

**Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«МОСКОВСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ»**

На правах рукописи

СТЕПАНОВА АНАСТАСИЯ ГЕОРГИЕВНА

**ИССЛЕДОВАНИЕ И РАЗРАБОТКА ИТЕРАЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ
ДЕМОДУЛЯЦИИ В СИСТЕМАХ БЕСПРОВОДНОЙ СВЯЗИ,
ИСПОЛЬЗУЮЩИХ ТЕХНОЛОГИЮ ММО С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ
АНТЕНН**

Специальность 2.2.15 - Системы, сети и устройства телекоммуникаций

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель -
к.т.н., доц. Панкратов Д.Ю.

Москва - 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1. ИЗВЕСТНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЕМОДУЛЯЦИИ В СИСТЕМАХ МІМО..	16
1.1. Основы технологии МІМО и Massive МІМО (режимы, конфигурации).....	16
1.2. Применение технологии МІМО и Massive МІМО в системах беспроводной связи для разных стандартов и конфигураций	18
1.3. Структура и математическое описание системы Massive МІМО.....	23
1.3.1. Алгоритм ML	26
1.3.2. Декоррелятор	27
1.3.3. Алгоритм MMSE.....	28
1.3.4. Алгоритм K-best.....	29
1.4. Анализ помехоустойчивости известных алгоритмов демодуляции..	31
1.5. Выводы к разделу 1.....	41
2. ПРЕДЛАГАЕМЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ ДЕМОДУЛЯТОРЫ ДЛЯ СИСТЕМ МІМО С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ АНТЕНН	43
2.1. Предлагаемый нелинейный итерационный демодулятор типа Чебышева.	45
2.1.1. Нелинейный итерационный алгоритм типа Чебышева с точными собственными значениями матрицы канала.....	45
2.1.2. Нелинейный итерационный алгоритм типа Чебышева с оценками собственных значений матрицы канала	49

2.2.	Исследование помехоустойчивости предлагаемых итерационных алгоритмов демодуляции для различных видов модуляции	50
2.3.	Сходимость алгоритмов типа Чебышева.....	54
2.4.	Выводы к раздлу 2	58
3.	НЕЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ ДЕМОДУЛЯЦИИ С НЕГАУССОВСКОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ АПРИОРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.....	60
3.1.	Постановка задачи и модель системы.....	60
3.2.	Получение MMSE и MAP оценок при гауссовской аппроксимации	62
3.3.	Синтез нелинейных методов демодуляции.....	67
3.3.1.	Применение негауссовской аппроксимации для получения оценок	67
3.3.2.	Нелинейное МСКО оценивание с применением метода Монте-Карло.....	73
3.3.3.	Применение итерационных методов при нелинейной демодуляции	80
3.4.	Сравнение характеристик помехоустойчивости алгоритмов демодуляции с нелинейным оцениванием символов.....	84
3.5.	Выводы к разделу 3.....	100
4.	АНАЛИЗ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ И ПРАКТИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗУЕМОСТИ АЛГОРИТМОВ ДЕМОДУЛЯЦИИ ДЛЯ СИСТЕМ MASSIVE MIMO	102
4.1.	Вычислительная сложность алгоритмов демодуляции	102
4.2.	Вычислительная сложность известных алгоритмов демодуляции..	104
4.2.1.	Вычислительная сложность алгоритма максимального правдоподобия (ML).....	104
4.2.2.	Вычислительная сложность алгоритма ZF	110
4.2.3.	Вычислительная сложность алгоритма MMSE	114

4.2.4. Вычислительная сложность линейного итерационного алгоритма типа Чебышева.....	115
4.2.5. Вычислительная сложность алгоритма K-best	119
4.3. Анализ вычислительной сложности разработанных итерационных алгоритмов демодуляции для систем Massive MIMO.....	120
4.3.1. Нелинейный итерационный демодулятор типа Чебышева.....	120
4.3.2. Вычислительная сложность алгоритма на основе метода Ньютона	122
4.3.3. Вычислительная сложность алгоритма модифицированного метода Ньютона	127
4.3.4. Оценка возможности практической реализации разработанного нелинейного алгоритма в системах беспроводной связи.....	130
4.4. Выводы к разделу 4.....	139
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	140
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ.....	142
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	144
Приложение 1. Акты о внедрении и использовании результатов диссертационной работы	161

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования.

Для решения важных задач экономики и социальной сферы требуется разработка современной высокоскоростной инфраструктуры хранения, обработки и передачи информации [1-8]. Нарастающие темпы развития телекоммуникаций и ощутимые изменения потребностей и ожиданий абонентов сетей беспроводной связи ставят сложные задачи комплексной передачи, обработки данных в условиях жесткого ограничения временных, энергетических и частотных ресурсов [6-17].

Для увеличения пропускной способности в системах беспроводной связи 5-го и 6-го поколений (5G и 6G) используется технология с большим числом передающих и приемных антенн (Multiple Input Multiple Output, MIMO) [18, 19]. Эта технология, в которой используются несколько десятков антенн, также известна как Massive MIMO. Однако с увеличением числа антенн происходит существенное повышение сложности алгоритмов демодуляции. Таким образом, разработка эффективных демодуляторов обладающих сравнительно низкой сложностью реализации является актуальной проблемой [7, 14-27].

Технология Massive MIMO позволяет повысить как спектральную, так и энергетическую эффективность беспроводных систем связи, однако для практической реализации нужны высокоэффективные алгоритмы цифровой обработки сигналов, которые не требуют применения дополнительных ресурсов. Следует отметить, что стандартами регламентируется только передающая сторона систем радиосвязи, разработка приемников остается на усмотрение разработчиков и производителей оборудования [18, 28-33]. В условиях жесткой конкуренции на рынке услуг связи, а также в условиях импортозамещения оборудования интерес к дешевым эффективным и простым демодуляторам резко возрастает [34].

Несмотря на то, что в настоящее время уже существует множество алгоритмов, и современные цифровые сигнальные процессоры позволяют реализовать сложные алгоритмы цифровой обработки сигналов для систем с большим числом антенн все еще остается актуальной задачей синтеза алгоритма, обладающего приемлемой вычислительной сложностью и хорошими характеристиками помехоустойчивости.

Демодулятор максимального правдоподобия (Maximum Likelihood, ML), невзирая на отличные характеристики помехоустойчивости, из-за чрезмерной вычислительной сложности использовать в системах Massive MIMO нецелесообразно. Алгоритм оптимальный по критерию максимального правдоподобия реализуем только для небольшого числа антенн и небольшой кратности модуляции [5, 35, 36, 37, 38, 39, 40]. Линейные демодуляторы относительно просты и являются альтернативными решениями, но они значительно уступают в помехоустойчивости демодулятору ML.

Актуальной задачей является разработка алгоритмов демодуляции, имеющих помехоустойчивость более высокую, чем у лучшего линейного алгоритма – оптимального по критерию минимума среднеквадратической ошибки (Minimum Mean Square Error, MMSE) демодулятора – и имеющих такой же порядок сложности [5, 37, 38, 41, 42]. Для повышения помехоустойчивости линейных демодуляторов при синтезе алгоритмов демодуляции необходимо учитывать доступную априорную информацию о передаваемых сигналах [26, 38, 43, 44, 45].

На пути к массовому внедрению технологии Massive MIMO имеется немало трудностей, в частности, проблема синтеза высокоэффективных и обладающих приемлемой вычислительной сложностью алгоритмов цифровой обработки сигналов [46-50]. Разработка алгоритмов демодуляции с приемлемой вычислительной сложностью, которые учитывают априорную информацию о множестве информационных символов и имеют помехоустойчивость, близкую к помехоустойчивости демодулятора ML, на сегодняшний день является одной из приоритетных задач современной беспроводной связи [18, 50-53].

Степень разработанности темы.

За несколько десятилетий развития теории систем ММО подробно рассматривались вопросы пропускной способности систем ММО, построения сетей ММО, вопросы влияния помех, а также методы демодуляции с учетом разного числа активных пользователей и числа антенн на стороне базовой станции [18, 46, 47, 48, 54- 58].

Огромный вклад в область исследования, разработки и развития технологии ММО, повышения эффективности и снижения вычислительной сложности алгоритмов многопользовательского приема и цифровой обработки сигналов внесли российские ученые, в том числе: Аджемов А.С., Афанасьев В.П., Бакулин М.Г., Быховский М.А., Волчков В.П., Джиган В.И., Крейнделин В.Б., Пестряков А.В., Флакман А.Г., Хоров Е.М., Шинаков Ю.С., Шлома А.М. и другие. Также эта тематика находится в центре научных интересов зарубежных специалистов, и получила свое отражение в трудах многих исследователей: Foschini G.J., Gans M.J., Alex Grant, Huang G., Leibo Liu, Guiqiang Peng, Poor H.V., Gregory Raleigh, Cristian Schlegel, Telatar E., Verdu S., Wang X. [54, 59-60].

Тем не менее, технология Massive ММО, которая является современной технологией для коммуникационных приложений, давшая толчок перспективному развитию систем беспроводной связи (5G и 6G) из-за увеличения размерности ММО все еще связана с серьезной проблемой высокой вычислительной сложности алгоритмов демодуляции сигналов. В таких системах базовая станция оснащается сотнями антенн, обслуживающих десятки абонентов в одной полосе частот [18].

По сравнению с обычной системой ММО в Massive ММО, с одной стороны, отмечается существенное преимущество в способности обеспечить более высокий выигрыш от мультиплексирования и разнесения, а с другой стороны, происходит усложнение процесса демодуляции сигналов. Поэтому исследования в области разработки демодуляторов с низкой сложностью и хорошим качеством по помехоустойчивости требуют особого внимания и представляют огромный интерес в настоящее время.

Последние научные исследования раскрывают еще одну проблему современных алгоритмов демодуляции в восходящей линии связи, заключающуюся в ограничении эксплуатационной пригодности алгоритма только в условиях, когда суммарное число передающих антенн абонентских станций намного меньше числа приемных антенн на базовой станции, а это означает сокращение числа возможных пользователей и приводит к значительному снижению эффективности использования ресурсов. Также было доказано, что задача демодуляции в системах Massive MIMO имеет вычислительную сложность, возрастающую с увеличением числа антенн, которая быстро становится чрезмерной, что создает серьезные трудности на пути к использованию на практике.

Цель работы.

Целью работы является разработка итерационных алгоритмов демодуляции в системах беспроводной связи, использующих технологию MIMO с большим числом антенн, вычислительная сложность которых имеет тот же порядок, что и у алгоритма MMSE, при этом характеристики помехоустойчивости лучше, чем у алгоритма MMSE.

В диссертации исследуется демодуляция сигналов в системах Massive MIMO с применением различных порядков квадратурной амплитудной модуляции (Quadrature Amplitude Modulation, QAM), в том числе очень высокого порядка.

Решаемые задачи.

Для достижения поставленной цели в настоящей работе решаются следующие задачи.

1. Анализ характеристик помехоустойчивости и вычислительной сложности известных алгоритмов демодуляции систем MIMO при использовании QAM-модуляции различных порядков. Выбор наиболее перспективного для исследования итерационного метода, имеющего лучшую скорость сходимости и удобную реализацию на практике.

2. Разработка нелинейного итерационного алгоритма демодуляции для систем Massive MIMO, обладающего преимуществом перед алгоритмом MMSE в помехоустойчивости и сложности. Проверка эффективности нового алгоритма при разных порядках QAM-модуляции.
3. Проверка возможности использования негауссовской аппроксимации априорного распределения для улучшения характеристик помехоустойчивости алгоритмов демодуляции в системах Massive MIMO с высоким порядком модуляции без необходимости перебора комбинаций информационных символов.
4. Оценка возможности практической реализации новых алгоритмов демодуляции в системах Massive MIMO с различной кратностью модуляции. Выявление преимуществ использования новых алгоритмов демодуляции в системах Massive MIMO как по сложности, так и по эффективности.

Научная новизна.

1. Разработан нелинейный итерационный алгоритм демодуляции для систем MIMO с большим числом антенн на основе метода Чебышева с оценками собственных значений, характеристики помехоустойчивости которого лучше, чем у алгоритма MMSE при том же порядке вычислительной сложности.
2. Впервые для демодуляции в системах Massive MIMO предложено использование семейства распределений с негауссовской аппроксимацией априорного распределения информационных символов, в котором гауссовское распределение и равномерное распределение являются крайними частными случаями. Использование этого семейства распределений позволяет синтезировать нелинейные алгоритмы демодуляции с характеристиками помехоустойчивости лучшими, чем у алгоритма MMSE, при сохранении такого же порядка сложности.
3. Разработан новый алгоритм демодуляции для систем Massive MIMO с высокой кратностью QAM модуляции с применением негауссовской

аппроксимации априорного распределения передаваемых информационных символов и модифицированного метода Ньютона, обладающий лучшими характеристиками помехоустойчивости по сравнению с алгоритмом MMSE при том же порядке сложности.

Теоретическая и практическая значимость работы.

1. Показана эффективность учета априорной информации о передаваемом сигнале в виде нелинейной функции в алгоритмах демодуляции для систем Massive MIMO на основе метода Чебышева.
2. Доказано, что при использовании предложенной негауссовской аппроксимации априорного распределения в виде семейства распределений, в котором гауссовское распределение и равномерное распределение являются крайними частными случаями, вычисление оценок максимума апостериорной плотности вероятности (Maximum A posterior Probability, MAP) сводится к системе нелинейных (степенных) уравнений, которая может быть решена с помощью методов, имеющих полиномиальную сложность.
3. Установлено, что использование новой негауссовской аппроксимации априорного распределения в системах Massive MIMO с высоким порядком модуляции позволяет получить алгоритмы демодуляции без необходимости перебора комбинаций информационных символов с более высокой помехоустойчивостью, чем у алгоритма MMSE.
4. Разработан новый нелинейный итерационный алгоритм демодуляции на основе метода Чебышева с оценками собственных значений для систем беспроводной связи, использующих технологию MIMO с большим числом антенн, который обладает лучшими характеристиками помехоустойчивости и обеспечивает энергетический выигрыш порядка 1,5 – 2,3 дБ при меньшей или примерно той же сложности, что и алгоритм MMSE.
5. На основе предложенной негауссовской аппроксимации априорного распределения с использованием модифицированного метода Ньютона

разработан новый алгоритм демодуляции, характеристики помехоустойчивости которого улучшаются при увеличении числа антенн и кратности модуляции при сохранении приемлемой вычислительной сложности (порядок сложности алгоритма MMSE), что позволяет использовать его в системах Massive MIMO.

Использование и внедрение результатов работы.

Результаты диссертационной работы использованы при разработке алгоритмов демодуляции в системах MIMO с большим числом антенн.

Практическую ценность полученных результатов подтверждают копии актов о внедрении и использовании результатов работы (Приложение 1).

Методы исследований.

Основные результаты были получены на базе использования методов статистической радиотехники [61, 62, 63, 64, 65], теории связи [10, 11, 13, 37, 39, 66], теории численных методов [67, 68, 69, 70, 71, 72], теории вероятностей и математической статистики [73, 74, 75, 76, 77, 78, 79], теории вычислительной сложности алгоритмов и имитационного компьютерного моделирования [42, 80-84].

Для исследования в работе используется следующий математический аппарат: теория оценивания [39, 44], теория связи [10, 11, 13, 66], теория оптимизации [39, 40], теория численных методов [67-72], линейная алгебра и теория матриц [85-92], теория вероятностей и математическая статистика [64, 74-79], теория статистического синтеза [61, 65, 76] и теория вычислительной сложности алгоритмов [21-24, 42].

Объект исследования.

Развитие систем современной связи идёт по пути увеличения числа приемных и передающих антенн, так как это отвечает требованиям увеличения пропускной способности, числа абонентов и спектральной эффективности. Поэтому областью исследования являются многопользовательские системы связи

с большим числом передающих и приемных антенн. Число передающих антенн представляет собой суммарное число антенн всех абонентов.

В диссертационной работе рассматривается восходящая линия системы Massive MIMO (от абонентов к базовой станции). Алгоритмы обработки сигналов в таких системах требуют больших вычислительных ресурсов, которые могут быть использованы только на базовой станции. При большом числе передающих антенн проблема сложности эффективных алгоритмов демодуляции выходит на первый план.

Объект исследования диссертационной работы – это блок оценивания QAM символов (демодулятор Massive MIMO). В блоке MIMO-демодуляции осуществляется одновременное оценивание принятых от всех пользователей QAM-символов. После этого происходит группировка полученных оценок по абонентам для дальнейшей QAM-демодуляции с получением потоков кодированных битов и окончательного их декодирования. Различные пространственно мультиплексируемые потоки различных абонентов обрабатываются одним потоком на базовой станции.

Предметом исследования являются алгоритмы демодуляции для систем MIMO с большим числом антенн.

Методология исследования.

Полный натурный эксперимент для сложных систем связи является очень дорогим, трудоемким и требующим много времени, поэтому в диссертации использовалось математическое имитационное моделирование. В качестве метода изучения научной проблемы для получения исчерпывающей информации о предмете исследования использовались методы статистики и теории вероятностей, методы стохастического моделирования. Исследование алгоритмов демодуляции в системе MIMO проводилось на персональном компьютере при помощи имитационных математических моделей.

Результатом вычислительных экспериментов являлись характеристики помехоустойчивости различных алгоритмов демодуляции при переменных, контролируемых, специально заданных условиях работы.

Для городских условий работы сотовых систем связи наиболее характерным является случайный канал с релеевскими замираниями амплитуды сигналов. Моделирование известных и разрабатываемых алгоритмов демодуляции систем Massive MIMO было проведено для релеевского MIMO-канала.

Положения, выносимые на защиту.

1. Предложен новый нелинейный итерационный алгоритм типа Чебышева, позволяющий получить выигрыш в помехоустойчивости порядка 2,3 дБ на уровне $FER = 0,01$ по сравнению с алгоритмом MMSE при том же порядке сложности в системе MIMO с конфигурацией 64×64 и модуляцией 16QAM.
2. Доказано, что использование новой негауссовской аппроксимации априорного распределения в системах Massive MIMO с высоким порядком модуляции позволяет синтезировать алгоритмы демодуляции, обеспечивающие выигрыш в помехоустойчивости порядка 1-6 дБ по сравнению с алгоритмом MMSE без увеличения порядка сложности.
3. Установлено, что использование предложенной негауссовской аппроксимации априорного распределения совместно с модифицированным методом Ньютона для систем Massive MIMO с кратностью модуляции 256QAM и выше, позволяет обеспечить выигрыш в помехоустойчивости примерно 6 дБ при увеличении сложности обработки на 17% (в 1,17 раза) по сравнению с алгоритмом MMSE.

Личный вклад автора.

Личный вклад автора заключается в разработке алгоритмов демодуляции, анализе их эффективности и вычислительной сложности, обобщении полученных результатов и формулировке выводов. Результаты диссертационной работы получены автором самостоятельно, из публикаций с соавторами в диссертацию включены только личные результаты автора.

Степень достоверности и апробация результатов.

Основные результаты диссертационной работы обсуждались и получили одобрение на следующих научных конференциях: Международная научно-техническая конференция «Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения» (INTERMATIC), 2017г., 2018г.; Международная научно-техническая конференция «Телекоммуникационные и вычислительные системы – 2018», 1-я и 2-я Всероссийская конференция «Современные технологии обработки сигналов» 2018г., 2019г.; Международная отраслевая научно-техническая конференция «Технологии информационного общества» 2018г., 2019г.; Международная конференция «Радиоэлектронные устройства и системы для инфокоммуникационных технологий - РЭУС-2020»; «24th Conference of Open Innovations Association (FRUCT)» 2019г.; Proceedings of the International Conference «Technology & Entrepreneurship in Digital Society (TEDS)» 2019г.; Международная конференция «Волновая электроника и ее применение в информационных и телекоммуникационных системах» («Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems, WECONF») 2018г., 2021г.; «Systems of Signal Synchronization Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO)» 2020г.; Международная научно-техническая конференция «Systems of signals generating and processing in the field of on board communications», 2022 г.

Публикации.

Основные положения диссертации опубликованы в ведущих рецензируемых научно-технических журналах: во входящих в Перечень ВАК Минобрнауки России 4 работы (Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт, Информационные процессы), индексируемых в международной базе данных Scopus 9 работ (Journal of Communications Technology and Electronics, Telecommunications and Radio Engineering), в материалах международных конференций 14 работ, из них: 5 индексируемых в Scopus («24th Conference of Open Innovations Association (FRUCT)», «International Conference Technology & Entrepreneurship in Digital Society (TEDS)», «Wave Electronics and its Application in

Information and Telecommunication Systems (WECONF)», «Systems of Signal Synchronization Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO)»), в изданиях, индексируемых в международной базе данных Web of Science 6 работ (Journal of Communications Technology and Electronics). Выпущено учебно-методическое пособие «Моделирование системы радиосвязи с разным числом передающих антенн».

Всего опубликовано 25 работ.

Соответствие паспорту специальности.

Результаты исследования соответствуют паспорту научной специальности

2.2.15 «Системы, сети и устройства телекоммуникаций» в части пункта 15:

- Исследование и разработка новых сигналов, а также соответствующих модемов, кодеков, мультиплексоров и селекторов, обеспечивающих высокую надежность и качество обмена информацией в условиях воздействия внешних и внутренних помех.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы, 1 приложения. Общий объем диссертации составляет 163 страницы. Материал диссертации иллюстрируется 43 рисунками и 17 таблицами. Список литературы содержит 153 наименования.

1. ИЗВЕСТНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЕМОДУЛЯЦИИ В СИСТЕМАХ MIMO

1.1. Основы технологии MIMO и Massive MIMO (режимы, конфигурации)

Весьма привлекательным с экономической точки зрения является путь повышения спектральной эффективности за счет технологии Massive MIMO [18]. На базовых станциях в системе Massive MIMO размещается от десятков до сотен антенн, что на один или два порядка больше, чем в обычной системе MIMO. Все эти антенны обслуживают одновременно множество пользователей (абонентских станций) на одном и том же частотно-временном ресурсе.

В Massive MIMO на приемной и передающей стороне применяются многоэлементные антенные решетки, чтобы сосредотачивать энергию в нужных направлениях и соответствующим образом формировать диаграмму направленности (либо для формирования нескольких пространственных потоков данных). Все это позволяет, как уменьшить вероятность ошибки (повысить помехоустойчивость), так и увеличить скорость передачи информации, кроме того, расширить зону покрытия и повысить энергоэффективность [5, 18, 28].

