} & \mathbf{b}_{01} \\ \mathbf{b}_{10} & \mathbf{b}_{11} \end{bmatrix}, \quad (65)$$

при этом:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{00} &= \mathbf{a}_{00} \mathbf{b}_{00} + \mathbf{a}_{01} \mathbf{b}_{10} \\ \mathbf{c}_{01} &= \mathbf{a}_{00} \mathbf{b}_{01} + \mathbf{a}_{01} \mathbf{b}_{11} \\ \mathbf{c}_{10} &= \mathbf{a}_{10} \mathbf{b}_{00} + \mathbf{a}_{11} \mathbf{b}_{10} \\ \mathbf{c}_{11} &= \mathbf{a}_{10} \mathbf{b}_{01} + \mathbf{a}_{11} \mathbf{b}_{11} \end{aligned} \quad (66)$$

Произведение \mathbf{C} матриц $N \times N$, согласно (66), можно выразить как суммы и произведения матриц размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ [21]. Вычисление произведения матриц двух матриц размерности $N \times N$ с использованием алгоритма Штрассена требует введения новых матриц $\mathbf{m}_1 \dots \mathbf{m}_7$ и выражения матрицы \mathbf{C} через матрицы $\mathbf{m}_1 \dots \mathbf{m}_7$. Выглядит это следующим образом [21],[23],[67],[68],[69]:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{00} & \mathbf{c}_{01} \\ \mathbf{c}_{10} & \mathbf{c}_{11} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{00} & \mathbf{a}_{01} \\ \mathbf{a}_{10} & \mathbf{a}_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{00} & \mathbf{b}_{01} \\ \mathbf{b}_{10} & \mathbf{b}_{11} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_4 - \mathbf{m}_5 + \mathbf{m}_7 & \mathbf{m}_3 + \mathbf{m}_5 \\ \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_4 & \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_3 - \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_6 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (67)$$

где:

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_1 &= (\mathbf{a}_{00} + \mathbf{a}_{11}) \cdot (\mathbf{b}_{00} + \mathbf{b}_{11}) \\
\mathbf{m}_2 &= (\mathbf{a}_{10} + \mathbf{a}_{11}) \cdot \mathbf{b}_{00} \\
\mathbf{m}_3 &= \mathbf{a}_{00} \cdot (\mathbf{b}_{01} - \mathbf{b}_{11}) \\
\mathbf{m}_4 &= \mathbf{a}_{11} \cdot (\mathbf{b}_{10} + \mathbf{b}_{00}) \\
\mathbf{m}_5 &= (\mathbf{a}_{00} + \mathbf{a}_{01}) \cdot \mathbf{b}_{11} \\
\mathbf{m}_6 &= (\mathbf{a}_{10} - \mathbf{a}_{00}) \cdot (\mathbf{b}_{00} + \mathbf{b}_{01}) \\
\mathbf{m}_7 &= (\mathbf{a}_{01} - \mathbf{a}_{11}) \cdot (\mathbf{b}_{10} + \mathbf{b}_{11})
\end{aligned} \tag{68}$$

Отсюда следует, что, используя алгоритм Штрассена (67), (68) для умножения двух матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} размерности $N \times N$ друг на друга, необходимо выполнить 7 умножений и 18 сложений матриц размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$. Данное утверждение справедливо при размерности матриц 2×2 . В том случае, когда необходимо вычислить произведение матриц большей размерности, нужно применять данный алгоритм рекурсивно. Используя принцип «разделяй и властвуй», находят решения частей задачи, из которых затем получают решение всей задачи [21].

Рассматривая получение решения таких задач в общем виде, можно сделать вывод, что необходимое число арифметических операций будет равно [21],[22]:

$$Z(N) = \begin{cases} n, N = 1 \\ aZ\left(\frac{N}{p}\right) + bn, N > 1 \end{cases} \tag{69}$$

где a , n и p – неотрицательные постоянные. Таким образом, общая задача состоит из решения a подзадач в p раз меньшего размера.

Допустим, что матрица \mathbf{C} вычисляется с помощью a умножений и n сложений матриц размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$. Рекурсивно применяя алгоритм Штрассена (67), (68), для вычисления произведения двух матриц размерности $N \times N$ получим [21],[22]:

$$Z(N) = aZ\left(\frac{N}{2}\right) + n\left(\frac{N}{2}\right)^2, \tag{70}$$

где $aZ\left(\frac{N}{2}\right)$ – сложность произведения a пар матриц размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$, а $n\left(\frac{N}{2}\right)^2$ – сложность n сложений, так что каждое из n сложений матриц размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ требует $\frac{N^2}{4}$ операций.