В многоантенных системах применяются следующие режимы: однопользовательский (SU-MIMO, Single User MIMO), многопользовательский (MU-MIMO, Multi-User MIMO), направленной передачи (Beamforming), мультиплексирования в пространственной области (SM, Spatial Multiplexing), прекодирования (Precoding) и пространственно-временного кодирования (STC, Space-Time Coding). Кратко скажем о них.

Передача в режиме SU-MIMO осуществляется с использованием частотно-временных ресурсов, предназначенных для одного абонента, при этом обеспечивается максимальная спектральная эффективность для данного

пользователя. Все передаваемые пространственно-временные потоки в режиме SU-MIMO предназначены для приема одной абонентской станцией или единицей абонетского оборудования (UE, User Equipment).

Системы MIMO, в которых базовая станция взаимодействует с несколькими станциями UE, называются многопользовательские (MU-MIMO — Multiuser MIMO). В режиме MU-MIMO несколько пользователей одновременно используют один частотно-временной ресурс с помощью разнесения в пространственной области. Технология MU-MIMO обеспечивает высокую пропускную способность в областях с интенсивным трафиком данных [18, 29].

В режиме MU-MIMO абонентские станции могут работать как с одной базовой станцией, так и с несколькими в соседних сотах (Multicell Multiuser MIMO), а также могут иметь одну или несколько антенн. Это применяется во многих стандартах систем беспроводной связи, например LTE-Advanced (Long Term Evolution – Advanced, LTE-A) [5, 18, 93, 94, 95].

Для технологии Beamforming характерно то, что в блоке Beamformer (на передающей стороне) информация о канале MIMO используется для генерации формирующей матрицы, которая улучшает качество приема с помощью блока обработки Beamformee (на приемной стороне). Эта технология применяется в режимах SU-MIMO и MU-MIMO. В многопользовательском режиме несколько пространственно-временных потоков поступают от нескольких станций одновременно по одному и тому же частотному ресурсу с использованием пространственного мультиплексирования через несколько антенн на передаче и приеме [18].

Режимы SU-MIMO, MU-MIMO и Multicell MIMO для линии связи от базовой станции к станциям UE схематично представлены на Рисунке 1.1.

Эволюция систем MIMO в сторону Massive MIMO происходила постепенно. Хотя использование как можно большего числа антенн является отличным решением для значительного увеличения пропускной способности систем MIMO, проблема демодуляции при этом становится еще более сложной и важной.

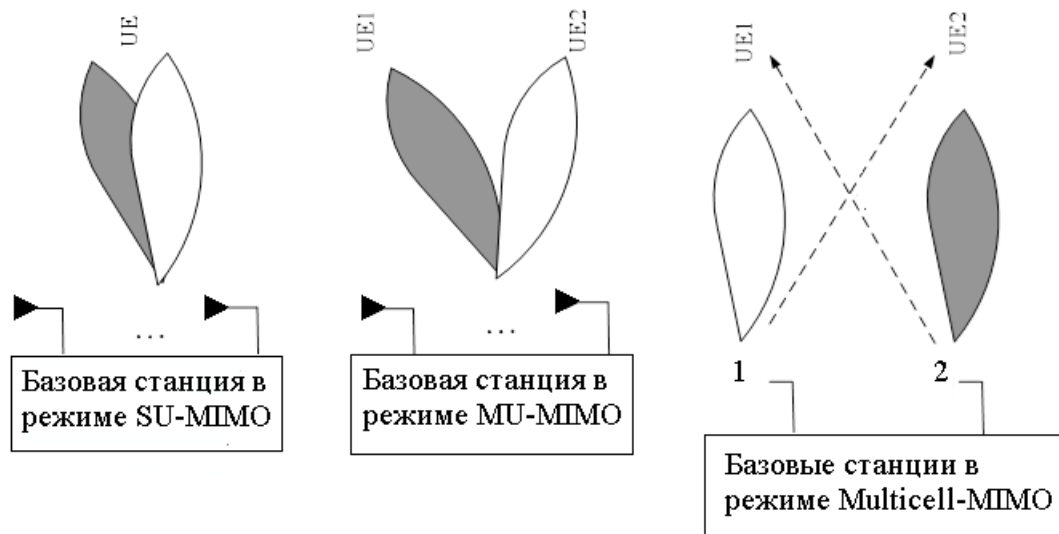


Рисунок 1.1 – Режимы технологии MIMO (SU, MU, Multicell)

Динамично развивающаяся отрасль систем беспроводной связи, не смотря на последние достижения, испытывает серьезную потребность в алгоритмах, которые могут обеспечить благоприятный компромисс между эффективностью и сложностью демодуляции.

1.2. Применение технологии MIMO и Massive MIMO в системах беспроводной связи для разных стандартов и конфигураций

Примерами использования технологии MIMO [5, 12, 25, 29], являются беспроводные системы передачи данных стандартов IEEE (Institute of Electrical & Electronics Engineers)[5, 94, 95, 96, 97] системы радиодоступа (WiFi, Wireless Fidelity, Беспроводные локальные компьютерные сети). Системы беспроводной передачи данных Wi-Fi развиваются в течение нескольких десятилетий, как в локальных масштабах, так и в масштабах города, с четко выраженной динамикой роста числа антенн. Системы сотовой подвижной связи 3GPP (Third Generation Partnership Project) развиваются в том же направлении, но с некоторым отставанием по внедряемым технологиям. В LTE-A (Long Term Evolution –

Advanced) в релизе 11 [18, 93] появляется возможность передавать до 8 пространственных потоков за счет использования 8 антенн, в релизе 15 предусмотрена возможность использования до 32 антенн, а в релизе 16 – до 64 антенн [18, 93, 98, 99, 100, 101].

Рассмотрим структурную схему системы MIMO стандарта высокоскоростных локальных беспроводных сетей WiFi 802.11n (WiFi 4) [18, 94]. Этот стандарт был утвержден Советом по стандартам IEEE в сентябре 2009 года и опубликован в октябре этого же года, в нем применяется технология MIMO с целью повышения скорости передачи данных. В этом стандарте на основе ортогонального мультиплексирования с частотным уплотнением (Orthogonal Frequency Division Multiplexing, OFDM) появилась возможность использовать вместо одного до четырех пространственных потоков для ширины полосы частот 40 МГц. Это все способно обеспечивать скорость передачи данных до 600 Мбит/с.

Структурная схема передающей части системы WiFi (стандарт 802.11n), использующей технологию MIMO, для случая одного пространственного потока с M передающими антеннами приведена на Рисунке 1.2. Следует отметить, что похожие блоки используются и в других стандартах WiFi. Кратко поясним функции основных блоков схемы [94].

Входной поток данных поступает на скремблер, где данные скремблируются, для придания определенных статистических свойств цифровому потоку, например, чтобы появление единиц и нулей в последовательности было равновероятным [10, 13]. Для обнаружения и исправления ошибок помехоустойчивый кодер кодирует данные для исправления ошибок на приемной стороне.

Перемежитель осуществляет перемешивание битов каждого пространственного потока, т.е. изменяет порядок битов, чтобы предотвратить поступление длинных последовательностей битов в декодер для борьбы с пакетированием ошибок. Перемешивает биты для борьбы с ошибками (может использоваться в составе помехоустойчивого кодера) [10, 13]. Согласно стандарту

802.11n последовательность битов, поступающих на вход перемежителя, называется пространственным потоком.

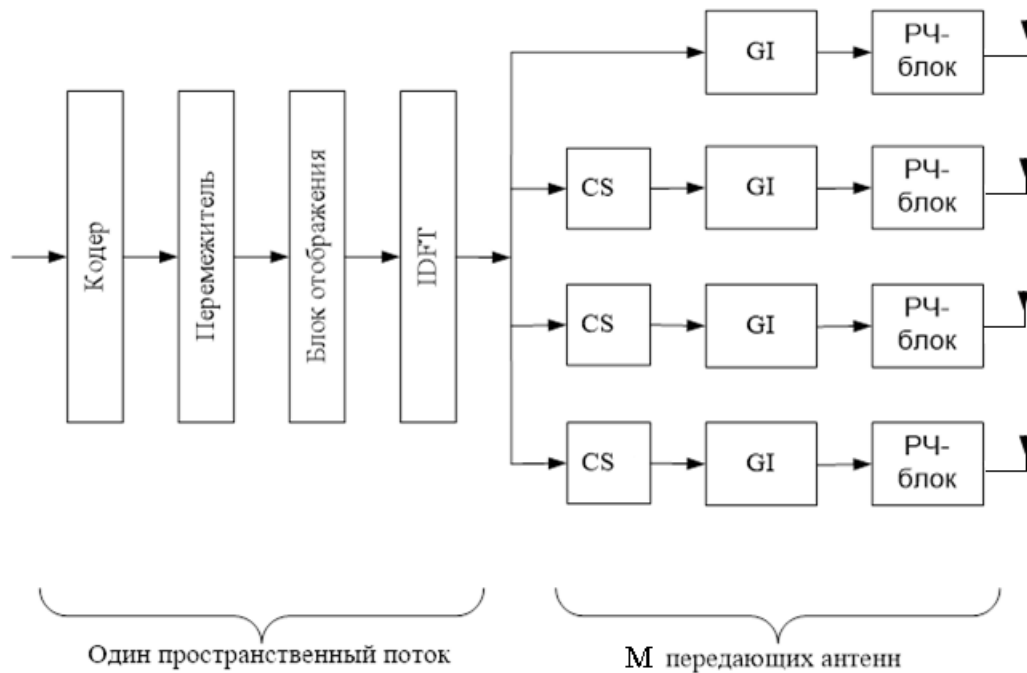


Рисунок 1.2 – Упрощенная структурная схема передающей стороны системы MIMO (стандарт 802.11n)

В блоке отображения согласно используемому виду модуляции последовательность битов потока отображается в информационные символы [18]. В блоке IDFT осуществляется обратное дискретное преобразование Фурье [18]. В блоке CS (Cyclic Shift) для борьбы с излучениями в нежелательных направлениях добавляются циклические сдвиги. При этом существует как циклический сдвиг на РЧ-цепь, так циклический сдвиг на пространственный поток. Значения циклических сдвигов указаны в соответствующих таблицах стандарта 802.11n. Блок добавления защитного интервала (Guard Interval, GI) добавляет к символу часть этого же символа для борьбы с межсимвольными искажениями из-за многолучевости [18].

В стандарте 802.11ac уровня системы WiFi 5 (примерно соответствует системам 4G, Fourth Generation) произошло увеличение порядка модуляции и числа пространственных потоков с поддержкой до 8 антенн.

В стандарте 802.11ax, который примерно соответствует системам 5G, появляются дополнительные улучшения [96]. Число абонентов, поддерживаемых в режиме MU-MIMO, увеличивается до 8. В режиме MU-MIMO каждый абонент может использовать до 4 пространственных потоков с общим числом пространственно-временных потоков не более 8. Обеспечивается поддержка множественного доступа с ортогональным частотным разделением (Orthogonal Frequency-Division Multiple Access, OFDMA) как для нисходящей, так и для восходящей линии [18].

Отображение данных в информационные символы осуществляется с использованием следующих видов модуляции: двоичная (Binary Phase Shift Keying, BPSK) и квадратурная (QPSK) фазовая модуляция, квадратурная амплитудная модуляция (QAM) кратности 16, 64, 256 и 1024. Модуляция 1024-QAM появляется уже в стандарте 802.11ax, а 256-QAM в стандарте 802.11ac [18]. Для помехоустойчивого кодирования используется кодирование со скоростями $1/2$, $2/3$, $3/4$ и $5/6$ [94, 95].

Структурная схема передающей стороны для случая нескольких пространственных потоков и нескольких РЧ-цепей с применением кодирования LDPC подобна схеме передающей стороны стандарта 802.11n с небольшими отличиями (дублирование соответствующих блоков для нескольких потоков и добавление блоков LDPC-кодирования) [18, 94, 96].

Технология MIMO является одной из основных в стандартах IEEE 802.16e/m и 3GPP LTE/LTE-A и используется как в режиме SU-MIMO, так и в режиме MU-MIMO.

Стандарты IEEE 802.16e и стандарты 3GPP LTE (релизы 8 и 9) разрабатывались в рамках требований Международного союза электросвязи (ИМТ-2000) для систем 3-го поколения (3G, Third Generation) [30]. Стандарты IEEE 802.16m и 3GPP LTE-A (релиз 10 и следующие релизы) [3, 102] разрабатывались в рамках требований ИМТ-Advanced для систем 4-го поколения, которые были сформулированы организацией ITU (International Telecommunication Union) [2, 3, 102].

При анализе упомянутых ранее стандартов ярко выражена тенденция быстрого развития технологии MIMO, тенденция увеличения количества антенных элементов и усложнения алгоритмов обработки как при переходе с 3G на 4G, так и при переходе на последующие поколения (5G и дальше) [3, 103-105].

Таким образом, развитие беспроводной и мобильной связи происходит в сторону усложнения систем MIMO, за счет увеличения числа антенн и кратности модуляции информационных символов, что отражено в таблице 1.1 и таблице 1.2.

Таблица 1.1. Тенденции усложнения технологии MIMO в стандартах беспроводной связи [18].

Стандарт	Максимальное число потоков, антенн и абонентских станций	Модуляция
802.11n Wi-Fi 4	Возможность использования до 4 пространственных потоков с помощью 4 антенн	BPSK QPSK 16-QAM 64-QAM
802.11ac Wi-Fi 5	Возможность использования до 8 пространственных потоков с помощью 8 антенн (поддержка до 4 станций UE в режиме MU-MIMO)	Плюс 256-QAM
802.11ax Wi-Fi 6	Возможность использования до до 8 пространственных потоков, (поддержка до 8 станций UE в режиме MU-MIMO)	Плюс 1024-QAM
IEEE 802.11be Wi-Fi 7	Планируется использовать до 16 пространственных потоков, до 16 антенн на базовой станции и пространственное мультиплексирование до 16 станций UE в нисходящем и восходящем направлениях	Плюс 4096-QAM

Таблица 1.2. Тенденции усложнения технологии MIMO в стандартах мобильной связи [18].

Стандарт	Конфигурация MIMO	Модуляция
IEEE 802.16e (3G)	Конфигурация с 4 антеннами на передающей стороне и 4 антеннами на приемной стороне, режим MU-MIMO на линии вверх	QPSK 16-QAM 64-QAM
3GPP LTE (релизы 8 и 9) (3G)	Конфигурация с 4 антеннами на передающей и 4 антеннами на приемной стороне, режим MU-MIMO на линии вниз	

Продолжение Таблицы 1.2

Стандарт	Конфигурация MIMO	Модуляция
IEEE 802.16m (4G)	Используются 2, 4 или 8 передающие антенны и минимум 2 приемные антенны в нисходящем направлении; в восходящем направлении используются 1, 2 или 4 передающие антенны и минимум 2 приемные антенны	QPSK 16-QAM 64-QAM
3GPP E-UTRA LTE-A (релиз 10 и следующие релизы) (4G)	Максимально поддерживается до 8 антенн, в нисходящем направлении используются 2, 4 или 8 передающие антенны и минимум 2 приемные антенны; в восходящем направлении используется 1, 2 или 4 передающие антенны и минимум 2 приемные антенны	
3GPP 5G (релизы 15 и 16) (NR)	Максимально поддерживается до 64 антенн в обоих направлениях	Плюс 1024-QAM

С появлением технологии Massive MIMO, одной из основных становится задача демодуляции сигналов. Далее рассмотрим математическую модель и известные демодуляторы для технологии Massive MIMO.

1.3. Структура и математическое описание системы Massive MIMO

На Рисунке 1.3 представлена структурная схема системы Massive MIMO для конфигурации $M \times N$ (M передающими и N приемных антенн) [20].

В общем случае имеется t , $t=1,2,\dots,t$ пользователей с m_l передающими антеннами (число антенн у пользователей может быть, как одинаковым, так и разным), общее число передающих антенн $M = \sum_{l=1}^t m_l$. Базовая станция имеет блок

демодулятора Massive MIMO с N приемными антеннами, причем $N \geq M$. В блоке MIMO демодуляции осуществляется одновременное оценивание принятых от всех пользователей QAM символов. После этого происходит группировка полученных оценок по абонентам для дальнейшей QAM-демодуляции с получением потоков кодированных битов и окончательного их декодирования.

Различные пространственно мультиплексируемые потоки различных абонентов обрабатываются одним потоком на базовой станции.

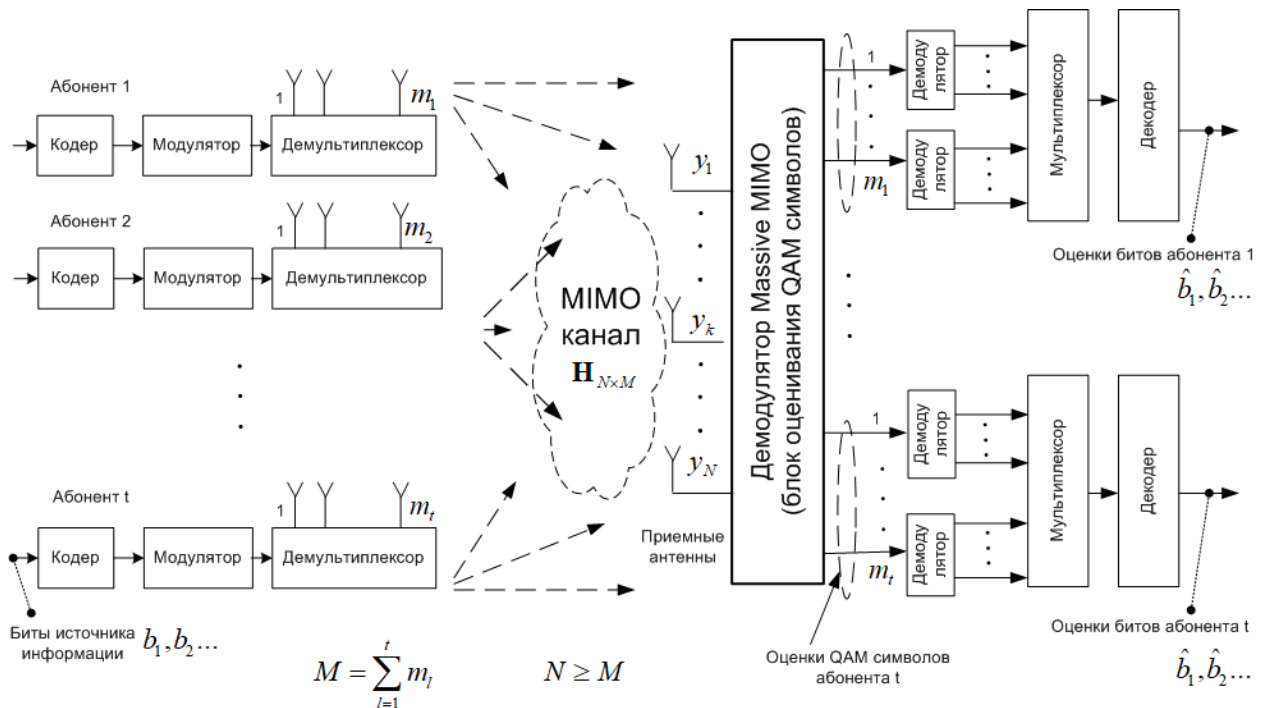


Рисунок 1.3 - Структурная схема системы Massive MIMO

Биты от источника информации (цифровой поток) поступают на демультиплексор и делятся на M потоков. В блоках модуляторов осуществляется модуляция подпотоков данных, и образуются информационные символы \mathbf{x} , которые передаются с помощью M антенн. После прохождения радиоканала прием сигналов осуществляется с помощью N приемных антенн и демодулятора Massive MIMO, в котором принимаемые сигналы обрабатываются совместно. На выходе демодулятора образуются оценки $\hat{\mathbf{x}}$, которые затем преобразуются в биты. Оценки битов поступают на мультиплексор, который формирует из них принятый цифровой поток данных [5, 29, 106].

Модель сигнала на входе демодулятора Massive MIMO, может быть записана в следующей форме [5, 11, 45]:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, \quad (1.1)$$

где \mathbf{y} – комплексный вектор принимаемых сигналов размерности $N \times 1$; \mathbf{H} – комплексная матрица радиоканала MIMO размерности $N \times M$; $\mathbf{x} \triangleq [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_M]^T$ – вектор переданных комплексных информационных символов размерности $M \times 1$;

$\boldsymbol{\eta}$ – комплексный гауссовский случайный вектор шума размерности $N \times 1$ с корреляционной матрицей $\mathbf{R}_\eta = D_\eta \mathbf{I}_N$; $D_\eta = 2\sigma_\eta^2 = E\{\eta_n \eta_n^*\}$ - дисперсия шума наблюдения (комплексного); $n = 1, \dots, N$; \mathbf{I}_N - единичная матрица. Компоненты h_{ij} матрицы \mathbf{H} радиоканала MIMO являются комплексными гауссовскими случайными величинами и представляют собой коэффициенты передачи от j -й передающей антенны к i -й приемной антенне [20, 36, 106].

Объект исследования настоящей работы — это блок оценивания QAM-символов в системах с MIMO-каналом (Демодулятор Massive MIMO), что соответствует пункту 15 паспорта специальности 2.2.15 «Системы, сети и устройства телекоммуникаций».

На Рисунке 1.4 изображена схема системы Massive MIMO, как иллюстрация интерпретации модели MU-MIMO восходящей линии, в которой имеется M абонентских станций ($A_1 \dots A_M$) с одной или двумя антеннами и базовая станция с суммарным числом антенн абонентов. Различные пространственно мультиплексируемые потоки различных абонентов обрабатываются одним потоком на базовой станции.