Необходимое число арифметических операций для получения произведения одной пары квадратных матриц размерности $N \times N$ обычным способом обозначим как $Z_{TRMAT}(N)$, тогда рекуррентная формула вычислительной сложности при использовании традиционного метода выглядит как:

$$Z_{TRMAT}(2N) = 8Z_{TRMAT}(N) + 4N^2, \quad (71)$$

а при использовании алгоритма Штрассена (67), (68) обозначим как $Z_{STMAT}(N)$:

$$Z_{STMAT}(2N) = 7Z_{STMAT}(N) + 18N^2. \quad (72)$$

При этом, несложно рассчитать, что $Z_{TRMAT}(2) = 8 + 4 = 12$ и $Z_{STMAT}(2) = 7 + 18 = 25$.

Для оценки эффективности использования алгоритма Штрассена (67), (68) произведено сравнение количества операций (умножений и сложений), необходимых для вычисления произведения двух квадратных матриц разной размерности традиционным методом и с использованием алгоритма Штрассена. Отметим, что алгоритм Штрассена (67), (68) наиболее эффективен для снижения общего количества операций для вычисления произведения двух квадратных матриц при $N > 16$ [21],[23]. Так как алгоритм Штрассена (67), (68) используется рекурсивно для матриц размерности более, чем 2×2 , и при его применении значительно увеличивается количество требуемых операций сложений по сравнению с традиционным методом, то использовать алгоритм Штрассена (67), (68) для матриц малой размерности неэффективно. Поэтому расчёт количества операций для двух способов вычисления произведения двух квадратных матриц размерности менее 16×16 был произведен согласно формуле (71). Результаты сравнения представлены ниже в таблице 30.

Таблица 30. Анализ эффективности алгоритма Штрассена

N	Количество требуемых операций (умножения и сложения)		$\frac{Z_{STMAT}(N)}{Z_{TRMAT}(N)}$
	$Z_{TRMAT}(N)$	$Z_{STMAT}(N)$	
16	7 936	7 872	0,99
32	64 512	59 712	0,93
64	520 192	436 416	0,84
128	4 177 920	3 128 640	0,75

Как видно из таблицы 30, использование алгоритма Штрассена (67), (68) позволяет сократить количество требуемых арифметических операций для вычисления произведения двух квадратных матриц размерности $N \times N$ до 25%. Выигрыш в снижении количества операций при использовании алгоритма Штрассена (67), (68) особенно заметен, если $N > 40$ [23].

Приложение 4

Метод 3М

Метод 3М (three multiplications) позволяет снизить сложность умножения двух комплексных величин [24],[123],[124],[125],[126]. Кроме того, данный метод также применим и для комплексных матриц. Используя его, можно вычислить произведение двух квадратных комплексных матриц путем трех умножений и пяти сложений действительных матриц вместо четырех умножений и двух сложений действительных матриц.

Рассмотрим операцию вычисления произведения двух комплексных величин [24],[123],[124],[125],[126]:

$$g_M = (q + iu)(z + iv) = qz - uv + i(qv + uz). \quad (73)$$

Обратившись к формуле (73), легко подсчитать, что одно комплексное умножение традиционно требует выполнения четырех умножений и двух сложений над действительными числами.

Теперь рассмотрим операцию умножения двух комплексных матриц \mathbf{D} и \mathbf{E} размерности $N \times N$ друг на друга:

$$\mathbf{F} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = (\mathbf{D}_1 + i\mathbf{D}_2) \cdot (\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2), \quad (74)$$

где \mathbf{F} можно представить как $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + i\mathbf{F}_2$, причем матрица \mathbf{F}_1 содержит элементы, которые являются элементами действительной части матрицы \mathbf{F} , а матрица \mathbf{F}_2 – элементы, которые являются элементами мнимой части матрицы \mathbf{F} . Соответственно, матрицы \mathbf{D} и \mathbf{E} можно также представить как $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + i\mathbf{D}_2$ и $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2$.

Введём следующие обозначения: $\mathbf{S}_1 = \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_1$ и $\mathbf{S}_2 = \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{E}_2$.

Вычисление \mathbf{F} (74) с использованием метода 3М можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{F}_2 &= (\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2) \cdot (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) - \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 \end{aligned} \quad (75)$$

Таким образом, использование метода 3М (75) по сравнению с традиционным умножением комплексных величин по формуле (73) позволяет снизить, количество операций умножения действительных матриц друг на друга с четырёх до трёх, но при этом увеличивается количество операций сложения действительных матриц с двух до пяти [24].

Произведем расчёт числа арифметических операций (умножений и сложений) для получения произведения одной пары квадратных матриц размерности $N \times N$. При использовании традиционного метода вычислительная сложность этой операции может быть рассчитана следующим образом [22],[65],[68]:

$$Z_{TRMAT}(N) = 8N^3 - 2N^2, \quad (76)$$

где $Z_{TRMAT}(N)$ – вычислительная сложность произведения двух квадратных матриц размерности $N \times N$ друг на друга. При использовании метода 3М вычислительная сложность произведения двух квадратных матриц размерности $N \times N$ друг на друга $Z_{3MMAT}(N)$ определяется формулой [22],[24]:

$$Z_{3MMAT}(N) = 6N^3 + 2N^2. \quad (77)$$

Отметим, что выражение (74) можно использовать и для снижения вычислительной сложности получения произведения квадратной матрицы размерности $N \times N$ на вектор размерности N . Допустим, \mathbf{E} – вектор размерности N . Для вычисления произведения $\mathbf{F} = \mathbf{DE}$ с использованием метода 3М необходимо выполнить те же операции по формуле (75), которые выполняются для вычисления произведения двух квадратных матриц. Единственным отличием будет то, что эти операции будут состоять из трех матрично-векторных произведений, одного сложения двух матриц и четырех сложений векторов. Таким образом, сложность операции вычисления произведения квадратной матрицы на вектор традиционным методом равна [22],[65],[68]:

$$Z_{TRMATVEC}(N) = 8N^2 - 2N, \quad (78)$$

где $Z_{TRMATVEC}(N)$ – вычислительная сложность произведения квадратной матрицы размерности $N \times N$ на вектор размерности N традиционным методом. Сложность операции вычисления произведения квадратной матрицы размерности $N \times N$ на вектор размерности N с использованием метода 3М (75) будет равна:

$$Z_{3MMATVEC}(N) = 3N^2 + 3(N^2 - N) + N^2 + 4N = 7N^2 + N. \quad (79)$$

Для удобства анализа эффективности использования метода 3М (75) в таблице 31 приведены результаты сравнения вычислительной сложности операции умножения двух квадратных матриц размерности $N \times N$ друг на друга.

Таблица 31. Анализ эффективности метода 3М для получения произведения двух квадратных матриц

N	Количество требуемых операций (умножения и сложения)		$\frac{Z_{3MMAT}(N)}{Z_{TRMAT}(N)}$
	$Z_{TRMAT}(N)$	$Z_{3MMAT}(N)$	
2	56	56	1
4	480	416	0,87
8	3 968	3 200	0,81
16	32 256	25 088	0,78
32	260 096	198 656	0,76
64	2 088 960	1 581 056	0,76
128	16 744 448	12 615 680	0,75

Таким образом, сокращение общего количества операций для произведения двух матриц, элементами которых являются комплексные числа, размерности при использовании метода 3М (75) может достигать порядка 25%.

Результаты сравнения вычислительной сложности операции получения произведения квадратной матрицы размерности $N \times N$ на вектор размерности N

традиционным методом и с использованием метода 3М (75) приведены в таблице 32.

Таблица 32. Анализ эффективности метода 3М для получения произведения квадратной матрицы на вектор

N	Количество требуемых операций (умножения и сложения)		$\frac{Z_{3MMATVEC}(N)}{Z_{TRMATVEC}(N)}$
	$Z_{TRMATVEC}(N)$	$Z_{3MMATVEC}(N)$	
2	28	28	1
4	120	104	0,87
8	496	400	0,81
16	2 016	1 568	0,78
32	8 128	6 208	0,76
64	32 640	24 704	0,76
128	130 816	98 560	0,75

Как видно из таблицы 32, сокращение количества операций получения произведения квадратной матрицы размерности $N \times N$ на вектор размерности N при использовании метода 3М (75) достигает 25% по сравнению с традиционным алгоритмом (74).

Приложение 5

О вычислительной сложности известных операций над матрицами и векторами

Рассчитаем вычислительную сложность основных операций над матрицами и векторами, которые необходимо выполнить в рамках известных алгоритмов обработки сигнала на приёмной стороне (4) и (5).