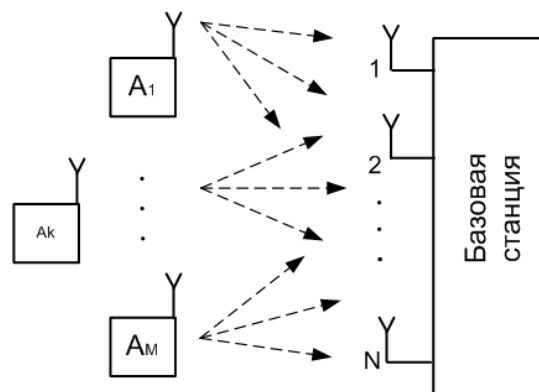


Рисунок 1.4 - Схема системы Massive MIMO на линии вверх в режиме MU-MIMO

При известных характеристиках шума и матрице канала в системах MIMO для демодуляции могут использоваться различные алгоритмы обработки сигналов, далее перечислим и рассмотрим основные из них [5, 6, 26, 31, 38, 40, 43, 45, 52, 53]:

- алгоритм, оптимальный по критерию максимального правдоподобия (Maximum Likelihood, ML);
- алгоритм «обнуления» (декоррелятор, Zero Forcing, ZF);
- алгоритм, оптимальный по критерию минимума среднеквадратической ошибки (Minimum Mean squared error, MMSE);
- алгоритм K-best.

1.3.1. Алгоритм ML

Задача демодуляции MIMO состоит в том, чтобы оценить переданный вектор \mathbf{x} , основываясь на знания вектора принятого сигнала \mathbf{y} и матрицы канала \mathbf{H} [36]. Согласно модели сигнала (1.1) функция правдоподобия имеет вид:

$$p(\mathbf{y} / \mathbf{x}) = \frac{1}{2^N \pi^N \sigma_\eta^{2N}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2}{2\sigma_\eta^2}\right), \quad (1.2)$$

где использовано обозначение $\|\cdot\|$ для Евклидовой нормы. Оптимальная по критерию максимального правдоподобия (МП) оценка имеет вид:

$$\hat{\mathbf{x}}^{ML} = \arg \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{S}} p(\mathbf{y} / \mathbf{x}), \quad (1.3)$$

где \mathbf{S} - дискретное множество значений вектора комплексных информационных символов. Путем некоторых преобразований, оценка оптимальная по критерию МП может быть записана в виде [3, 5, 6, 37, 39]:

$$\hat{\mathbf{x}}^{ML} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{S}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2, \quad (1.4)$$

где $\arg \min_z f(z)$ – функция выдающая значение аргумента z , при котором $f(z)$

достигает своего наименьшего значения; $norm^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})'(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) = \mathbf{r}'\mathbf{r}$

квадрат евклидовой нормы; $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}$ – невязка.

Оценка ML минимизирует квадрат нормы невязки, что соответствует нахождению максимума функции правдоподобия $p(\mathbf{y} | \mathbf{x})$ и наилучшему результату в помехоустойчивости. Поиск проводится по всем возможным состояниям, комбинациям, т.е. элементам множества \mathbf{S} вектора \mathbf{x} информационных символов.

Для систем Massive MIMO (когда число передающих антенн $M \geq 8$ и когда используется модуляция высокого порядка, например, 16-QAM и выше) реализовать алгоритм ML не представляется возможным, даже при использовании самых современных сигнальных процессоров [3, 27]. Для полного перебора, например, для случая BPSK нужно вычислить 2^M норм, где M – число антенн. Вычисления необходимо выполнить за время длительности информационного символа [36, 107, 108]. Алгоритм ML показывает наилучший результат по помехоустойчивости, но вычислительная сложность его очень высока, и для систем с большим числом антенн он не реализуем.

1.3.2. Декоррелятор

Другим алгоритмом демодуляции является декоррелятор, далее будет использоваться название ZF. Оценка ZF, в отличие от ML, находится по непрерывному комплексному пространству C^1 [5, 31]:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^{ZF} &= \arg \min_{\mathbf{x} \in C^1} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 \\ \frac{\partial (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})' (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} &= -2\mathbf{H}'(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) = 0, \\ \hat{\mathbf{x}}^{ZF} &= (\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}'\mathbf{y} \\ \hat{\mathbf{x}}^{ZF} &= \mathbf{x} + (\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}'\boldsymbol{\eta} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$\hat{\mathbf{x}}$ – оценки принятого вектора информационных символов; \mathbf{y} – вектор принимаемых сигналов размерности $N \times 1$; \mathbf{H} – комплексная матрица радиоканала

ММО размерности $N \times M$; $(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'$ – псевдообратная матрица по отношению к матрице канала \mathbf{H} ; \mathbf{H}' – эрмитово сопряженная матрица по отношению к матрице канала \mathbf{H} [20]. Анализируя (1.5) становится ясным, что в алгоритме ZF мощность шума на выходе демодулятора может превышать, особенно при низких ОСШ (отношениях сигнал/шум), мощность шума на его входе, что влечет за собой существенные потери в помехоустойчивости [6, 25, 40,108]. Преимуществом алгоритма ZF является его низкая (полиномиальная) сложность, а недостатком низкая помехоустойчивость [5].

1.3.3. Алгоритм MMSE

В системах ММО наиболее распространен демодулятор MMSE [5, 28, 29]. Оценка $\hat{\mathbf{x}}^{\text{MMSE}}$, оптимальная по критерию минимума среднеквадратической ошибки и может быть вычислена по формуле [6]:

$$\hat{\mathbf{x}}^{\text{MMSE}} = (\mathbf{H}'\mathbf{H} + 2\sigma_{\eta}^2 \cdot \mathbf{1})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{y} = (\mathbf{T}^{\text{MMSE}})^{-1}\mathbf{v}, \quad (1.6)$$

где $2\sigma_{\eta}^2$ – дисперсия шума на входе каждой приемной антенны; $\mathbf{1}$ обозначает единичную матрицу размера $N \times N$; обозначим с помощью

$$\mathbf{T}^{\text{MMSE}} = \mathbf{H}'\mathbf{H} + 2\sigma_{\eta}^2 \cdot \mathbf{1} \quad (1.7)$$

эрмитову матрицу размерности $N \times N$; $\mathbf{v} = \mathbf{H}'\mathbf{y}$ обозначает модифицированный вектор наблюдений размера $N \times 1$; [36].

Как видно из сравнения (1.6) и (1.5) в алгоритме MMSE учитывается влияние шума, что дает возможность улучшить характеристики помехоустойчивости, при этом сложность алгоритмов примерно одинаковая.

Алгоритм MMSE в классе линейных алгоритмов демодуляции обладает наилучшей помехоустойчивостью [6, 27, 28], однако при высоких порядках модуляции сильно уступает помехоустойчивости алгоритма ML.

Вычислительная сложность алгоритмов MMSE (1.6) и ZF, пропорциональна полиному 3-й степени от числа передающих и приёмных антенн, и она существенно ниже, чем у алгоритма ML, обладающего экспоненциальной сложностью [5, 6, 27, 36].

Для демодуляции принимаемых сигналов в системах Massive MIMO с высокой кратностью модуляции необходимо искать альтернативные решения, т.е. необходимы алгоритмы демодуляции с низкой сложностью, позволяющие получить более качественные характеристики помехоустойчивости, лучше характеристик алгоритма MMSE.

1.3.4. Алгоритм K-best.

В основу алгоритма K-best [109, 110, 111, 112] был положен алгоритм максимального правдоподобия, решение которого является оптимальным методом для нахождения ближайшей точки решетки значений информационных символов. В алгоритме ML вычисляются евклидовы расстояния между вектором принятого сигнала и точками решетки с перебором по всем возможным состояниям, результатом работы является вектор с наименьшим расстоянием.

Алгоритм K-best также использует поиск минимума величины $\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2$, но не для всех комбинаций, а только для ограниченного подмножества комбинаций вектора \mathbf{x} . K-best учитывает только те комбинации, которые находятся в пределах сферы радиуса, заданного параметром алгоритма [35]. Отсюда и название класса алгоритмов сферических демодуляторов (Sphere Decoding (SD) algorithms sphere detector, SD). Условие, что точка решетки лежит внутри сферы, может быть записано как:

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 \leq C_0. \quad (1.8)$$

Алгоритмы сфер находят решение ML с уменьшенным числом рассматриваемых символов-кандидатов [109, 111, 112]. Алгоритм K-best – это алгоритм поиска, в котором сохраняются узлы, имеющие наименьшие суммарные евклидовы расстояния на каждом уровне. Узел относится к символу, взятому из реального созвездия. Если частичное евклидово расстояние больше квадрата радиуса сферы, соответствующий узел не будет расширен (рассмотрен на следующем уровне), используются K комбинаций с наименьшим частичным евклидовым расстоянием (Partial Euclidean Distance, PED).

Сокращение возможных путей алгоритма K-best («дерева» комбинаций) происходит за счет выбора параметра K , характеризующего набор узлов на каждом уровне и выбором лучших кандидатов, которые обеспечивают минимум суммарного расстояния Евклида [35, 109, 111, 112].

Главным достоинством алгоритма K-best является то, что у него фиксированная сложность (определяемая параметром K), что позволяет регулировать качество демодуляции и сложность перебора. Если выбранный параметр K соответствует большому радиусу сферы, то сложность перебора будет высокой, и наоборот – значения K , соответствующие малому радиусу повышают вероятность исключения правильной комбинации [35]. На практике значение K обычно выбирают исходя из неравенства $K_{best} \geq 2^{K_{bit}}$, где K_{bit} – число бит на символ.

Алгоритм K-best приближается по своим характеристикам к алгоритму ML при увеличении числа учитываемых наилучших комбинаций, передаваемых от одного шага к другому. При небольших значениях K потери по сравнению с оптимальным алгоритмом могут становиться весьма заметными. Это возникает из-за того, что при выборе наилучших комбинаций на первых шагах следующие символы не учитываются.

Алгоритм K-best относится к классу адаптивных алгоритмов с множеством настроек, позволяющих получить хорошие характеристики помехоустойчивости при контролируемой сложности, но, как будет показано далее, сложность его

довольно высока по сравнению с линейными алгоритмами демодуляции (например, MMSE) [35, 109, 110, 112].

1.4. Анализ помехоустойчивости известных алгоритмов демодуляции

Для исследования алгоритмов цифровой обработки сигналов при рассмотрении сложных систем связи используется компьютерное моделирование [131], в связи с тем, что полный натурный эксперимент дорогостоящий, да и плюс ко всему возможности аналитических и численных расчетов ограничены.

Для исследования и получения характеристик помехоустойчивости алгоритмов ZF, MMSE, ML K-best было проведено имитационное моделирование с использованием системы MATLAB. Моделирование проводилось со следующими параметрами.

Параметр	Значение
Конфигурация системы MIMO (число передающих/приемных антенн)	4×4 , 8×8 , 16×16 , 64×64
Вид модуляции	QPSK, 16QAM, 64QAM, 256QAM;
Режим передачи	пространственное мультиплексирование
Замирания в радиоканале MIMO	релеевские некоррелированные
Вид помехоустойчивого кодирования	турбокодирование (скорость 1/2; длина кадра 576 битов)
Алгоритм приема	демодулятор QAM и турбо-декодер, (стандарт LTE-Advanced [97])

На графиках в диссертации известные алгоритмы демодуляции обозначаются сокращенно: MMSE (1.6), ZF (1.5), ML (1.4) [113]. Рядом с обозначением алгоритма K-best [110] на графиках приводятся значения параметра K (например, Kbest, $K = 16$).

В диссертации на графиках используются обозначения:

- N_{tx} или M – число передающих антенн;
- N_{rx} или N – число приемных антенн.

На Рисунке 1.5 представлен график зависимостей коэффициента битовых ошибок от ОСШ (SNR, Signal-to-Noise Ratio) для известных алгоритмов демодуляции системы MIMO 4×4 (QPSK, без помехоустойчивого кодирования). Характеристики помехоустойчивости показывают зависимости вероятности битовой ошибки (BER, Bit Error Ratio) или коэффициента ошибок на кадр (FER, Frame Error Rate) от отношения энергии бита к спектральной плотности шума E_b/N_0 в дБ. [131].

На Рисунке 1.5 хорошо видно, что алгоритм ZF существенно уступает всем алгоритмам, а алгоритму ML – около 19 дБ на уровне 10^{-3} BER, алгоритм MMSE в свою очередь проигрывает алгоритму ML около 15 дБ, а алгоритм K-best с параметром $K = 16$ имеет такие же значения помехоустойчивости, что и алгоритм ML.

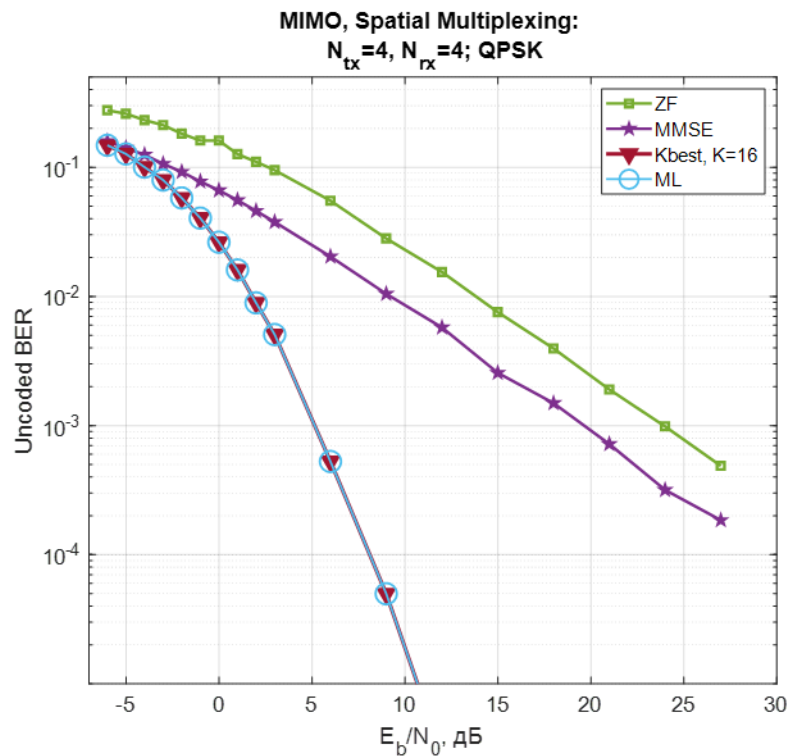


Рисунок 1.5 - Помехоустойчивость известных демодуляторов для системы MIMO 4×4 с модуляцией QPSK

На Рисунке 1.6 представлены кривые $FER = f(E_b/N_0)$ для алгоритмов демодуляции ZF, MMSE, ML и K-best с параметром $K = 16$ для системы MIMO с 4 приемными и 4 передающими антеннами с использованием модуляции QPSK и помехоустойчивого кодирования.

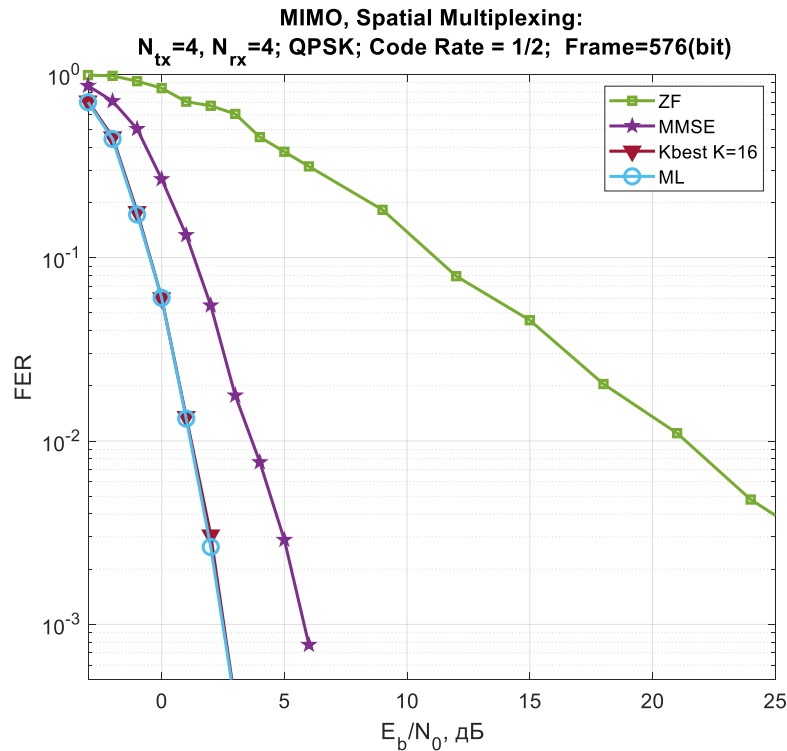


Рисунок 1.6 – График вероятности ошибки на кадр с использованием кодирования алгоритмов демодуляции ZF, MMSE, K-best ($K = 16$), ML для системы MIMO с 4 передающими и 4 приемными антеннами, QPSK

Как мы видим на Рисунке 1.6, применяя помехоустойчивое кодирование характеристики алгоритма ZF также как и без кодирования, значительно уступают в помехоустойчивости алгоритму ML, а эффективность алгоритма MMSE существенно улучшились. Алгоритм MMSE обладает потерями в 2,5 дБ на уровне $FER = 10^{-2}$ по сравнению с алгоритмом ML, а алгоритм K-best ($K = 16$) показывает результаты практически совпадающие с ML.

При увеличении числа антенн до 8 для достижения значений ML алгоритму K-best требуется увеличение параметра K , что мы и видим на Рисунке 1.7. На графике представлены кривые помехоустойчивости алгоритма K-best при значениях параметра $K = 8; 16; 32; 64$.

При параметре $K=16$ алгоритм K-best уступает алгоритму ML около 1 дБ на уровне $FER=0,01$ и только когда параметр $K=64$ эффективность достигает оптимальных значений ML алгоритма. С параметром $K=8$ алгоритм K-best показывает результат помехоустойчивости близкий с алгоритмом MMSE. Алгоритм ZF уступает всем алгоритмам, а алгоритму ML – около 24 дБ при $FER=0,01$.

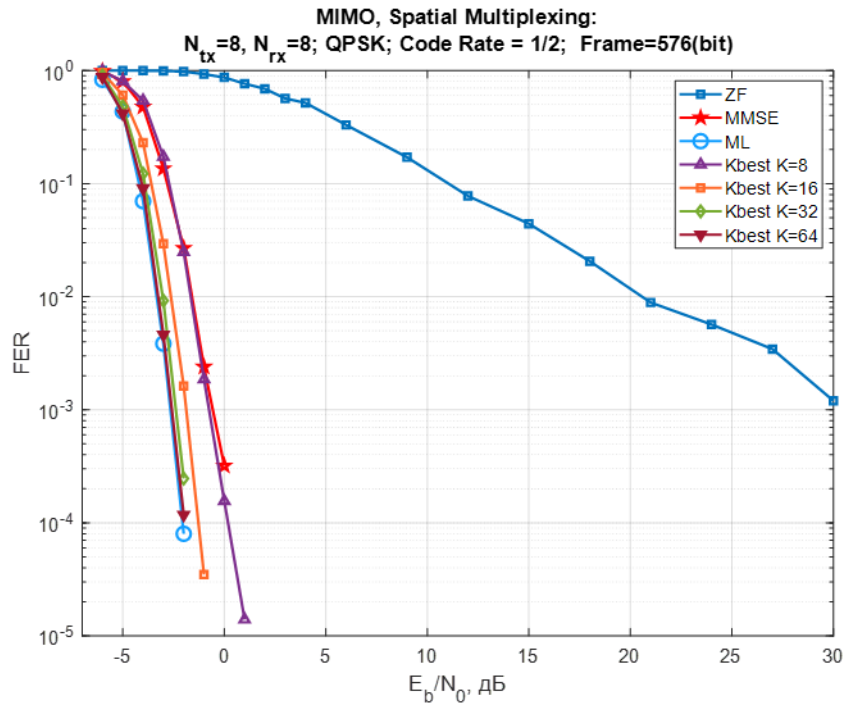


Рисунок 1.7 - График вероятности ошибки на кадр с использованием кодирования алгоритмов демодуляции ZF, MMSE, K-best ($K=8; 16; 32; 64$), ML для системы MIMO с 8 передающими и 8 приемными антеннами, QPSK

На Рисунке 1.8 представлены кривые $FER = f(E_b/N_0)$ для алгоритмов демодуляции ZF, MMSE, ML и K-best с параметром $K=16$ для системы MIMO с 4 приемными и 4 передающими антеннами с использованием модуляции 16QAM и помехоустойчивым кодированием, т.е. характеристики аналогичные Рисунку 1.7, но в условиях большего порядка модуляции.

И из Рисунка 1.8 можно видеть, что проигрыш в помехоустойчивости алгоритма MMSE по отношению к алгоритму ML при увеличении порядка модуляции уже составляет около 13,5 дБ при вероятности ошибки на кадр равной 10^{-2} , что на 11 дБ больше случая с QPSK, при этом алгоритм K-best с $K=16$ продолжает показывать хорошие результаты, уступая алгоритму ML всего около

0,1 дБ при $FER = 0,01$. Таким образом, при увеличении порядка модуляции характеристики алгоритма MMSE ухудшаются, причем гораздо сильнее характеристик алгоритма K-best.

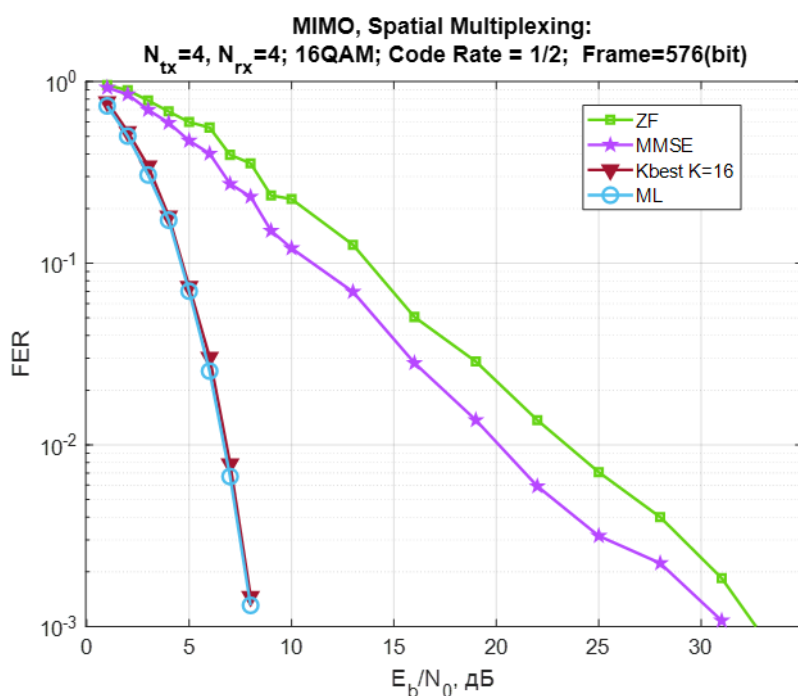


Рисунок 1.8 – График вероятности ошибки на кадр с использованием кодирования алгоритмов демодуляции ZF, MMSE, Kbest(K=16), ML для системы MIMO с 4 передающими и 4 приемными антеннами, 16QAM

Алгоритм K-best имеет характеристики помехоустойчивости очень близкие к алгоритму ML, а при увеличении значения параметра K можно добиться совпадения характеристик, но это влечет за собой серьезное усложнение алгоритма.

На представленных рисунках хорошо видно, что алгоритмы ZF и MMSE по помехоустойчивости существенно проигрывают нелинейным алгоритмам – оптимальному (ML) [114], а также и квазиоптимальному алгоритму с неполным перебором (K-best).

Иллюстративный характер имеет Рисунок 1.9, показывающий усредненное время счета оценок при использовании алгоритмов MMSE, Kbest (K=16), ML для системы MIMO с модуляцией QPSK при изменении числа антенн от 4 до 8.

Очень хорошо видно, что время, затрачиваемое на получение решения алгоритмом ML, резко возрастает при увеличении числа антенн. Также видно, что

время счета алгоритма K-best существенно выше, чем у алгоритма MMSE. Время счета алгоритмов, лишь условно характеризует вычислительную сложность алгоритмов. Анализ сложности алгоритмов будет выполнен в 4 разделе.

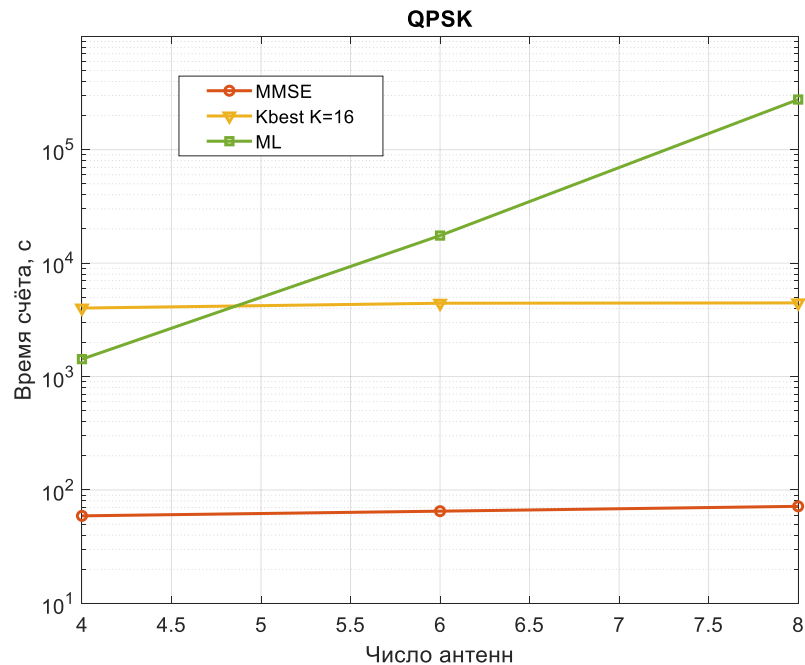


Рисунок 1.9 - График зависимостей времени счета алгоритмов демодуляции MMSE, Kbest(K=16), ML для системы MIMO модуляция QPSK для разного числа антенн

Увеличение числа антенн для алгоритма ML связано с серьезным ростом сложности, например, для 16QAM при конфигурации 4×4 приходится вычислить $16^4 = 65536$ норм, а для конфигурации 16×16 при 64QAM уже потребуются считать $64^{16} = 7,9 \cdot 10^{28}$ норм, поэтому алгоритм ML не реализуем для систем MIMO с большим числом антенн [36].

Алгоритм K-best значительно проще и для QPSK показывает отличные результаты помехоустойчивости, но с увеличением порядка модуляции и числа антенн требуется увеличивать значение параметра K , а это приводит к усложнению алгоритма. Например, для 16QAM конфигурации 4×4 с параметром $K = 16$ вычислительная сложность будет составлять 60816 операций, для конфигурации 16×16 при 64QAM с параметром $K = 16$ потребуются 2163280 элементарных арифметических операций, а увеличив K до 32, потребуются и вовсе 8323168 операций [35, 112].

Чтобы показать влияние параметра K на качество алгоритма K-best при высоких порядках модуляции и большого числа антенн приведем ряд рисунков, в отличие от предыдущих графиков, на них не показаны алгоритмы ML из-за своей сложности и ZF из-за плохой помехоустойчивости.

На Рисунке 1.10 представлены кривые $FER = f(E_b/N_0)$ для алгоритмов демодуляции MMSE и K-best при различных значениях параметра K ($K=16$, $K=32$, $K=64$, $K=128$) в системе MIMO с антенной конфигурацией 8×8 , модуляцией 64QAM и помехоустойчивым кодированием. Можно видеть, что изменение параметра K от 16 до 128 обеспечивает алгоритму K-best преимущество в помехоустойчивости над MMSE в диапазоне ОСШ примерно от 9 до 14 дБ на уровне $FER = 0,01$.

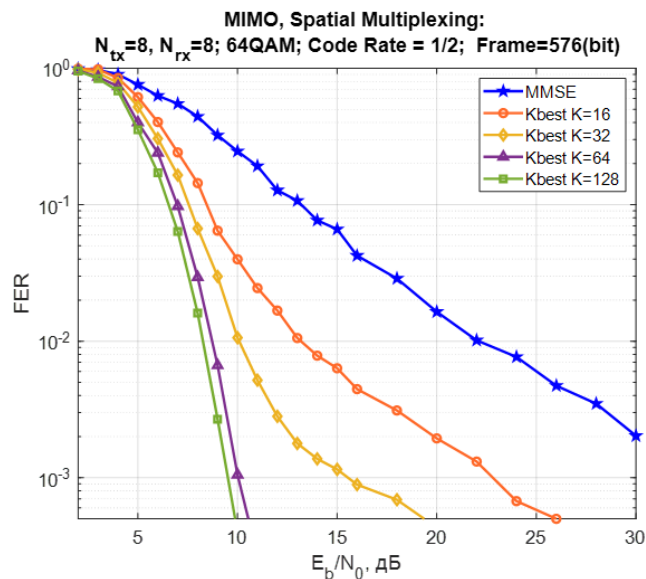


Рисунок 1.10 – График вероятности ошибки на кадр с использованием кодирования алгоритмов демодуляции MMSE, K-best ($K=16$; 32; 64; 128)

При изменении конфигурации антенн на 16×16 и увеличении порядка модуляции до 256QAM алгоритм K-best с параметром K от 8 до 256 демонстрирует превосходство в помехоустойчивости по сравнению с MMSE в диапазоне от 3,4 дБ до 15 дБ при $FER = 0,01$, что хорошо видно на Рисунке 1.11.

С увеличением числа антенн и при модуляции высокой кратности для сохранения преимущества в помехоустойчивости алгоритм K-best требует увеличения параметра K , что видно из Рисунка 1.11 и Рисунка 1.12.

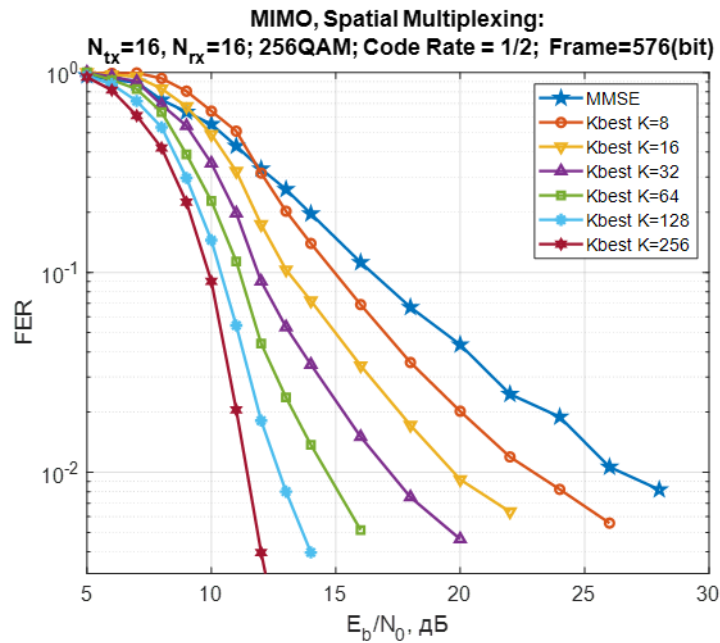


Рисунок 1.11 – График вероятности ошибки на кадр с использованием кодирования алгоритмов демодуляции MMSE, K-best (K=8; 16; 32; 64; 128; 256) для системы MIMO с 16 передающими и 16 приемными антеннами, модуляция 256QAM

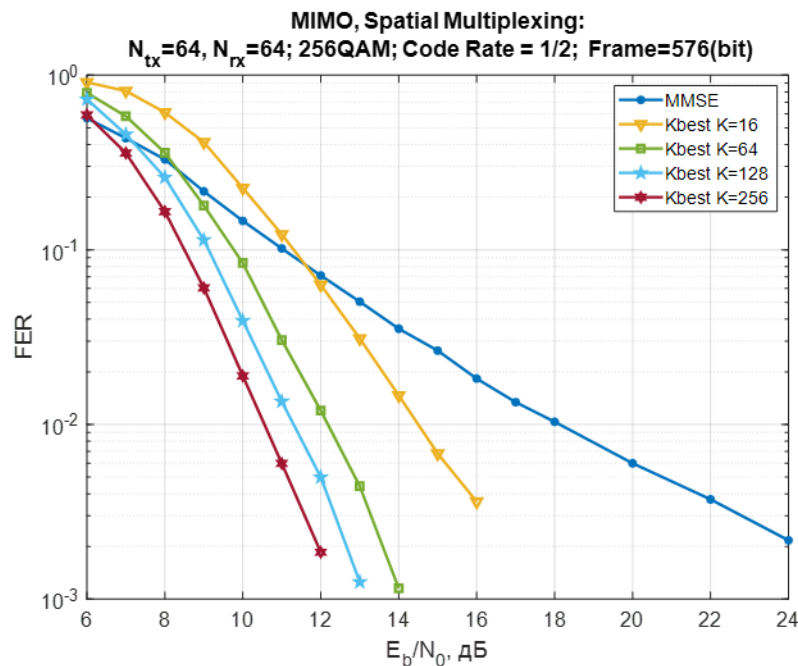


Рисунок 1.12 – Помехоустойчивость алгоритмов демодуляции MMSE, Kbest(K=16, K=64, K=128, K=256) для системы MIMO с 64 передающими и 64 приемными антеннами, модуляция 256QAM

На Рисунке 1.12 приведен график FER для системы MIMO с 64 передающими и 64 приемными антеннами и модуляцией 256QAM для MMSE и Kbest при различных значениях параметра K при K=16, K=64, K=128, K=256. Из рисунка хорошо видно, что увеличение значения параметра K с 16 до 256

отражается на преимуществе по помехоустойчивости от 3,6 дБ до 7,6 дБ при $FER = 0,01$ над алгоритмом MMSE [35].

Для улучшения значений помехоустойчивости алгоритму K-best требуется увеличение значения K , но увеличение параметра K влияет на сложность алгоритма, поэтому приходится постоянно искать компромисс между качеством и простотой [35].

Для совместной визуализации влияния увеличения порядка модуляции на сложность и помехоустойчивость алгоритма K-best был построен Рисунок 1.13, на котором показано сравнение по помехоустойчивости и сложности алгоритмов MMSE и K-best при модуляциях QPSK, 64QAM, 256QAM в системе MIMO 8×8 . На графике отражено положение алгоритма K-best относительно соответствующих значений алгоритма MMSE, т.е. схематично показано положение алгоритмов по сложности и по эффективности относительно друг друга. Данные помехоустойчивости сравнивались на уровне $FER = 0,01$ при использовании турбокодирования со скоростью $1/2$ при длине кадра 576 битов. Сложность алгоритма MMSE была вычислена согласно приведенной в [6] формуле, а для K-best использовалось выражение, полученное в [112].

За начало координат выбрано значение сложности и вероятности ошибки на кадр алгоритма MMSE. По оси ординат показан выигрыш по помехоустойчивости в дБ, полученный как разность отношений сигнал/шум $SNR_{MMSE} - SNR_{Kbest}$ соответствующих значений SNR по уровню $FER = 0,01$ для алгоритма MMSE и алгоритма K-best с различными значениями параметра K при разных видах модуляции.

По оси абсцисс показано увеличение относительной вычислительной сложности между алгоритмом MMSE, на графике точка с координатами (1;0), и алгоритмом K-best при различных K при разных видах модуляции. Относительная вычислительная сложность алгоритма K-best получена по следующему правилу:

$$\frac{\text{сложность } K_{\text{best}}}{\text{сложность MMSE}}$$

На Рисунке 1.13 хорошо видно, что при увеличении порядка модуляции требуется увеличивать параметр K алгоритма K -best, что приводит к значительному усложнению алгоритма.

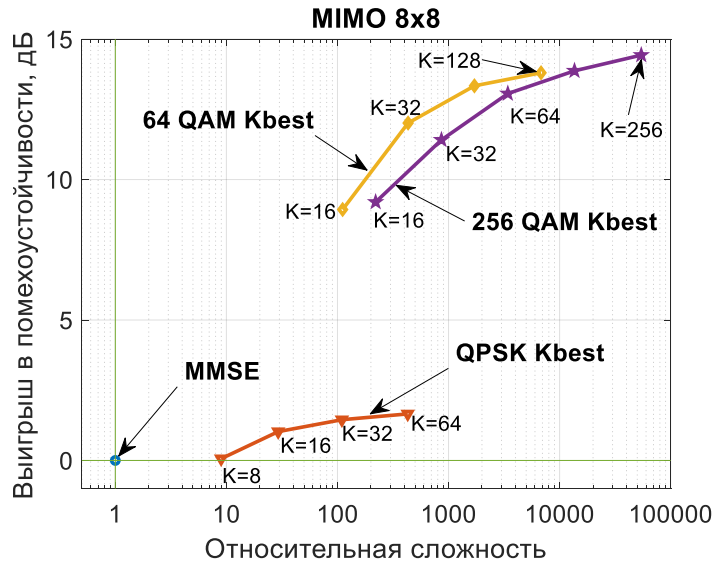


Рисунок 1.13 – Сравнение алгоритмов MMSE и K -best при разных модуляциях

Для систем Massive MIMO при модуляции высокой кратности характеристики алгоритма MMSE становятся хуже, поэтому их надо улучшать, а сложность алгоритма K -best – увеличивается и его необходимо упрощать.

Поэтому становится очевидной проблема синтеза эффективных, обладающих низкой сложностью алгоритмов демодуляции, что на Рисунке 1.14 для наглядности обозначено, как область исследования.

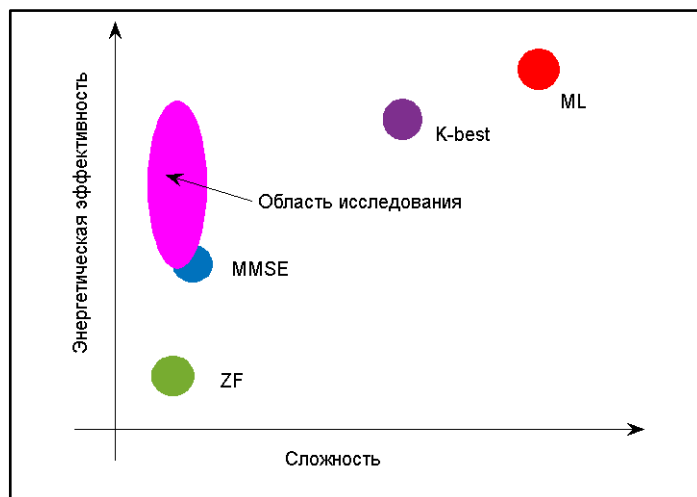


Рисунок 1.14 – Область исследования

На фоне усложнения систем радиосвязи, использующих технологию MIMO, т.е. при увеличении порядка модуляции и числа антенн, в условиях серьезных ограничений на время обработки и объем вычислительных ресурсов весьма актуальной является задача синтеза алгоритмов демодуляции, поскольку для технологии Massive MIMO пока не был предложен демодулятор [131], который имел бы приемлемую вычислительную сложность, обладал хорошей помехоустойчивостью и эффективно работал в разных условиях [20,115-122].

1.5. Выводы к разделу 1

1. Системы беспроводной связи имеют устойчивую тенденцию усложнения за счет увеличения числа антенн и кратности модуляции информационных символов, в результате чего, на пути к широкому внедрению технологии Massive MIMO, возникает ряд сложностей, в частности, возникают проблемы синтеза алгоритмов цифровой обработки сигналов, обладающих высокой помехоустойчивостью и приемлемой вычислительной сложностью.
2. Алгоритм демодуляции, оптимальный по критерию максимального правдоподобия (ML), имеет лучшую помехоустойчивость, однако он неприменим в системах Massive MIMO из-за слишком высокой сложности - его можно реализовать на практике только для систем с небольшим числом антенн.
3. Алгоритм MMSE гораздо проще алгоритма ML. Для систем конфигурации 4×4 , 8×8 , при использовании модуляции QPSK в сочетании с турбокодированием алгоритм MMSE обладает хорошей помехоустойчивостью, проигрывая алгоритму ML не более 3 дБ при коэффициенте ошибок на кадр FER=0,01. Однако с увеличением порядка модуляции характеристики алгоритма MMSE сильно

ухудшаются, например, для случая 4×4 и модуляции 16QAM потери составляют уже примерно 12 дБ. Увеличение числа антенн также приводит к ухудшению характеристик помехоустойчивости алгоритма MMSE.

4. Алгоритм K-best обладает характеристиками помехоустойчивости близкими к характеристикам алгоритма ML, причем при малых значениях параметра K сложность алгоритма намного ниже сложности алгоритма ML. При использовании модуляции QPSK характеристики алгоритма K-best при значении параметра $K=16$ практически совпадают с характеристиками помехоустойчивости ML. Однако с увеличением порядка модуляции наблюдается ухудшение характеристик помехоустойчивости K-best и для повышения эффективности его работы требуется большее значение параметра K , что напрямую влияет на сложность алгоритма. Для конфигураций с большим числом антенн для обеспечения помехоустойчивости на заданном уровне значение параметра K должно быть еще больше, а соответственно и сложность алгоритма K-best еще выше, что неприемлемо для систем Massive MIMO.
5. Для систем Massive MIMO, использующих модуляцию высокого порядка актуальной является задача разработки алгоритмов демодуляции, которые обладают лучшими характеристиками помехоустойчивости, чем у алгоритма MMSE, а порядок вычислительной сложности такой же, что и у алгоритма MMSE.

2. ПРЕДЛАГАЕМЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ ДЕМОДУЛЯТОРЫ ДЛЯ СИСТЕМ MIMO С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ АНТЕНН

Для систем MIMO с большим числом антенн с использованием модуляции высокой кратности, реализация на практике алгоритма ML и алгоритма K-best при больших значениях параметра K становится трудноосуществимой, даже при использовании самых современных сигнальных процессоров [3, 6, 27, 43]. Поэтому в системах Massive MIMO из ранее рассмотренных демодуляторов остается использовать только алгоритм MMSE (1.6), который сильно уступает в помехоустойчивости алгоритму ML. Поэтому важно разработать такой алгоритм, который бы обеспечивал более высокую помехоустойчивость, но имел бы тот же порядок вычислительной сложности, что алгоритм MMSE.

Как будет показано далее, без существенного увеличения вычислительной сложности улучшить характеристики помехоустойчивости алгоритма MMSE возможно путем введения в него нелинейности.

В алгоритме MMSE необходимо выполнение процедуры обращения матрицы канала \mathbf{H} , которую в свою очередь необходимо постоянно оценивать, т.к. случайно меняющуюся матрицу \mathbf{H} вычислить заранее нельзя [5, 20, 123, 124].

С целью уменьшения вычислительных затрат при демодуляции используются итерационные методы. Итерационные демодуляторы позволяют решать системы линейных уравнений вида $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{y}$ (где \mathbf{H} – это матрица коэффициентов, \mathbf{y} – вектор наблюдений, а $\hat{\mathbf{x}}$ – вектор неизвестных) за несколько шагов (итераций). Для этого выбирается $\hat{\mathbf{x}}_0$ начальное значение, и последовательно находятся приближенные решения. Наиболее эффективным итерационным алгоритмом, имеющим высокую скорость сходимости, является алгоритм Чебышева [20, 38, 43, 60, 67, 68, 69].

В системах CDMA алгоритм многопользовательской демодуляции на основе метода Чебышева хорошо себя зарекомендовал [43]. Было показано, что в условиях многолучевости алгоритм многопользовательской демодуляции на основе метода Чебышева позволяет получить энергетический выигрыш и сократить вычислительную сложность [43, 131].

Линейный алгоритм типа Чебышева также был предложен для решения задачи демодуляции в системах Massive MIMO благодаря возможности обеспечения параллельной обработки данных и удобстве его реализации на микропроцессорах [33]. Поэтому в настоящей работе, в качестве основы для разработки нелинейных демодуляторов в системах с большим числом антенн был выбран итерационный метод типа Чебышева.