Первой операцией алгоритма (5) является операция вычисления произведения двух квадратных матриц размерности $N \times N$: умножение матрицы \mathbf{H}^H , элементы которой комплексные величины, на матрицу \mathbf{H} , элементы которой комплексные величины. Матрица \mathbf{H}^H , которая является эрмитово-сопряженной по отношению к матрице \mathbf{H} , содержит элементы комплексно-сопряженные элементам матрицы \mathbf{H} . Таким образом, результатом вычисления произведения $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ является эрмитова матрица. Как известно [127], у эрмитовой матрицы над и под главной диагональю располагаются комплексно-сопряженные числа симметрично относительно главной диагонали, а сама главная диагональ содержит действительные числа. С учётом этого, для вычисления \mathbf{H}^H имеет смысл вычислить только элементы главной диагонали результирующей матрицы и либо верхнюю треугольную часть матрицы, либо нижнюю.

С учетом выражений (65) и (66) для получения произведения двух матриц размерности 2×2 , можно рассчитать, что для вычисления одного диагонального элемента требуется произвести N умножений комплексно-сопряженных чисел и $N - 1$ сложений над действительными числами.

Одно умножение комплексно-сопряженных чисел представляет из себя следующую операцию:

$$g_{cm} = (q + iu)(q - iu) = q^2 + u^2. \quad (80)$$

Как следует из (80), одно умножение комплексно-сопряженных чисел требует выполнения двух умножений над действительными числами и одного сложения над действительными числами. Так как количество элементов главной

диагонали квадратной матрицы размерности $N \times N$ равно N , получаем, что для вычисления главной диагонали результирующей матрицы $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ необходимо выполнить $2N^2$ умножений над действительными числами и $2N(N-1)$ сложений над действительными числами. Для вычисления каждого элемента над главной диагональю, как видно из формулы (6б), нужно выполнить N умножений над комплексными числами, или $4N$ умножений и $2N$ сложений над действительными числами, а также $N-1$ сложений над комплексными числами, или $2(N-1)$ сложений над действительными числами. Общее количество элементов над (под) главной диагональю квадратной матрицы размерности $N \times N$ можно рассчитать как половина разности общего количества элементов матрицы N^2 и элементов главной диагонали N , или $\frac{N^2 - N}{2}$.

Таким образом, сложность вычисления произведения двух квадратных комплексно-сопряженных матриц размерности $N \times N$ равна:

$$\begin{aligned} Z_{TRMATCONJ}(N) &= (2N^2 + 2N^2(N-1))_{MULT} + \dots \\ &+ (2N(2N-1) + N(N-1)(2N-1))_{ADD} = \dots \\ &= (2N^3)_{MULT} + (2N^3 - N^2 - N)_{ADD} \end{aligned} \quad (81)$$

Следующая операция, согласно формуле (5) – обращение матрицы $\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I}$ размерности $N \times N$. Используем следующие обозначения: $\mathbf{T} = \mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I}$ и $\mathbf{T}^{-1} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + 2\sigma^2 \mathbf{I})^{-1}$. Матрицу \mathbf{T} размерности $N \times N$ можно представить в виде матриц равной размерности размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ следующим образом:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{00} & \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{t}_{10} & \mathbf{t}_{11} \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Так как матрица \mathbf{T} – эрмитова, то $\mathbf{t}_{00} = \mathbf{t}_{00}^H$, $\mathbf{t}_{01} = \mathbf{t}_{10}^H$, $\mathbf{t}_{01}^H = \mathbf{t}_{10}$ и $\mathbf{t}_{11} = \mathbf{t}_{11}^H$. Таким образом, выражение (82) принимает вид:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{00} & \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{t}_{01}^H & \mathbf{t}_{11} \end{bmatrix}. \quad (83)$$

Для получения \mathbf{T}^{-1} предлагается использовать формулу Фробениуса. Формула Фробениуса для вычисления обратной матрицы выглядит следующим образом [26]:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{00}^{-1} + \mathbf{t}_{00}^{-1} \mathbf{t}_{01} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{t}_{10} \mathbf{t}_{00}^{-1} & -\mathbf{t}_{00}^{-1} \mathbf{t}_{01} \mathbf{G}^{-1} \\ \mathbf{G}^{-1} \mathbf{t}_{10} \mathbf{t}_{00}^{-1} & \mathbf{G}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (84)$$

где $\mathbf{G} = \mathbf{t}_{11} - \mathbf{t}_{10} \mathbf{t}_{00}^{-1} \mathbf{t}_{01}$.