Ниже приведена известная в литературе под названием «чебышевской» [67] итерационная схема (2.1) с итерационными параметрами (2.2):

$$\frac{\hat{\mathbf{x}}_i - \hat{\mathbf{x}}_{i-1}}{\tau_i} + \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{i-1} = \mathbf{y}, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 \mathbf{E} \leq \mathbf{H} \leq \gamma_2 \mathbf{E} \quad \gamma_1 > 0 \\ \tau_i = \frac{\tau_0}{1 + \rho_0 \mu_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad (2.2) \\ \rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \end{aligned}$$

где γ_1, γ_2 – минимальное и максимальное собственные значения, $\mu_i = \cos \frac{2i-1}{2n} \pi$ – нули полинома Чебышева $T_n(b) = \cos(n \arccos b)$ на отрезке $-1 \leq b \leq 1$. При этом погрешность оценивания с заданной точностью ε будет:

$$\|\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_n - \mathbf{y}\| \leq q_n \|\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{y}\|, \quad q_n \leq \varepsilon, \quad (2.3)$$

где $q_n = \frac{2\rho_1^n}{1 + \rho_1^{2n}}$, $\rho_1 = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}$ [20]. Выражение для итерационных параметров τ_i

имеет вид:

$$\tau_i = 2 / [\gamma_2 + \gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1) \cos \frac{2i-1}{2n} \pi] \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

При заданном максимальном числе итераций i_{\max} выражение (2.4) принимает следующий вид [5, 20, 38]:

$$\tau_i = \left[\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} \cos \left(\frac{i-1/2}{i_{\max}} \pi \right) + \frac{\gamma_2 + \gamma_1}{2} \right]^{-1}. \quad (2.5)$$

Итерационный метод типа Чебышева является весьма эффективным. Однако в процессе получения решения необходимо знать собственные значения матрицы канала \mathbf{H} , что создает ограничение его использования на практике в системах Massive MIMO. Далее предлагается модифицировать алгоритм Чебышева с целью получения не сложного и эффективного демодулятора систем MIMO с большим числом антенн [131].

2.1. Предлагаемый нелинейный итерационный демодулятор типа Чебышева

Для того чтобы улучшить характеристики линейных алгоритмов и приблизиться к значениям помехоустойчивости алгоритма ML предлагается рассмотреть нелинейные алгоритмы. Существуют методы разработки нелинейных итерационных демодуляторов, учитывающих свойства дискретности значений передаваемых сигналов. [5, 6, 26, 38]. Перейдем к рассмотрению нелинейного алгоритма демодуляции, построенного на основе линейного алгоритма Чебышева.

2.1.1. Нелинейный итерационный алгоритм типа Чебышева с точными собственными значениями матрицы канала

Линейные демодуляторы и, в частности, итерационный алгоритм типа Чебышева, в частности, не учитывают важную априорную информацию, которая

заключается в дискретном характере компонент вектора \mathbf{x} комплексных информационных символов [38, 114]. Чтобы добиться улучшения с приближением к потенциально возможным характеристикам помехоустойчивости необходимо учитывать информацию о множестве информационных символов.

Информацию о множестве информационных символов предлагается учитывать с помощью дополнительной нелинейной функции, добавляемой в линейный итерационный демодулятор [38, 114]. Эта нелинейность позволяет улучшить характеристики по сравнению с линейным итерационным алгоритмом типа Чебышева [126] или сокращение вычислительной сложности (числа итераций) при сохранении той же помехоустойчивости.

Модель наблюдаемого сигнала может быть записана в следующей математической форме :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{\eta}, \quad (2.6)$$

где использовано обозначение $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda})$ в виде комплексной нелинейной непрерывно дифференцируемой вектор-функции; $\boldsymbol{\lambda}$ – комплекснозначный вектор размерности $M \times 1$; M – число возможных значений дискретных комплексных информационных символов, определяемых порядком модуляции [26, 38].

Решение задачи демодуляции для модели (2.6) можно представить в итерационной форме :

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_i = \mathbf{G}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{i-1}, \mathbf{z}) \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.7)$$

где использованы обозначения комплекснозначной вектор-функции $\mathbf{G}_i(\dots)$ и вектора преобразованных наблюдений $\mathbf{z} = \mathbf{H}^\dagger \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{H}' \cdot \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}' \mathbf{y}$; $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_i$, $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{i-1}$ – оценки вектора $\boldsymbol{\lambda}$ на i -й и $(i-1)$ итерациях соответственно. Связь оценок векторов $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_i$ и вектора информационных символов $\hat{\mathbf{x}}_i$ на i -й итерации записывается следующим образом [26, 38]:

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_i). \quad (2.8)$$

Выражение оценки неизвестного вектора $\hat{\lambda}$, полученное при минимизации эмпирического риска с использованием ограниченного ряда Тейлора, может быть представлено в виде итерационного процесса [38]:

$$\hat{\lambda}_i = \hat{\lambda}_{i-1} + \mathbf{K}_i \left(\mathbf{z} - \mathbf{f}(\hat{\lambda}_{i-1}) \right) \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.9)$$

где \mathbf{K}_i - некоторый матричный коэффициент, зависящий от конкретного метода оценивания. В алгоритме используется некоторое начальное условие $\hat{\lambda}_0$.

Полученная в результате оценка может быть представлена в форме:

$$\hat{\lambda} = \mathbf{x} + \zeta, \quad (2.10)$$

где ζ – комплексный вектор ошибок оценивания.

Используя критерий минимума среднеквадратической ошибки в предположении, что информационные символы равновероятны и распределение комплексной ошибки оценивания ζ является комплексным гауссовским, получается следующее выражение для функции $f(\dots)$ [38]:

$$f(\hat{\lambda}) = \frac{\sum_{m=1}^M x(m) \exp \left\{ \frac{-|\hat{\lambda} - x(m)|^2}{2\sigma_\xi^2} \right\}}{\sum_{m=1}^M \exp \left\{ \frac{-|\hat{\lambda} - x(m)|^2}{2\sigma_\xi^2} \right\}}, \quad (2.11)$$

где $x(m)$, $m = 1, \dots, M$ – символы определяемые видом модуляции, σ_ξ^2 – дисперсия шума наблюдения. Формула (2.11) определяет вид функции для случая произвольной модуляции.

Принципиальным отличием нелинейного алгоритма типа Чебышева от линейного (2.1) является то, что на каждой итерации используется нелинейная функция $f(\hat{\mathbf{x}})$, вид которой зависит от вида применяемой модуляции [114].

Запишем двухслойную итерационную нелинейную схему типа Чебышева (2.12) с переменными итерационными параметрами (2.13) [114, 126]:

$$\hat{x}_i = \hat{x}_{i-1} + \tau_{i-1}(\mathbf{v} - (\mathbf{H}'\mathbf{H} + 2\sigma_\eta^2 \cdot \mathbf{1})f(\frac{\hat{x}_{i-1}}{D})), \quad (2.12)$$

$$\tau_i = \left[\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} \cos\left(\frac{i-1/2}{i_{\max} + 1} \pi\right) + \frac{\gamma_2 + \gamma_1}{2} \right]^{-1}, \quad (2.13)$$

где используются обозначения γ_1 и γ_2 соответственно для минимального и максимального собственного значения канальной матрицы \mathbf{H} ; максимальное число итераций, используемых в демодуляторе типа Чебышева при этом обозначено как i_{\max} ; $\mathbf{v} = \mathbf{H}'\mathbf{y}$ – вектор преобразованных наблюдений [20, 127, 128].

Запись нелинейной функции (2.11) в (2.12) для разных видов модуляции различна, в зависимости от множества значений информационных символов. Для сигналов двоичной фазовой модуляции (BPSK) $x(m) = \pm 1, m = 1, 2$ выражение (2.11) принимает следующий вид [6, 38, 114, 126]:

$$f(\hat{x}) = th\left(\frac{\hat{x}}{\sigma_\xi^2}\right). \quad (2.14)$$

Для сигналов квадратурной фазовой модуляции (QPSK) $x(m) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm j \frac{1}{\sqrt{2}}, m = 1, 2, 3, 4$ выражение для нелинейной функции принимает вид [6, 38, 128]:

$$f(\hat{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(th\left(\frac{\text{Re}(\hat{x})}{\sigma_\xi^2 \sqrt{2}}\right) + j \cdot th\left(\frac{\text{Im}(\hat{x})}{\sigma_\xi^2 \sqrt{2}}\right) \right). \quad (2.15)$$

Как будет далее подтверждено результатами моделирования, нелинейность за счет учета информации о виде модуляции повышает эффективность итерационного метода, при этом вычислительная сложность нелинейного итерационного алгоритма лишь незначительно превышает сложность линейного итерационного алгоритма – потребуется дополнительно использовать таблицу значений нелинейных функций для применяемых типов модуляции [127, 129, 130, 131]. Однако остается проблема вычисления собственных значений матрицы канала \mathbf{H} [131], решение которой описано ниже.

2.1.2. Нелинейный итерационный алгоритм типа Чебышева с оценками собственных значений матрицы канала

Не смотря на то, что демодулятор типа Чебышева обладает высокой скоростью сходимости, при его реализации требуется априорно знать γ_2, γ_1 минимальное и максимальное собственные значения \mathbf{H} матрицы коэффициентов передачи радиоканала ММО, что серьезно ограничивает его применимость [20, 131]. Оценка собственных значений матрицы канала является отдельной сложной задачей [5]. Поэтому для нахождения γ_2, γ_1 целесообразно применять приближенные формулы [5, 6, 73]:

$$\gamma_1 \approx \min_{1 \leq i \leq N} \sqrt{\sum_{j=1}^M T_{ij}} \quad \gamma_2 \approx \max_{1 \leq i \leq N} \sqrt{\sum_{j=1}^M T_{ij}}, \quad (2.16)$$

где T_{ij} - элемент матрицы \mathbf{T} . Выражение для матрицы \mathbf{T} следующее:

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}'\mathbf{H} + 2\sigma_n^2 \cdot \mathbf{1}, \quad (2.17)$$

где $2\sigma_n^2$ обозначает дисперсию шума на входе каждой приемной антенны; $\mathbf{1}$ – единичная матрица; знак ' означает эрмитово сопряжение матрицы \mathbf{H} [36].

Использование оценок собственных значений в демодуляторе типа Чебышева освобождает от вычисления точных границ собственных значений матрицы канала в режиме реального времени [131], что позволяет применять этот итерационный алгоритм на практике для систем ММО с большим числом антенн. При чем, использование оценок значений собственных значений вносит лишь небольшую погрешность и ухудшение характеристик помехоустойчивости едва заметно, незначительно [114, 126-131].

2.2. Исследование помехоустойчивости предлагаемых итерационных алгоритмов демодуляции для различных видов модуляции

Оценим характеристики помехоустойчивости предлагаемого нелинейного демодулятора типа Чебышева (2.12) с параметрами (2.13) и с оценками собственных значений (2.16) с помощью статистического моделирования [131].

Для городских условий работы сотовых систем связи наиболее характерным является случайный канал с релеевскими замираниями амплитуды сигналов. Поэтому исследование алгоритмов MMSE, линейного итерационного алгоритма демодуляции типа Чебышева, нелинейного итерационного алгоритма демодуляции типа Чебышева с приближенными значениями собственных значений матрицы канала для систем Massive MIMO было проведено для релеевского канала связи.

Было выполнено статистическое моделирование следующих демодуляторов систем Massive MIMO [36, 126, 128, 129, 131]:

- алгоритм MMSE (1.6);
- линейный итерационный алгоритм демодуляции типа Чебышева (2.1) с оценками собственных значений (2.16) и параметрами (2.2);
- нелинейный итерационный алгоритм демодуляции типа Чебышева (2.12) с параметрами (2.13) и с оценками собственных значений (2.16).

На рисунках эти алгоритмы обозначены как MMSE, Cheb, ChebNL (число итераций на графиках обозначено как 12it, 16it, 20it,...) [131].

На графиках используются обозначения:

- N_{tx} – число передающих антенн;
- N_{rx} – число приемных антенн.

Моделирование проводилось со следующими параметрами.

Параметр	Значение
Конфигурация системы MIMO (число передающих/приемных антенн)	$32 \times 32, 64 \times 64$
Вид модуляции	QPSK, 16QAM
Режим передачи	пространственное мультиплексирование
Замирания в радиоканале MIMO	релеевские некоррелированные
Вид помехоустойчивого кодирования	турбокодирование (скорость 1/2; длина кадра 576 битов)
Алгоритм приема	демодулятор QAM и турбо-декодер, (стандарт LTE-Advanced [97])

На Рисунке 2.1 приведены характеристики помехоустойчивости алгоритмов демодуляции (коэффициента ошибок на кадр FER от отношения E_b/N_0 в дБ, т.е. энергии бита к спектральной плотности шума) с использованием помехоустойчивого кодирования и модуляции 16QAM для линейного алгоритма типа Чебышева с различным числом итераций (12, 16, 20) и алгоритма MMSE [131].

Отчетливо виден итерационный характер работы алгоритма – при увеличении числа итераций характеристики приближаются к характеристикам алгоритма MMSE. При 16 итерациях линейный алгоритм типа Чебышева уступает 2,8 дБ алгоритму MMSE на уровне $FER = 0,01$, а при 20 итерациях – только 0,5 дБ [130, 131].

На Рисунке 2.2 приведены характеристики помехоустойчивости алгоритмов демодуляции (зависимости FER от E_b/N_0) с использованием помехоустойчивого кодирования и модуляции 16QAM для нелинейного алгоритма типа Чебышева с различным числом итераций (12, 16, 20, 24) и алгоритма MMSE [131].

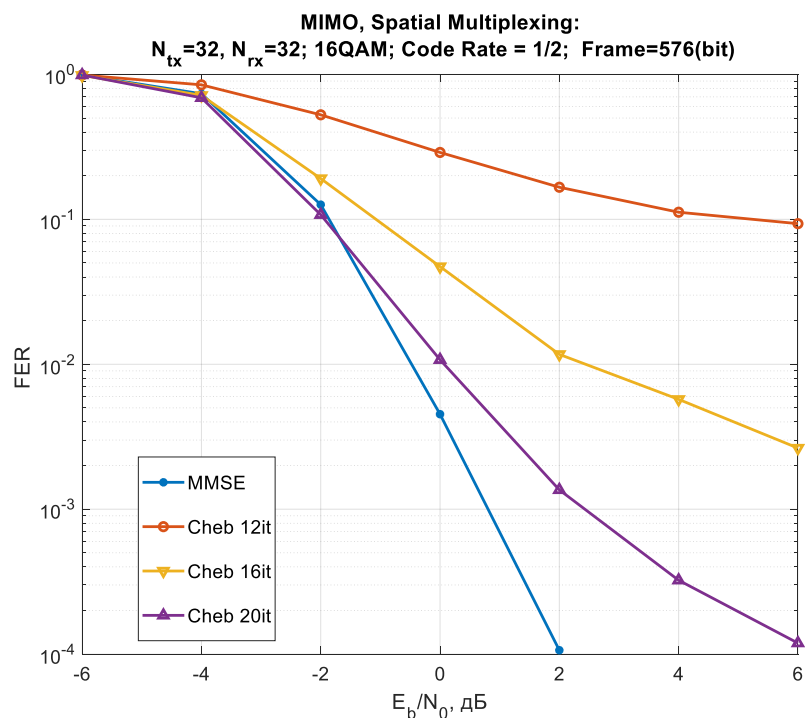


Рисунок 2.1 – Помехоустойчивость алгоритма MMSE и линейного алгоритма типа Чебышева

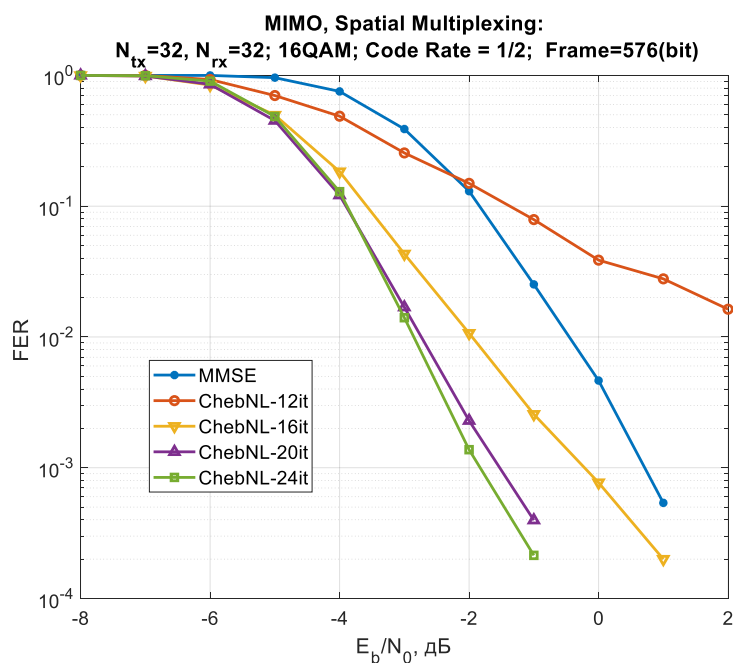


Рисунок 2.2 – Помехоустойчивость алгоритма MMSE и нелинейного алгоритма типа Чебышева

Из Рисунка 2.2 можно увидеть, что в результате внесения нелинейности в алгоритм типа Чебышева происходит существенное улучшение характеристик помехоустойчивости, и они становятся лучше характеристик алгоритма MMSE. При 16 итерациях нелинейный алгоритм типа Чебышева выигрывает в

помехоустойчивости у алгоритма MMSE 1,5 дБ на уровне $FER = 0,01$, при 20 итерациях выигрыш составляет уже 2,3 дБ, а при 24 итерациях – 2,5 дБ [131].

На Рисунке 2.3 представлены кривые $FER = f(E_b/N_0)$ для алгоритмов MMSE и нелинейного алгоритма типа Чебышева для системы MIMO антенной конфигурации 32×32 с используемой модуляцией QPSK. Нелинейный итерационный алгоритм типа Чебышева на 10 итерациях обеспечивает выигрыш по сравнению с MMSE около 0,7 дБ при вероятности ошибки на кадр 1% [127, 130, 131].

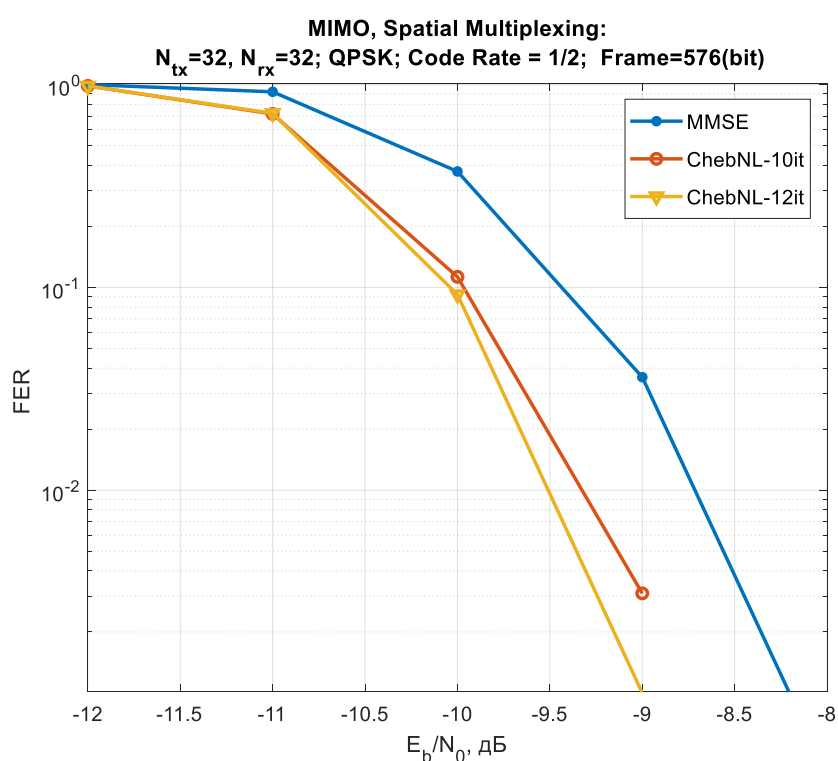


Рисунок 2.3 – Помехоустойчивость алгоритма MMSE и нелинейного алгоритма типа Чебышева

Для системы MIMO антенной конфигурации 64×64 модуляция 16 QAM, нелинейный итерационный демодулятор типа Чебышева (24 итерации) обеспечивает выигрыш 2,3 дБ по сравнению с MMSE, а с линейным демодулятором типа Чебышева почти 3,2 дБ при FER 1% [114, 130, 131], что можно увидеть на Рисунке 2.4 .

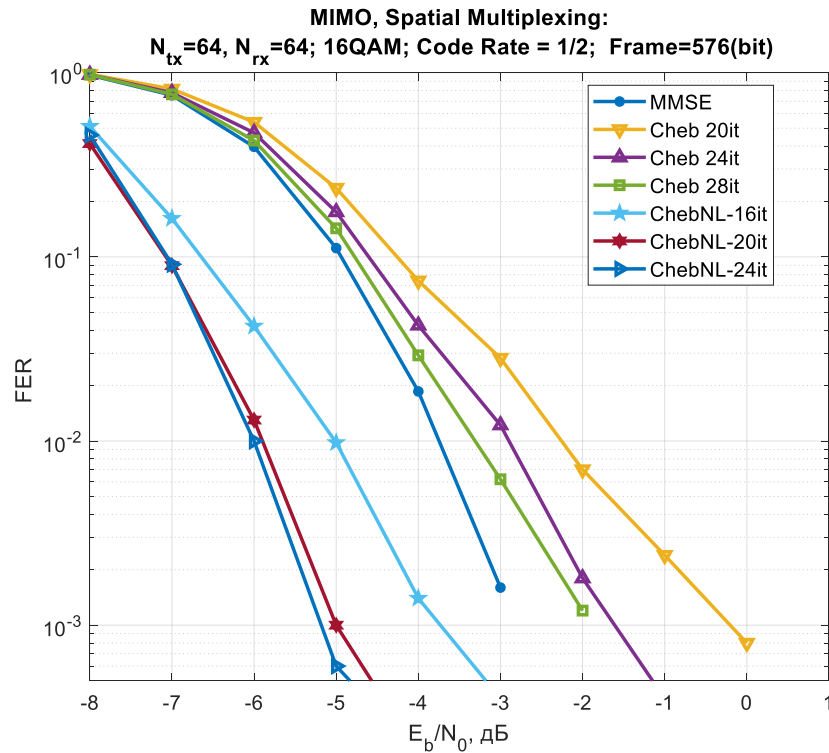


Рисунок 2.4 - Помехоустойчивость алгоритма MMSE, линейного и нелинейного алгоритма типа Чебышева для системы MIMO с 64 передающими и 64 приемными антеннами, модуляция 16 QAM

Результаты моделирования показали, что, характеристики нелинейного демодулятора типа Чебышева значительно лучше характеристик линейного демодулятора типа Чебышева и характеристик MMSE [126] при сложности, не превосходящей сложности алгоритма MMSE. Подробное сравнение сложности алгоритмов будет проведено в 4 разделе. А сейчас рассмотрим скорость сходимости алгоритмов на основе метода Чебышева.

2.3. Сходимость алгоритмов типа Чебышева

При использовании итерационных методов важен не только факт сходимости, но и скорость, с которой приближенное решение сходится к точному [67, 68]. Говорят, что итерационный метод сходится, если $\|\hat{\mathbf{x}}_n - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Погрешность метода n -ой итерации характеризуется вектором $\mathbf{g}_n = \hat{\mathbf{x}}_n - \mathbf{x}$. При численном решении осуществляется конечное число итераций, и необходимо

знать, во сколько раз уменьшится начальная погрешность \mathbf{g}_0 после проведения заданного числа итераций.

Число итераций $n_0(\varepsilon)$ является достаточным для получения точности ε , если после проведения $n_0(\varepsilon)$ итераций погрешность \mathbf{g}_0 уменьшилась в ε^{-1} раз. При решении итерационной схемы (2.1):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_n - \mathbf{y}\| &\leq q_n \|\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{y}\| & q_n < \varepsilon \\ q_n &= \frac{2\rho_1^n}{1 + \rho_1^{2n}}, & \rho_1 &= \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}, & \xi &= \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

приходим к неравенству:

$$\frac{1 + \rho_1^{2n}}{\rho_1^n} > \frac{2}{\varepsilon}. \quad (2.19)$$

Если потребовать

$$\frac{1}{\rho_1^n} \geq \frac{2}{\varepsilon}, \quad (2.20)$$

тогда минимальное число итераций определяется как

$$n \geq n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(2/\varepsilon)}{\ln(1/\rho_1)}. \quad (2.21)$$

В наиболее неблагоприятном случае, когда $\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ мало, получаем

приближенное выражение для числа итераций:

$$n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{\xi}}. \quad (2.22)$$

Целая часть числа $n_0(\varepsilon)$ называется минимальным числом итераций, необходимых для получения заданной точности ε . И даже при малых ξ число итераций чебышевского метода будет $n_0(\varepsilon) = O(1/\sqrt{\xi})$, именно в этом состоит преимущество перед методом простой итерации, для которого $n_0(\varepsilon) = O(1/\xi)$. [67-70].

В [32, 33] доказано, что скорость сходимости итерационного алгоритма типа Чебышева выше, чем у алгоритма по методу сопряженного градиента (Conjugate gradient, CG) и других линейных итерационных алгоритмов.

Алгоритм типа Чебышева считается одним из наиболее перспективных алгоритмов для применения в системах Massive MIMO, как по скорости сходимости, так и по возможности параллельной обработки при невысокой вычислительной сложности [33, 38, 43, 67, 68].

На Рисунке 2.5 приведен график зависимости FER на уровне $E_b/N_0 = -0,5$ дБ для системы Massive MIMO конфигурации 32×32 с модуляцией 16QAM при изменении числа итераций (N_{iter}) нелинейного алгоритма типа Чебышева (ChebNL) от 4 до 22.

Видно, что для достижения характеристик алгоритма MMSE нелинейному демодулятору типа Чебышева потребуется 14 итераций, причем с дальнейшим увеличением числа итераций нелинейный алгоритм типа Чебышева по эффективности уверенно превосходит алгоритм MMSE.

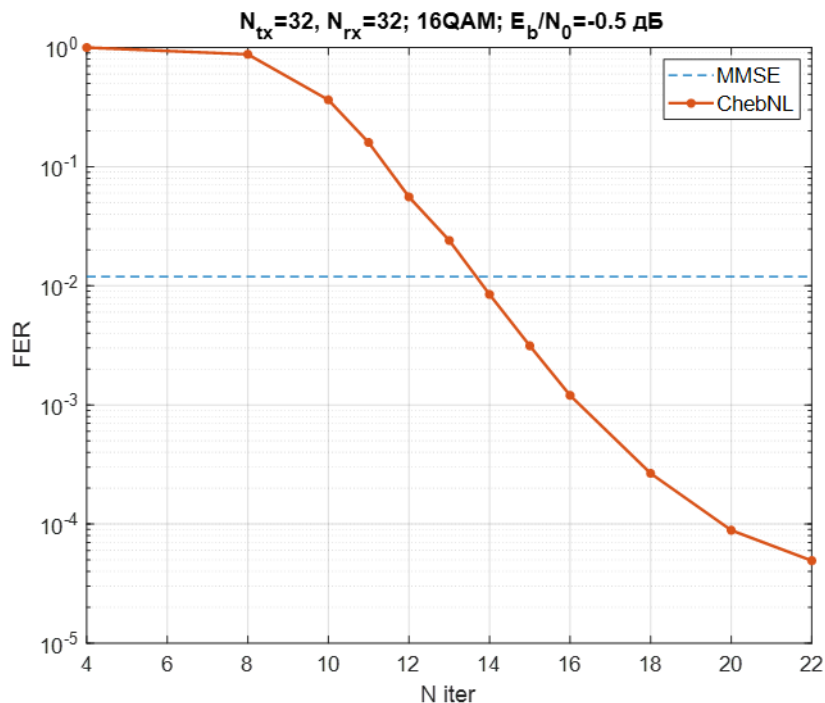


Рисунок 2.5 – Зависимости FER от числа итераций при $E_b/N_0 = -0.5$ дБ

На Рисунке 2.6 показаны зависимости порогового значения отношения энергии одного бита и спектральной плотности мощности шума E_b/N_0 при

вероятности ошибки на кадр $FER=0,01$ (1%) от числа итераций (N iter) для линейного (Cheb) и нелинейного (ChebNL) алгоритмов типа Чебышева в системе ММО с антенной конфигурацией 32×32 при использовании модуляции 16 QAM при изменении числа итераций от 12 до 32.

Характеристики помехоустойчивости итерационных алгоритмов сравниваются с характеристикой известного оптимального алгоритма минимизирующего среднеквадратическую ошибку, MMSE. Линейному алгоритму типа Чебышева требуется 24 итерации для того, чтобы приблизиться к значениям помехоустойчивости алгоритма MMSE, а предложенному нелинейному алгоритму типа Чебышева достаточно всего 14 итераций. Нелинейный алгоритм имеет более высокую скорость сходимости по сравнению с линейным алгоритмом [36] и при меньшем числе итераций может достигать характеристик MMSE алгоритма. Выигрыш по числу итераций составляет примерно 2 раза.

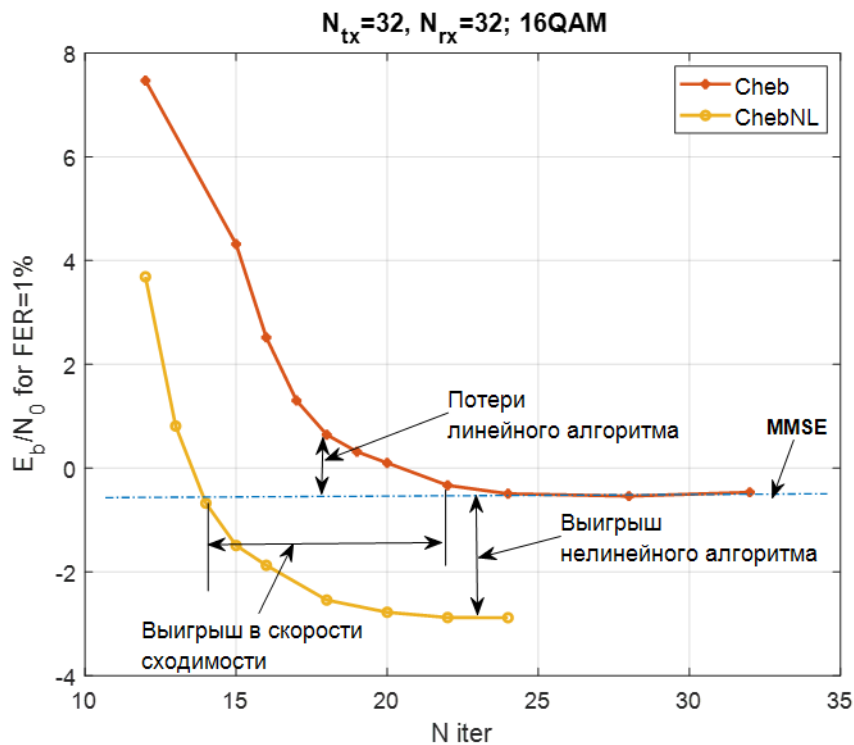


Рисунок 2.6 - Зависимости порогового значения E_b/N_0 при $FER=0,01$ (1%) от числа итераций для линейного и нелинейного демодуляторов типа Чебышева

Линейный и нелинейный итерационные демодуляторы типа Чебышева с оценками собственных значений были исследованы для работы в системах ММО с разным числом антенн и разного порядка модуляции [131]. Характеристики

помехоустойчивости демодуляторов были сравнены с характеристиками известного оптимального алгоритма MMSE, наиболее эффективного линейного демодулятора [131].

Представлен нелинейный итерационный демодулятор типа Чебышева (2.12) с параметрами (2.13) и с оценками собственных значений, не требующий вычисления точных собственных значений матрицы канала. В предложенном алгоритме используется дополнительная нелинейная функция, которая повышает эффективность демодуляции за счет учета информации о дискретном множестве значений информационных символов [114, 131].

Моделирование показало, что энергетический выигрыш нелинейного демодулятора типа Чебышева по сравнению с MMSE находится в диапазоне от 1,5 до 2,5 дБ [128, 129], при одинаковом порядке вычислительной сложности. Характеристики помехоустойчивости нелинейного алгоритма типа Чебышева лучше, чем у линейного алгоритма типа Чебышева и лучше, чем у алгоритма MMSE.

Таким образом, нелинейный демодулятор типа Чебышева можно применять в системах Massive MIMO [131].

Отметим, однако, что для модуляции QAM кратности больше 16 эффективность нелинейного демодулятора типа Чебышева снижается, кроме того он хорошо работает при условии, когда число абонетских антенн намного меньше числа антенн на базовой станции, т.е. в случае прямоугольной матрицы канала \mathbf{H} .

2.4. Выводы к раздлу 2

1. В системах Massive MIMO с модуляцией 16 QAM использование разработанного нелинейного итерационного алгоритма типа Чебышева позволяет обеспечить энергетический выигрыш в помехоустойчивости порядка 2,3 дБ при коэффициенте ошибочных кадров 1% по сравнению

с алгоритмом MMSE, а с линейным алгоритмом типа Чебышева – порядка 3,2 дБ.

2. Предложенный нелинейный алгоритм типа Чебышева обеспечивает более высокую скорость сходимости по сравнению с линейным алгоритмом типа Чебышева, и позволяет достигать характеристик алгоритма MMSE при меньшем числе итераций: выигрыш по числу итераций составляет примерно 2 раза при сложности меньшей, чем у алгоритма MMSE.
3. Для модуляций высокого порядка нелинейный алгоритм типа Чебышева не так эффективен и хорошо работает при условии, когда число абонетских антенн намного меньше числа антенн на базовой станции.
4. Нелинейный итерационный демодулятор типа Чебышева можно применять в системах Massive MIMO.

3. НЕЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ ДЕМОДУЛЯЦИИ С НЕГАУССОВСКОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ АПРИОРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

3.1. Постановка задачи и модель системы

Одной из перспективных в системах 5G является технология Massive MIMO, которая будет совершенствоваться по мере перехода к системам связи 6G.

В режиме пространственного мультиплексирования в системах Massive MIMO в одной полосе частот разными антеннами передаются разные потоки информационных символов [31, 124]. В результате в системах MIMO с большим числом антенн одновременно происходит прием и передача огромного числа сигналов, а для этого необходимо применять высокоэффективные алгоритмы цифровой обработки с приемлемой вычислительной сложностью [2, 3, 5, 10, 113].

Данный раздел посвящен решению задачи синтеза с приемлемой сложностью эффективного алгоритма демодуляции, который можно применять в системах с большим числом антенн при высокой кратности QAM модуляции.

Суть процесса демодуляции заключается в оценке информационных параметров по полученным наблюдениям на основе априорных и апостериорных сведений, при этом объем учитываемой информации и критерий качества влияют на эффективность алгоритма демодуляции [44, 61, 132].

Цель демодуляции в цифровой системе связи является получить по y наблюдаемому векторному сигналу из множества Ω_y \hat{x} оценку вектора информационных символов x из множества Ω_x [45, 62, 63, 74]. С помощью алгоритма демодуляции $\Lambda(\cdot)$ принимаемого сигнала y необходимо получить такую оценку \hat{x} , которая наиболее точно по выбранному критерию качества соответствует истинному значению x . Отличие истинного значения и оценки,

полученной по некоторому критерию (например, по критерию минимума среднеквадратической ошибки) определяет качество демодуляции [37, 132, 133]. Таким образом, алгоритм демодуляции устанавливает однозначное соответствие $\mathbf{y} \rightarrow \hat{\mathbf{x}}$.

В качестве информационной системы будем рассматривать систему ММО с M передающими и N приемными антеннами. В этом разделе, там, где имеет особое значение, будем использовать обозначение с точкой для комплексных величин. Модель сигнала на входе демодулятора описывается выражением [5, 11, 45, 113]:

$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\eta}}, \quad (3.1)$$

где $\dot{\mathbf{y}}$ обозначает N -мерный вектор принятых сигналов элементы которого имеют следующее математическое описание $\dot{y}_n = y_{n,r} + jy_{n,i}$, $n = 1, \dots, N$ [35]. Здесь и далее индекс r означает действительную часть, а i – мнимую часть соответствующего элемента; $\dot{\mathbf{H}}$ – комплексная матрица радиоканала ММО размерности $N \times M$; $\dot{\mathbf{x}} \triangleq [\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \dots \ \dot{x}_M]^T$ обозначает M -мерный комплексный вектор переданных информационных символов $\dot{x}_m = x_{m,r} + jx_{m,i}$, $m = 1, \dots, M$; $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ – комплексный гауссовский N -мерный вектор с корреляционной матрицей $\mathbf{R}_\eta = D_\eta \mathbf{I}_N$, нулевым математическим ожиданием и дисперсией $D_\eta = 2\sigma_\eta^2 = E\{\eta_n \eta_n^*\}$ комплексного отсчёта шума наблюдения, $n = 1, \dots, N$; \mathbf{I}_N – единичная матрица размера $N \times N$. Элементы h_{ij} матрицы $\dot{\mathbf{H}}$ радиоканала ММО являются комплексными гауссовскими случайными величинами и представляют собой комплексные коэффициенты передачи от j -й передающей антенны к i -й приемной антенне [35, 36].

Выражение (3.1) из комплексной формы представим в эквивалентном действительном виде, согласно известным преобразованиям, описание которых можно найти в [134]:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, \quad (3.2)$$

где \mathbf{H} - действительная матрица радиоканала MIMO размера $2N \times 2M$; $\boldsymbol{\eta}$ - действительный гауссовский вектор размера $2N \times 1$ с корреляционной матрицей $\mathbf{R}_\eta = \sigma_\eta^2 \mathbf{I}_{2N}$; $\mathbf{x} \triangleq [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{2M}]^T$ - вектор размерности $2M \times 1$ оцениваемых действительных квадратурных составляющих вектора $\dot{\mathbf{x}}$ модели (3.1), модулированных с помощью символов квадратурной амплитудной модуляции (QAM) [11]. Для случая 1 антенны получается действительная модель следующего вида [35]:

$$\begin{bmatrix} y_{1,r} \\ y_{1,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11,r} & -h_{11,i} \\ h_{11,i} & h_{11,r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,r} \\ x_{1,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{1,r} \\ \eta_{1,i} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Для наглядности также приведем пример перехода от комплексных векторов и матриц случая $N = M = 3$:

$$\begin{bmatrix} y_{1,r} \\ y_{1,i} \\ y_{2,r} \\ y_{2,i} \\ y_{3,r} \\ y_{3,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11,r} & -h_{11,i} & h_{12,r} & -h_{12,i} & h_{13,r} & -h_{13,i} \\ h_{11,i} & h_{11,r} & h_{12,i} & h_{12,r} & h_{13,i} & h_{13,r} \\ h_{21,r} & -h_{21,i} & h_{22,r} & -h_{22,i} & h_{23,r} & -h_{23,i} \\ h_{21,i} & h_{21,r} & h_{22,i} & h_{22,r} & h_{23,i} & h_{23,r} \\ h_{31,r} & -h_{31,i} & h_{32,r} & -h_{32,i} & h_{33,r} & -h_{33,i} \\ h_{31,i} & h_{31,r} & h_{32,i} & h_{32,r} & h_{33,i} & h_{33,r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,r} \\ x_{1,i} \\ x_{2,r} \\ x_{2,i} \\ x_{3,r} \\ x_{3,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{1,r} \\ \eta_{1,i} \\ \eta_{2,r} \\ \eta_{2,i} \\ \eta_{3,r} \\ \eta_{3,i} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

В примерах индекс r означает действительную часть, а индекс i означает мнимую часть соответствующего комплексного элемента, например, $y_{1,r}$ - действительная часть, $y_{1,i}$ - мнимая часть элемента \dot{y}_1 вектора $\dot{\mathbf{y}}$ модели (3.1).

3.2. Получение MMSE и MAP оценок при гауссовской аппроксимации

Как мы видим, решение системы линейных уравнений представляет собой оценку вектора параметров \mathbf{x} демодуляции принятого вектора сигналов \mathbf{y} при условии известных матрицы канала MIMO и характеристик шума.

Количественная оценка меры различия оценки $\hat{\mathbf{x}}$ и истинного значения \mathbf{x} описывается функцией потерь. Выражение (3.5) определяет квадратичную функцию потерь [44, 45, 61]:

$$\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{V}}^2 = (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})' \mathbf{V} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}), \quad (3.5)$$

где \mathbf{V} матрица, состоящая из весовых коэффициентов.

Поскольку оценка зависит от результата полученного наблюдения, $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$, то удобнее использовать усредненные значения функции потерь, т.е. условный риск [44, 61, 64, 74]:

$$R(\hat{\mathbf{x}}) = \int_{\mathbf{y}} p(\mathbf{y}) \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{V}}^2 p(\mathbf{x} | \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}, \quad (3.6)$$

где $p(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ - апостериорная плотность вероятности вектора параметров \mathbf{x} при условии наличия наблюдения \mathbf{y} .

Решающее правило $\Lambda(\cdot)$ (вычислительный алгоритм), которое минимизирует функцию потерь, является основой для эффективной демодуляции. Правило $\Lambda(\cdot)$ называется байесовским и использует всю доступную (априорную) информацию о принимаемом сигнале.

При минимизации условного риска мы получаем оценку по минимуму среднеквадратического отклонения.

Байесовский подход к оцениванию вектора параметров \mathbf{x} предполагает известным априорную плотность $p_{pr}(\mathbf{x})$ оцениваемых параметров, которая в свою очередь позволяет определить апостериорную плотность $p_{ps}(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ по формуле Байеса [44, 45, 61]:

$$p_{ps}(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) p_{pr}(\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})}, \quad (3.7)$$

где плотность $p(\mathbf{y})$ определяется из условия нормировки:

$$p(\mathbf{y}) = \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} p_{ps}(\mathbf{x} | \mathbf{y}) p_{pr}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (3.8)$$

где $\Omega_{\mathbf{x}}$ - область всех допустимых значений вектора \mathbf{x} .

При использовании квадратичной функции потерь оптимальная байесовская оценка является апостериорным средним значением (условным математическим ожиданием) вектора \mathbf{x} и находится по формуле [44, 61]:

$$\hat{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} \mathbf{x} p_{ps}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x}. \quad (3.9)$$

При этом апостериорная плотность $p_{ps}(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ содержит полную информацию о принимаемом сигнале \mathbf{y} и может использоваться для различных критериев оптимальности [44, 45, 65].

Для вычисления апостериорного среднего необходимо апостериорное распределение $p_{ps}(\mathbf{x}|\mathbf{y})$, для нахождения которого нужно знать априорное распределение $p_{pr}(\mathbf{x})$ и функцию правдоподобия.

С учетом формулы Байеса запишем выражение апостериорной плотности вероятности с полной информацией об оцениваемом векторе \mathbf{x} [132]:

$$p_{ps}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{L(\mathbf{y}|\mathbf{x}) p_{pr}(\mathbf{x})}{\int_{\Omega_{\mathbf{x}}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) p_{pr}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}, \quad (3.10)$$

где $L(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ - функция правдоподобия. Для рассматриваемой модели она описывается гауссовской плотностью [45]:

$$L(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_{\eta}^2)^N} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{\eta}^2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})\right). \quad (3.11)$$

Оценку вектора \mathbf{x} будем находить из условия максимума апостериорной плотности вероятности (МАР) по формуле [44, 61, 64]:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{x}}} p(\mathbf{x}|\mathbf{y}). \quad (3.12)$$

Данную оценку используют на практике, так же, как и метод апостериорного среднего.

Предполагается, что априорное распределение вектора \mathbf{x} является гауссовским, то есть имеет вид:

$$p_{pr}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_x^2)^M} e^{-\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{2\sigma_x^2}}, \quad (3.13)$$

где σ_x^2 - дисперсия (мощность) одной квадратурной составляющей информационного символа x_m , $m=1, \dots, M$. Причем дисперсия нормированного символа с квадратурной амплитудной модуляцией (QAM) $\sigma_x^2 = \frac{1}{2}$ [11].