В формуле (84) выполним замену $\mathbf{t}_{01} = \mathbf{t}_{10}^H$:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{00}^{-1} + \mathbf{t}_{00}^{-1} \mathbf{t}_{01} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{t}_{01}^H \mathbf{t}_{00}^{-1} & -\mathbf{t}_{00}^{-1} \mathbf{t}_{01} \mathbf{G}^{-1} \\ \mathbf{G}^{-1} \mathbf{t}_{01}^H \mathbf{t}_{00}^{-1} & \mathbf{G}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (85)$$

С учётом эрмитовости матрицы \mathbf{T} , можно сделать вывод, что $\mathbf{t}_{00}^{-1} \mathbf{t}_{01} = \mathbf{t}_{01}^H \mathbf{t}_{00}^{-1}$. Обозначим произведение $\mathbf{t}_{01}^H \mathbf{t}_{00}^{-1}$ как $\mathbf{W} = \mathbf{t}_{01}^H \mathbf{t}_{00}^{-1}$. Следовательно, формула (85) примет вид:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{00}^{-1} + \mathbf{W}^H \mathbf{G}^{-1} \mathbf{W} & -(\mathbf{G}^{-1} \mathbf{W})^H \\ \mathbf{G}^{-1} \mathbf{W} & \mathbf{G}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (86)$$

где $\mathbf{G} = \mathbf{t}_{11} - \mathbf{t}_{10} \mathbf{W}^H$.

Таким образом, для вычисления \mathbf{T}^{-1} по формуле (86) потребуется выполнить:

- 2 обращения матриц размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$: \mathbf{t}_{00}^{-1} , \mathbf{G}^{-1} ;
- 4 умножения матриц размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$: $\mathbf{t}_{01}^H \mathbf{t}_{00}^{-1}$, $\mathbf{G}^{-1} \mathbf{W}$, $\mathbf{W}^H (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{W})$, $\mathbf{t}_{10} \mathbf{W}^H$;
- 2 сложения матриц размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$: $\mathbf{t}_{00}^{-1} + \mathbf{W}^H \mathbf{G}^{-1} \mathbf{W}$, $\mathbf{t}_{11} - \mathbf{t}_{10} \mathbf{W}^H$.

Операции обращения матриц в рамках вычисления \mathbf{T}^{-1} можно выполнить рекурсивно используя формулу Фробениуса (86). С учётом симметричности

матриц \mathbf{t}_{00} и \mathbf{G} , сложность вычисления обращения матриц \mathbf{t}_{00}^{-1} и \mathbf{G}^{-1} можно рассчитать по формуле [59]:

$$Z_{INVCONJ}(N) = (2N^3 - 2N^2 + N)_{MULT} + (2N^3 - 4N^2 + 2N)_{ADD}. \quad (87)$$

В случае, если размерность матриц \mathbf{t}_{00} и \mathbf{G} равна 2×2 , то сложность вычисления обращения матриц \mathbf{t}_{00}^{-1} и \mathbf{G}^{-1} одинакова и будет равна:

$$Z_{INVCONJ}(2) = (2(2)^3 - 2(2)^2 + (2))_{MULT} + (2(2)^3 - 4(2)^2 + 2(2))_{ADD} = 14. \quad (88)$$

Теперь рассмотрим операцию умножения матрицы \mathbf{T}^{-1} на результирующий вектор $\mathbf{v} = \mathbf{H}^H \mathbf{y}$. Подробно операция выглядит следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{00} & \mathbf{t}_{01} \\ \mathbf{t}_{10} & \mathbf{t}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix}, \quad (89)$$

при этом:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{t}_{00} \mathbf{q}_1 + \mathbf{t}_{01} \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{t}_{10} \mathbf{q}_1 + \mathbf{t}_{11} \mathbf{q}_2 \end{aligned} \quad (90)$$

Так как в результате вычисления \mathbf{T}^{-1} получается эрмитова матрица, что означает, что элементы главной диагонали – действительные числа, то, учитывая этот факт, для вычисления вектора, получаемого в результате умножения матрицы \mathbf{T}^{-1} на результирующий вектор \mathbf{v} , необходимо будет умножить N элементов главной диагонали матрицы \mathbf{T}^{-1} на элементы вектора \mathbf{v} , как видно из формулы (90), что потребует $2N$ умножений над действительными числами. Кроме того, для вычисления одного элемента вектора также потребуется выполнить $(N-1)$ умножений над комплексными числами, или $4(N-1)$ умножений и $2(N-1)$ сложений над действительными числами. Так как общее количество элементов результирующего вектора равно N , то сложность данной операции может быть рассчитана как:

$$\begin{aligned} Z_{TRMATVECCONJ}(N) &= (2N + 4N(N-1))_{MULT} + (2(2N(N-1)))_{ADD} = \\ &= (4N^2 - 2N)_{MULT} + (4N^2 - 4N)_{ADD} \end{aligned} \quad (91)$$