Из условия гауссовского априорного распределения, апостериорное распределение, в рассматриваемом случае, так же будет гауссовским, а оценка, найденная по оптимальному алгоритму демодуляции методом минимума среднеквадратической ошибки (MMSE), будет совпадать с оценкой максимума апостериорной плотности вероятности (MAP) [132, 136], которая может быть найдена из следующего условия:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{MMSE} = \hat{\mathbf{x}}_{MAP} &= \arg \max (L(\mathbf{y}|\mathbf{x}) p_{pr}(\mathbf{x})) = \\ &= \arg \max (\log(L(\mathbf{y}|\mathbf{x})) + \log(p_{pr}(\mathbf{x}))) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Логарифм – однозначная монотонно возрастающая функция аргумента, поэтому результат максимизации апостериорной плотности вероятности $p_{ps}(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ и логарифма этой плотности совпадают, таким образом, значение оценки MAP можно найти путем максимизации функции логарифма. То есть, подставляя выражения (3.11) и (3.13) в формулу (3.14) с учетом некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{MMSE} = \hat{\mathbf{x}}_{MAP} &= \arg \max \left(-\frac{1}{2\sigma_\eta^2} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{2\sigma_x^2} \right) = \\ &= \arg \max \left(-\frac{1}{2\sigma_\eta^2} (\mathbf{y}^T - \mathbf{x}^T \mathbf{H}^T) (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{2\sigma_x^2} \right) = \\ &= \arg \max \left(-\frac{1}{2\sigma_\eta^2} (\mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{x}^T \mathbf{H}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H}\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{2\sigma_x^2} \right) = \\ &= \arg \max \left(-\frac{1}{2\sigma_\eta^2} (\mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{x}^T \mathbf{H}^T \mathbf{y} - (\mathbf{y}\mathbf{H}^T)^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H}\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{2\sigma_x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Для нахождения максимума продифференцируем выражение по \mathbf{x} и приравняем к нулю результат:

$$\frac{d}{d\mathbf{x}} \left(-\frac{1}{2\sigma_\eta^2} \{ \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{x}^T \mathbf{H}^T \mathbf{y} - (\mathbf{y} \mathbf{H}^T)^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{x} \} - \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{2\sigma_x^2} \right) = 0. \quad (3.16)$$

Используя правила дифференцирования по векторному аргументу, описанные в [6, 86], получим следующее уравнение:

$$\left(-\frac{1}{2\sigma_\eta^2} (-\mathbf{H}^T \mathbf{y} - \mathbf{H}^T \mathbf{y} + (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \mathbf{x}) - \frac{2\mathbf{x}}{2\sigma_x^2} \right) = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{y} - \frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{MAP} - \frac{1}{\sigma_x^2} \hat{\mathbf{x}}_{MAP} = 0$$

Запишем в удобном виде:

$$-\frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{MAP} + \frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{y} - \frac{1}{\sigma_x^2} \hat{\mathbf{x}}_{MAP} = 0$$

$$\frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{y} = \frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{MAP} + \frac{1}{\sigma_x^2} \hat{\mathbf{x}}_{MAP} \quad (3.18)$$

$$\left(\frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \frac{1}{\sigma_x^2} \mathbf{I}_{2M} \right) \hat{\mathbf{x}}_{MAP} = \frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{y}$$

$$\left(\frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_x^2} \mathbf{I}_{2M} \right) \hat{\mathbf{x}}_{MAP} = \mathbf{H}^T \mathbf{y}$$

Отсюда окончательно получим линейное уравнение:

$$\left(\frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \frac{1}{\sigma_x^2} \mathbf{I}_{2M} \right) \hat{\mathbf{x}}_{MAP} = \frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \quad (3.19)$$

$$\left(\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_x^2} \mathbf{I}_{2M} \right) \hat{\mathbf{x}}_{MAP} = \mathbf{H}^T \mathbf{y}$$

Из выведенного линейного уравнения (3.19) следует, что оценка может быть найдена по известной формуле MMSE [5, 6, 38]:

$$\hat{\mathbf{x}}_{MMSE} = \hat{\mathbf{x}}_{MAP} = \left(\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_x^2} \mathbf{I}_{2M} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y}. \quad (3.20)$$

Для гауссовской аппроксимации оценка максимума плотности вероятности совпадает с математическим ожиданием, а математическое ожидание является оценкой минимума среднеквадратического отклонения для любой плотности [44, 62, 64, 65, 132].

3.3. Синтез нелинейных методов демодуляции

3.3.1. Применение негауссовской аппроксимации для получения оценок

Теоретически было обосновано, что для вычисления оценок MMSE и MAP, используя статистический байесовский подход, при гауссовской аппроксимации априорного распределения решение линейного относительно вектора $\hat{\mathbf{x}}$ уравнения (3.19) может быть найдено с помощью итерационных методов [132]. Однако, используя такой вид аппроксимации априорного распределения, мы не учитываем знания о равномерности и дискретном характере информационных символов, что заведомо приводит к ухудшению характеристик алгоритма демодуляции.

Рассмотрим случаи разного учета априорной информации о векторе \mathbf{x} . Пусть априорная плотность $p(\mathbf{x})$ задана в виде произведения несобственных равномерных распределений каждого из элементов вектора \mathbf{x} $p(x_m) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l}$, $m = 1, \dots, 2M$, тогда по формуле Байеса выходит равенство плотностей $p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$. Такой же результат получается и если в априорной гауссовской плотности вектора \mathbf{x} дисперсия $\sigma_x^2 \rightarrow \infty$. В этом случае, если апостериорная плотность $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ симметрична, то оценка MAP является оценкой линейного

максимального правдоподобия (ML) [45], которая вычисляется с помощью, так называемого линейного алгоритма демодуляции Zero Forcing (ZF) [6]:

$$\hat{\mathbf{x}}_{ZF} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y}. \quad (3.21)$$

Отметим, что, если брать во внимание дискретность множества Ω_x значений вектора \mathbf{x} , алгоритм демодуляции будет нелинейным. Предполагая гауссовское распределение для вектора информационных символов вместо непрерывного равномерного распределения, мы получаем линейный алгоритм MMSE, а учитывая дискретность Ω_x , получаем оптимальный ML нелинейный с полным перебором множества элементов вектора \mathbf{x} . Хотя нелинейный алгоритм ML является наиболее эффективным, но полный перебор с учетом большой размерности вектора \mathbf{x} имеет слишком высокую вычислительную сложность. Уместно сказать, что при большом числе точек созвездия для QAM символов дискретное распределение стремится к равномерному. Поэтому в качестве аппроксимации исходного априорного распределения можно использовать равномерное. Оно в большей степени учитывает свойства истинного априорного распределения. Но равномерное распределение плохо дифференцируется, поэтому далее предлагается обобщённое семейство распределений, частными случаями которого являются гауссовское и равномерное распределения, при этом оно является дифференцируемым.

Поскольку символы являются функциями разных случайных параметров, иначе говоря, они функционально независимы, то пусть вектор \mathbf{x} имеет негауссовское априорное распределение такого вида:

$$p_{pr}(\mathbf{x}) = \prod_{m=1}^{2M} p_{pr}(x_m). \quad (3.22)$$

Требуется найти оценку MAP, удовлетворяющую следующему условию:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{MAP} &= \arg \max (L(\mathbf{y}|\mathbf{x}) p_{pr}(\mathbf{x})) = \\ &= \arg \max (\log(L(\mathbf{y}|\mathbf{x})) + \log(p_{pr}(\mathbf{x}))) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Учитывая выражения (3.11) для функции правдоподобия $L(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ и негауссовское априорное распределение (3.22), условие (3.23) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{MAP} &= \arg \max (L(\mathbf{y}|\mathbf{x}) p_{pr}(\mathbf{x})) = \\ &= \arg \max \left(-\frac{1}{2\sigma_\eta^2} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^{2M} \log(p_{pr}(x_m)) \right).\end{aligned}\quad (3.24)$$

Дифференцируя выражение в скобках, получим условие для MAP оценок при негауссовском априорном распределении

$$-\frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{MAP} + \frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{y} + \frac{\mathbf{d}}{d\hat{\mathbf{x}}_{MAP}} \left(\sum_{m=1}^{2M} \log(p_{pr}(\hat{x}_{MAP,m})) \right) = 0, \quad (3.25)$$

где $\frac{\mathbf{d}}{d\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ – производная от скалярной функции $f(\mathbf{x})$ векторного аргумента \mathbf{x} по векторному аргументу \mathbf{x} . Эта производная является векторной функцией.

Полученное выражение в общем случае является нелинейным относительно переменных $\hat{x}_{MAP,m}$ и зависит от вида априорного распределения. Равномерное распределение можно использовать в качестве аналитического описания априорного распределения квадратурных составляющих QAM символа. На основе критерия Кульбака [75] для аппроксимации распределений, необходимо равенство соответствующих математических ожиданий и дисперсий аппроксимируемого и аппроксимированного распределений [132]. В этом случае для QAM символа с мощностью квадратурной составляющей равной 0,5 и нулевым средним значением можно использовать равномерное априорное распределение $p_{pr}(x) = \frac{1}{2a}$, на интервале $x \in [-a; a]$, где $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Не смотря на то, что равномерное распределение достаточно хорошо, особенно при высоком порядке QAM модуляции, может аппроксимировать распределение дискретной случайной величины, использовать его из-за не дифференцируемости для оптимизации и решения уравнения (3.25) весьма затруднительно. Поэтому лучше применять другие аппроксимации [113, 132].

Например, в качестве аппроксимации равномерного распределения с любой точностью приближения, предлагается использовать следующую функцию:

$$p_{pr}(x) = const \cdot e^{-\left(\frac{x}{2d}\right)^{2i}}. \quad (3.26)$$

Постоянная в данном выражении определяется исходя из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{pr}(x) dx = 1. \quad (3.27)$$

Обращаясь к таблице интегралов [135], имеем:

$$\int_0^{\infty} x^k e^{-\frac{x^{2i}}{(2d^2)^i}} dx = \frac{(\sqrt{2d})^{k+1}}{2i} \Gamma\left(\frac{k+1}{2i}\right). \quad (3.28)$$

Согласно (3.27) с учетом (3.26) должно выполняться следующее условие:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{pr}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} const \cdot e^{-\left(\frac{x}{2d}\right)^{2i}} dx = 1. \quad (3.29)$$

Используя интеграл (3.28), учитывая пределы интегрирования имеем:

$$const = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{2d}\right)^{2i}} dx} = \frac{1}{2 \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{2d}\right)^{2i}} dx} = \frac{1}{2 \frac{(\sqrt{2d})}{2i} \Gamma\left(\frac{1}{2i}\right)} = \frac{i}{\sqrt{2d} \Gamma\left(\frac{1}{2i}\right)}. \quad (3.30)$$

В результате получается распределение следующего вида:

$$p_{pr}(x) = \frac{ie^{-\frac{x^{2i}}{(2d^2)^i}}}{\sqrt{2d} \Gamma\left(\frac{1}{2i}\right)}. \quad (3.31)$$

Математическое ожидание этого распределения будет равно 0, а дисперсия определяется выражением:

$$\begin{aligned}
E\{x^2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{ie^{-\frac{x^{2i}}{(2d^2)^i}}}{\sqrt{2d}\Gamma\left(\frac{1}{2i}\right)} dx = \frac{i}{\sqrt{2d}\Gamma\left(\frac{1}{2i}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} x^k ie^{-\frac{x^{2i}}{(2d^2)^i}} dx = \\
&= \frac{i}{\sqrt{2d}\Gamma\left(\frac{1}{2i}\right)} 2 \int_0^{\infty} x^k ie^{-\frac{x^{2i}}{(2d^2)^i}} dx = \\
&= 2 \frac{i}{\sqrt{2d}\Gamma\left(\frac{1}{2i}\right)} \frac{(\sqrt{2d})^3}{2i} \Gamma\left(\frac{3}{2i}\right) = (\sqrt{2d})^2 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2i}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2i}\right)}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Если использовать распределение (3.31) для аппроксимации априорного распределения квадратурных составляющих QAM символа, то должно выполняться условие:

$$d^2 = \frac{1}{2} \sigma_x^2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2i}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2i}\right)}. \tag{3.33}$$

Нетрудно показать, что при $i \rightarrow \infty$ данное распределение стремится к равномерному в полосе $[-\sqrt{2d}; \sqrt{2d}]$, или $[-\sigma_x; \sigma_x]$, в свою очередь $\sigma_x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, а при $i = 1$ данное распределение является гауссовским с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma_x^2 = \frac{1}{2}$. Таким образом, предложенное семейство распределений имеет на своих противоположных полюсах гауссовское и равномерное распределение [35, 132, 136].

Вид предложенного распределения для разных i показан на Рисунке 3.1, на котором хорошо видно, что, уже начиная с $i = 32$, это распределение на заданном интервале совпадает с равномерным.

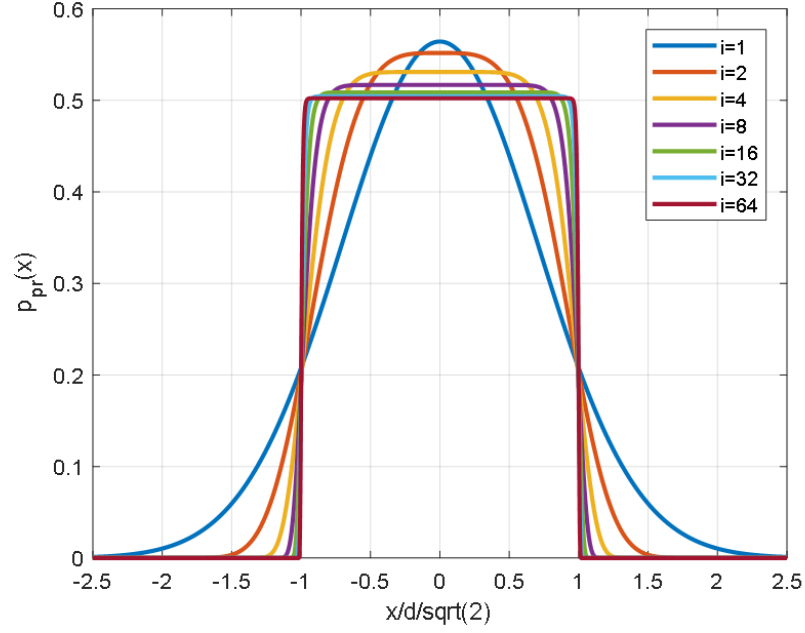


Рисунок 3.1 - Негауссовское априорное распределение $p_{pr}(x)$ при различных значениях параметра i

Далее, подставляя (3.31) в (3.25), получаем систему нелинейных уравнений:

$$-\frac{1}{\sigma_{\eta}^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{MAP} + \frac{1}{\sigma_{\eta}^2} \mathbf{H}^T \mathbf{y} - \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d} \hat{\mathbf{x}}_{MAP}} \left(\frac{1}{(2d^2)^i} \sum_{m=1}^{2M} x_{m,MAP}^{2i} \right) = 0. \quad (3.34)$$

Или

$$-\frac{1}{\sigma_{\eta}^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{MAP} + \frac{1}{\sigma_{\eta}^2} \mathbf{H}^T \mathbf{y} - \frac{2i}{(2d^2)^i} [\hat{\mathbf{x}}_{MAP}]^{2i-1} = 0. \quad (3.35)$$

В выражении (3.35) $[\hat{\mathbf{x}}_{MAP}]^{2i-1}$ означает, что каждый элемент вектора $\hat{\mathbf{x}}_{MAP}$ поэлементно возводится в степень $(2i-1)$.

Решение системы нелинейных уравнений (3.35) являются MAP оценками вектора \mathbf{x} [113].

Обратим внимание, что при $i=1$ $d^2 = \sigma_x^2$ уравнение (3.35) становится линейным и будет полностью совпадать с уравнением (3.17) для получения линейной оценки MMSE [132, 136].

Таким образом, от объема учитываемых априорных знаний зависит сложность алгоритма демодуляции. Если учитывать дискретный характер оцениваемого символа мы получаем нелинейный алгоритм демодуляции с

полным перебором элементов вектора \mathbf{x} , который обеспечивает наилучшие результаты точности, но имеет очень высокую вычислительную сложность, тем самым, исключая возможность практического использования в системах с большим числом антенн. Плохо дифференцируемое равномерное распределение, близкое при QAM модуляции высокого порядка к истинному дискретному распределению непригодно, поэтому и предлагается новое семейство распределений, которое удобно своей простотой. При $i=32$ оно стремится к равномерному, да к тому же гауссовское распределение является частным случаем этого семейства.

3.3.2. Нелинейное МСКО оценивание с применением метода Монте-Карло

С целью исследования эффективности использования предложенного априорного распределения (3.31) при нахождении MMSE оценок, т.е. апостериорного среднего (3.9) необходимо вычислить многомерный интеграл. Для этого применим метод Монте-Карло (Monte-Carlo) [76, 137]. При использовании априорного распределения (3.31) апостериорное распределение будет описываться следующим выражением [132]:

$$\begin{aligned}
 p_{ps}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) &= \frac{L(\mathbf{y}|\mathbf{x})p_{pr}(\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})} = \\
 &= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\eta^2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) - \sum_{m=1}^{2M} \frac{x_m^{2i}}{(2d^2)^i}\right)}{\int_{\Omega_x} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\eta^2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) - \sum_{m=1}^{2M} \frac{x_m^{2i}}{(2d^2)^i}\right) d\mathbf{x}}. \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

Для данного негауссовского априорного распределения оценка минимума среднеквадратического отклонения в отличие от известных алгоритмов MMSE будет нелинейной и имеет вид:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_p &= \int_{\Omega_x} \mathbf{x} p_{ps}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x} = \\ &= \frac{\int_{\Omega_x} \mathbf{x} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\eta^2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) - \frac{1}{(2d^2)^i} \sum_{m=1}^{2M} x_m^{2i}\right) d\mathbf{x}}{\int_{\Omega_x} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\eta^2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) - \frac{1}{(2d^2)^i} \sum_{m=1}^{2M} x_m^{2i}\right) d\mathbf{x}}.\end{aligned}\quad (3.37)$$

Введём обозначения

$$\varphi(\mathbf{x}) \triangleq \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\eta^2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) - \frac{1}{(2d^2)^i} \sum_{m=1}^{2M} x_m^{2i}\right), \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}\xi_1 &\triangleq \int_{\mathbf{x}} \mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \xi_0 &\triangleq \int_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.\end{aligned}\quad (3.39)$$

Тогда оценка минимума среднеквадратического отклонения, нелинейная MMSE (NMMSE) для априорного распределения (3.31) будет определяться следующим выражением:

$$\hat{\mathbf{x}}_{NMMSE,i} = \frac{\xi_1}{\xi_0}. \quad (3.40)$$

Введём вспомогательное распределение:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^M \det(\mathbf{V}_x)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{V}_x^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\right). \quad (3.41)$$

Тогда для вычисления интегралов можно использовать преобразования:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \int_{\mathbf{x}} \mathbf{x} \frac{\varphi(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = E\left\{\mathbf{x} \frac{\varphi(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})}\right\} \\ \xi_0 &= \int_{\mathbf{x}} \frac{\varphi(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = E\left\{\frac{\varphi(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})}\right\}.\end{aligned}\quad (3.42)$$

Таким образом, интегралы ξ_0 и ξ_1 могут быть вычислены методом усреднения многомерных функций $\left(\frac{\varphi(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})}\right)$ и $\left(\mathbf{x} \frac{\varphi(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})}\right)$ по распределению (3.41).

Для этого уместно воспользоваться методом Монте-Карло [76, 137].

В качестве генерируемого распределения возьмём распределение линейной MMSE оценки для гауссовского априорного распределения с параметрами:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{MMSE} &= \left(\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_x^2} \mathbf{I}_{2M} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{V}_{MMSE} &= \sigma_\eta^2 \left(\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_x^2} \mathbf{I}_{2M} \right)^{-1}.\end{aligned}\quad (3.43)$$

Для генерации вектора с таким распределением будем использовать преобразование вида [6, 61]:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{z} + \hat{\mathbf{x}}_{MMSE}, \quad (3.44)$$

где $\mathbf{z} \sim \mathbb{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ обозначает случайный вектор с распределением, описываемым нормальным законом с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией равной единице, матрица \mathbf{R} находится из условия $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{V}_{MMSE}$.

Усредняемая функция в этом случае будет:

$$\frac{\varphi(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\eta^2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) - \frac{1}{(2d^2)^i} \sum_{m=1}^{2M} x_m^{2i}\right)}{\frac{1}{(2\pi)^M \det(\mathbf{V}_{MMSE})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{MMSE})^T \mathbf{V}_{MMSE}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{MMSE})\right)}. \quad (3.45)$$

Коэффициент перед \exp в знаменателе не зависит от \mathbf{x} и при вычислении отношения $\frac{\xi_1}{\xi_0}$ будет сокращён, поэтому дальше не будем его учитывать.

Используя лемму об обращении матриц $(A^{-1} + B'C^{-1}B)^{-1} = A - AB'(BAB' + C)^{-1}BA$ [6] и проведя ряд преобразований:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\sigma_\eta^2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) = \left(-\frac{1}{2\sigma_\eta^2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) - \frac{1}{2\sigma_x^2}\mathbf{x}^T \mathbf{x} \right) + \frac{1}{2\sigma_x^2}\mathbf{x}^T \mathbf{x} \\
& \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \frac{1}{\sigma_\eta^2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \frac{1}{\sigma_x^2}\mathbf{x}\right) \equiv \\
& \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y})^T (\sigma_\eta^2 \mathbf{I}_{2N} + \mathbf{H}\sigma_x^2 \mathbf{H}^T)^{-1} (\mathbf{y})\right) \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T U^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\right) \\
& U = \left(\frac{1}{\sigma_x^2} \mathbf{I}_{2M} + \frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \right)^{-1} = \sigma_x^2 \mathbf{I}_{2M} - \sigma_x^2 \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\sigma_x^2 \mathbf{H}^T + \sigma_\eta^2 \mathbf{I}_{2N})^{-1} \mathbf{H}\sigma_x^2 = \\
& = \sigma_x^2 \mathbf{I}_{2M} - \mathbf{K}\mathbf{H}\sigma_x^2 = \sigma_\eta^2 \left(\frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_x^2} \mathbf{I}_{2M} + \mathbf{H}^T \mathbf{H} \right)^{-1} = \mathbf{V}_{MMSE} \\
& \hat{\mathbf{x}} = U \left(\mathbf{H}^T \frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{y} \right) = \mathbf{K}(\mathbf{y}) = \left(\frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_x^2} \mathbf{I}_{2M} + \mathbf{H}^T \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y} = \hat{\mathbf{x}}_{MMSE} \\
& \mathbf{K} = U\mathbf{H}^T \frac{1}{\sigma_\eta^2} = \left(\frac{1}{\sigma_x^2} \mathbf{I}_{2M} + \mathbf{H}^T \frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \frac{1}{\sigma_\eta^2} = \\
& = \left(\frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_x^2} \mathbf{I}_{2M} + \mathbf{H}^T \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \quad . \quad (3.46) \\
& -\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \frac{1}{\sigma_\eta^2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) - \frac{1}{2}(\mathbf{x})^T \frac{1}{\sigma_x^2}(\mathbf{x}) \equiv \\
& \equiv -\frac{1}{2}(\mathbf{y})^T (\sigma_\eta^2 \mathbf{I}_{2N} + \mathbf{H}\sigma_x^2 \mathbf{H}^T)^{-1} (\mathbf{y}) - \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T U^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})
\end{aligned}$$

Получаем следующее тождество:

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{1}{2\sigma_\eta^2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) - \frac{1}{2\sigma_x^2}\mathbf{x}^T \mathbf{x} \right) \equiv \\
& \equiv -\frac{1}{2\sigma_\eta^2}\mathbf{y}^T \left(\mathbf{I}_{2N} + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}\mathbf{H}^T \right)^{-1} \mathbf{y} - \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{MMSE})^T \mathbf{V}_{MMSE}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{MMSE}) \quad . \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Таким образом, можем записать:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\sigma_\eta^2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) = \\
& = \left(-\frac{1}{2\sigma_\eta^2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) - \frac{1}{2\sigma_x^2} \mathbf{x}^T \mathbf{x} \right) + \frac{1}{2\sigma_x^2} \mathbf{x}^T \mathbf{x} \equiv \\
& \equiv -\frac{1}{2\sigma_\eta^2} \mathbf{y}^T \left(\mathbf{I}_{2N} + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}\mathbf{H}^T \right)^{-1} \mathbf{y} - \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{MMSE})^T \mathbf{V}_{MMSE}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{MMSE}) + \frac{1}{2\sigma_x^2} \mathbf{x}^T \mathbf{x} \\
& \quad .(3.48)
\end{aligned}$$

В итоге усредняемая функция будет:

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} &= C \exp \left(\frac{1}{2\sigma_x^2} \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \frac{1}{(2d^2)^i} \sum_{m=1}^{2M} x_m^{2i} \right) = \\
&= C \exp \left(-\sum_{m=1}^{2M} \left(\frac{2\Gamma\left(\frac{3}{2i}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2i}\right)} x_m^{2i} - x_m^2 \right) \right) , \quad (3.49)
\end{aligned}$$

где $C = \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_\eta^2} \mathbf{y}^T \left(\mathbf{I}_{2N} + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}\mathbf{H}^T \right)^{-1} \mathbf{y} \right)$ – постоянная независящая от переменной \mathbf{x} . Поскольку для вычисления оценки (3.40) с учетом (3.42) и (3.49), используется отношение интегралов, то постоянная C будет сокращена. Поэтому её можно не учитывать.

В итоге нам нужно вычислить средние значения следующих функций

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= E \left\{ \mathbf{x} \exp \left(-\sum_{m=1}^{2M} (\alpha x_m^{2i} - x_m^2) \right) \right\} , \\
\xi_0 &= E \left\{ \exp \left(-\sum_{m=1}^{2M} (\alpha x_m^{2i} - x_m^2) \right) \right\} , \quad (3.50)
\end{aligned}$$

где $\alpha = \frac{2\Gamma\left(\frac{3}{2i}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2i}\right)}$ – постоянная, зависящая от отношения Гамма-функций и параметра i . На Рисунке 3.2 и Рисунке 3.3 приведен вид усредняемых функций

для одной переменной вектора \mathbf{x} . Эти функции представляют научный интерес для исследования и аппроксимации, которыми планируется заняться в будущих работах.

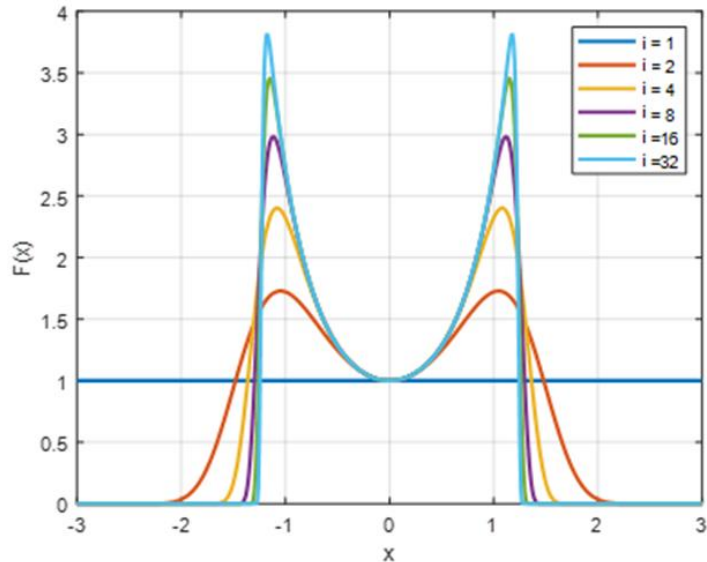


Рисунок 3.2 - Вид функции $F(x_m) = \exp(-((\alpha x_m^{2i} - x_m^2)))$

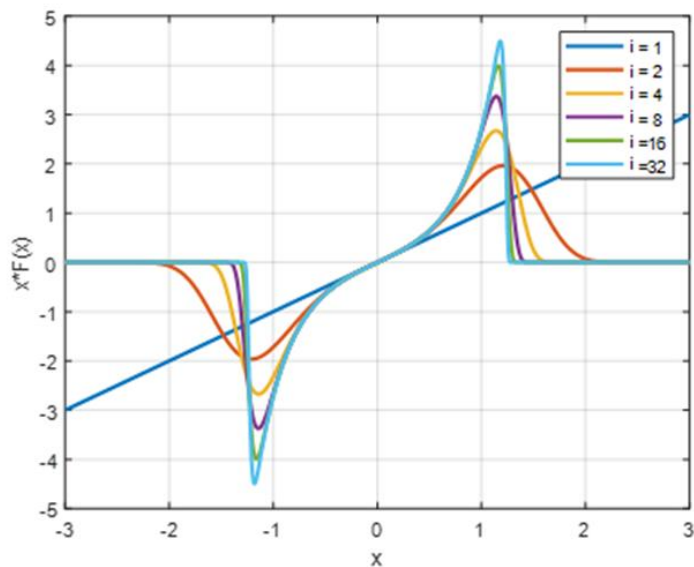


Рисунок 3.3 - Вид функции $xF(x_m) = x \exp(-((\alpha x_m^{2i} - x_m^2)))$

Применяя метод Монте-Карло для получения оптимальных по критерию минимизации среднеквадратического отклонения нелинейных оценок информационных символов (3.40) (NMMSE), в процессе усреднения функций

(3.50), используется апостериорное распределение, которое формируется гауссовским распределением с параметрами MMSE алгоритма (3.43), т.е. предложенным априорным распределением (3.31) с $i=1$ [113, 132, 136].

Для того, чтобы вычислить дисперсии используя метод Монте-Карло надо вычислить ещё один интеграл [132]:

$$\xi_2 = E \left\{ [\mathbf{x}]^2 \exp \left(- \sum_{m=1}^{2M} (\alpha x_m^{2i} - x_m^2) \right) \right\}. \quad (3.51)$$

После вычисления методом Монте-Карло данного вектора, можно найти вектор дисперсий ошибок оценивания

$$\mathbf{d}_{NMMSE,i} = \frac{\xi_2}{\xi_0} - [\hat{\mathbf{x}}_{NMMSE,i}]^2, \quad (3.52)$$

где $\hat{\mathbf{x}}_{NMMSE} = \xi_1 / \xi_0$ – нелинейная оценка вектора информационных символов (3.40), оптимальная по критерию минимума среднеквадратической ошибки; i – параметр негауссовской аппроксимации априорного распределения вектора \mathbf{x} , а отношение ξ_2 / ξ_0 в выражении (3.40) находится с помощью формул (3.50) и (3.51) [132].

Однако при вычислении мягких оценок битов, которые в системах радиосвязи требуются для работы мягкого декодера после обработки с помощью алгоритма демодуляции с использованием помехоустойчивого кодирования, следует учитывать, что индивидуальное апостериорное распределение будет негауссовским.

Полученные методом Монте-Карло NMMSE оценки QAM символов использовались для демодуляции и выделения оценок кодированных битов. С целью исследования правомерности предложенного вида аппроксимации и анализа эффективности было проведено статистическое моделирование и получены характеристики помехоустойчивости, которые будут представлены ниже.

3.3.3. Применение итерационных методов при нелинейной демодуляции

Для решения нелинейного уравнения (3.35) воспользуемся известным итерационным методом Ньютона (метод касательных) [67].

Систему уравнений $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ можно решить путем последовательных приближений.

Предположим, что найдено p -е приближение $\mathbf{x}^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)})$, тогда точный корень уравнения можно представить в виде [68, 113]:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(p)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}, \quad (3.53)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}$ - погрешности корня.

Введем матрицу Якоби:

$$W(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Если определитель этой матрицы не равен нулю $\det \mathbf{W}(\mathbf{x}) \neq 0$, то поправка $\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}$ будет выражаться следующим образом:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} = -\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x}^{(p)})\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(p)}), \quad (3.55)$$

где $\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x}^{(p)})$ – матрица, обратная матрице Якоби.

Таким образом, последовательные приближения находятся по формуле:

$$\mathbf{x}^{(p+1)} = \mathbf{x}^{(p)} - \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x}^{(p)})\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(p)}) \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (3.56)$$

В качестве начального приближения $\mathbf{x}^{(0)}$ можно использовать значение априорного математического ожидания [113].

Применим эту теорию для решения нелинейного уравнения демодуляции:

$$-\frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{MAP} + \frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{y} - \frac{2i}{(2d^2)^i} [\hat{\mathbf{x}}_{MAP}]^{2i-1} = 0$$

$$\begin{cases} f_1(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{2M}) = 0 \\ \dots \\ f_{2M}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{2M}) = 0 \end{cases} \quad (3.57)$$

Запишем уравнение в удобном виде, для этого введем обозначение вектор функции:

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}) \triangleq \mathbf{A} + \mathbf{B} \hat{\mathbf{x}}_{MAP} + C [\hat{\mathbf{x}}_{MAP}]^{2i-1}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{y}, \quad \mathbf{B} = -\frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H}, \quad C = -\frac{2i}{(2d^2)^i}, \quad (3.58)$$

$$\begin{cases} f_1(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{2M}) = A_1 + B_{1,1} \hat{x}_1 + \dots + B_{1,2M} \hat{x}_{2M} + C \hat{x}_1^{2i-1} \\ \dots \\ f_{2M}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{2M}) = A_{2M} + B_{2M,1} \hat{x}_1 + \dots + B_{2M,2M} \hat{x}_{2M} + C \hat{x}_{2M}^{2i-1} \end{cases} \quad (3.59)$$

Далее запишем итерационное уравнение

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}) \approx \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)}) + \mathbf{W}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)}) (\hat{\mathbf{x}}_{MAP} - \hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)}) = \mathbf{0}. \quad (3.60)$$

Или

$$\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p)} = \hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)} - \left(\mathbf{W}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)}) \right)^{-1} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)}), \quad (3.61)$$

где

$$\mathbf{W}(\hat{\mathbf{x}}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_{2M}} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_{2M}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{2M}(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{2M}(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{2M}(\mathbf{x})}{\partial x_{2M}} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

матрица Якоби [68, 86] размером $(2M \times 2M)$.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{W}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)}) = \\
& = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial(B_{1,1}\hat{x}_1^{(p-1)} + \dots + B_{1,2M}\hat{x}_{2M}^{(p-1)})}{\partial\hat{x}_1^{(p-1)}} & \dots & \frac{\partial(B_{1,1}\hat{x}_1^{(p-1)} + \dots + B_{1,2M}\hat{x}_{2M}^{(p-1)})}{\partial\hat{x}_{2M}^{(p-1)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial(B_{2M,1}\hat{x}_1^{(p-1)} + \dots + B_{2M,2M}\hat{x}_{2M}^{(p-1)})}{\partial\hat{x}_1^{(p-1)}} & \dots & \frac{\partial(B_{2M,1}\hat{x}_1^{(p-1)} + \dots + B_{2M,2M}\hat{x}_{2M}^{(p-1)})}{\partial\hat{x}_{2M}^{(p-1)}} \end{array} \right] + \\
& \quad + C \cdot (2i - 1) \cdot \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \hat{x}_1^{(p-1)} \\ \vdots \\ \hat{x}_{2M}^{(p-1)} \end{bmatrix} \right)^{(2i-2)}.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Или в матричном виде:

$$\mathbf{W}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)}) = \mathbf{B} + C \cdot (2i - 1) \cdot \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \hat{x}_1^{(p-1)} \\ \vdots \\ \hat{x}_{2M}^{(p-1)} \end{bmatrix} \right)^{(2i-2)}. \tag{3.64}$$

Для случая $M = 1$ и $i = 2$, степень при векторе неизвестных будет $2i - 1 = 3$. Матрица Якоби будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{W}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)})}{\partial x_{MAP\ 1}^{(p-1)}} & \frac{\partial f_1(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)})}{\partial x_{MAP\ 2}^{(p-1)}} \\ \frac{\partial f_2(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)})}{\partial x_{MAP\ 1}^{(p-1)}} & \frac{\partial f_2(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)})}{\partial x_{MAP\ 2}^{(p-1)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} + 3 \cdot C \cdot \begin{bmatrix} (\hat{x}_{MAP1}^{(p-1)})^2 & 0 \\ 0 & (\hat{x}_{MAP2}^{(p-1)})^2 \end{bmatrix}. \tag{3.65}$$

На первой итерации при начальном значении $\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(0)} = \mathbf{0}$, равном нулевому математическому ожиданию априорного распределения получаем уравнение вида:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(1)} &= \hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(0)} - \left(\mathbf{W}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(0)}) \right)^{-1} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(0)}) \\
\mathbf{W}(\mathbf{0}) &= \mathbf{B} \\
\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(0)}) &= \mathbf{A} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(0)} + C \left[\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(0)} \right]^{2i-1} \\
\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(0)}) &= \mathbf{A} \\
\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(1)} &= -\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}
\end{aligned} \tag{3.66}$$

С учетом введенных выше обозначений (3.58) имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}(\mathbf{0}) &= -\frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H}, \\ \mathbf{f}(\mathbf{0}) &= \frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{y}\end{aligned}\quad (3.67)$$

и в результате получаем оценку Zero Forcing (ZF) [5], т.е.

$$\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(1)} = \hat{\mathbf{x}}_{ZF} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{y}. \quad (3.68)$$

Как мы видим, на первой итерации нелинейной демодуляции методом Ньютона при негауссовской аппроксимации априорного распределения получается оценка, с методом Zero Forcing [113]. При этом, как будет показано далее, более точный учет априорных сведений, выбор начального приближения близкого к точному значению и увеличение числа итераций улучшит характеристики алгоритма демодуляции.

Чтобы избежать многократного вычисления обратной матрицы Якоби, рассмотрим метод одной касательной [138] (в [68] употребляется название модифицированный метод Ньютона). Этот метод, прежде всего, привлекателен тем, что матрицу Якоби достаточно вычислять всего один раз (например, при $p=1$), во-вторых свобода выбора начального значения $\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(0)}$, т.е. отсутствие требований к нулевому приближению.

$$\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p)} = \hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)} - \left(\mathbf{W}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(0)}) \right)^{-1} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)}). \quad (3.69)$$

Метод (3.69) с учетом обозначений (3.58) и выражения для матрицы Якоби (3.64) можем записать в виде:

$$\mathbf{W}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(1-1)}) = \mathbf{B} + C \cdot (2i-1) \cdot \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \hat{x}_1^{(1-1)} \\ \vdots \\ \hat{x}_{2M}^{(1-1)} \end{bmatrix}^{(2i-2)} \right) = \mathbf{B} + C(2i-1) \mathbf{I}_{2M}, \quad (3.70)$$

где \mathbf{I}_{2M} - единичная матрица.

Тогда итерационное уравнение модифицированного метода Ньютона будет иметь вид [35, 139]:

$$\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p)} = \hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)} - (\mathbf{B} + C(2i-1)\mathbf{I}_{2M})^{-1} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)}). \quad (3.71)$$

Следует отметить, что уравнение (3.71) является частным случаем метода простой итерации:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p)} &= S(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)}) \\ S(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} - (\mathbf{W})^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p)} &= \hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)} - (\mathbf{W})^{-1} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)}) \\ (\mathbf{W})^{-1} &= (\mathbf{B} + C(2i-1)\mathbf{I}_{2M})^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p)} &= \hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)} + \left(\frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \frac{2i}{(2d^2)^i} (2i-1)\mathbf{I}_{2M} \right)^{-1} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)}) \\ \tau &= \left(\frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \frac{2i}{(2d^2)^i} (2i-1)\mathbf{I}_{2M} \right)^{-1} = (\mathbf{W})^{-1} \\ \frac{\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p)} - \hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)}}{\tau} &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)}) \end{aligned} \quad (3.72)$$

Упрощение в численной реализации модифицированного метода (3.71) по сравнению с обычным (3.61) методом Ньютона состоит в том, что матрицу Якоби обращать надо лишь один раз, а это колоссально упрощает алгоритм [35]. При этом характеристики помехоустойчивости обоих алгоритмов уже при 8 итерациях практически совпадают и по сравнению с алгоритмом MMSE показывают выигрыш весьма существенный, около 6 дБ при вероятности ошибки на кадр равной 10^{-2} [139]. Результаты моделирования алгоритмов будут представлены ниже.

3.4. Сравнение характеристик помехоустойчивости алгоритмов демодуляции с нелинейным оцениванием символов

Для проверки эффективности предложенных алгоритмов нелинейной демодуляции с негауссовской аппроксимацией априорного распределения

проведено статистическое моделирование на ЭВМ, имитирующее работу алгоритмов демодуляции в условиях близких к реальным [35, 113, 139, 140]. Было осуществлено экспериментальное исследование характеристик помехоустойчивости предлагаемого нелинейного алгоритма MMSE (NMMSE) (3.40) [132], в котором операции интегрирования выполнены методом Монте-Карло (раздел 3.2) [76, 137] и оценки максимума апостериорной плотности методом Ньютона (3.61) и модифицированного метода Ньютона (3.71) раздела 3.3 [35, 113, 132, 139, 140].

Моделирование проводилось со следующими параметрами.

Параметр	Значение
Конфигурация системы MIMO (число передающих/приемных антенн)	16×16
Вид модуляции	16QAM
Режим передачи	пространственное мультиплексирование
Замирания в радиоканале MIMO	релеевские некоррелированные
Вид помехоустойчивого кодирования	турбокодирование (скорость 1/2; длина кадра 576 битов)
Алгоритм приема	демодулятор QAM и турбо-декодер, (стандарт LTE-Advanced [97])

На графиках используются обозначения:

- N_{tx} – число передающих антенн;
- N_{rx} – число приемных антенн.

На Рисунке Рис. 3.4 приведены зависимости битовой ошибки (BER) на выходе демодулятора без кодирования от отношения сигнал/шум на бит (E_b/N_0) в дБ. Для сравнения были исследованы алгоритмы NMMSE (3.37) с разными значениями параметра i распределения (3.36), а именно для $i=[2; 4; 8; 16]$ (на графике обозначены MC2, MC4, MC8 и MC16 соответственно) [132]. Также приведена кривая для линейного алгоритма MMSE (на графике MMSE). Из рисунка видно, что с увеличением i качество демодуляции улучшается, однако

степень улучшения постепенно снижается и кривые для $i = 8$ и $i = 16$ практически совпадают, что говорит о достижении достаточного порядка аппроксимации априорного распределения $p_{pr}(\mathbf{x})$ с помощью формулы (3.31). Энергетический выигрыш для этих случаев по сравнению с линейным алгоритмом MMSE составляет 2,5-3 дБ [132].

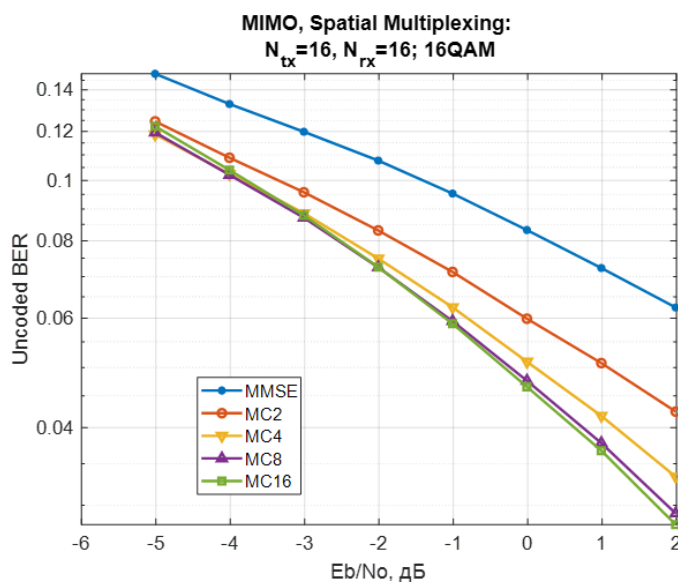


Рисунок 3.4 - Зависимости коэффициента битовых ошибок (BER) от отношения сигнал/шум для алгоритмов демодуляции без помехоустойчивого кодирования

На Рисунке 3.5 и Рисунке 3.6 изображены зависимости коэффициента битовых ошибок (BER) и коэффициента битовых ошибок (FER) на кадр от отношения сигнал/шум для аналогичных Рисунку 3.4 алгоритмов демодуляции только с помехоустойчивым кодированием. Мы получаем выигрыш от 3,2 дБ в случае BER на уровне 10^{-4} , а для FER на уровне 10^{-2} более 2,5 дБ. Как и для случая без кодирования при увеличении порядка i качество демодуляции улучшается, но начиная с $i = 8$ приращение выигрыша весьма мало, что говорит о приближении к пределу точности аппроксимации априорного распределения предложенным негауссовским распределением. По сравнению с характеристиками алгоритма MMSE полученный энергетический выигрыш при использовании негауссовской аппроксимации априорного распределения сопоставим с результатами работы алгоритма K-Best имеющего наиболее близкие значения к ML (нелинейного с полным перебором), который, в свою очередь,

обладает наилучшим качеством оценивания. Но, как упоминалось в первом разделе, для большого числа антенн на практике реализация алгоритма ML не осуществима из-за высокой вычислительной сложности [16, 17, 37, 141].

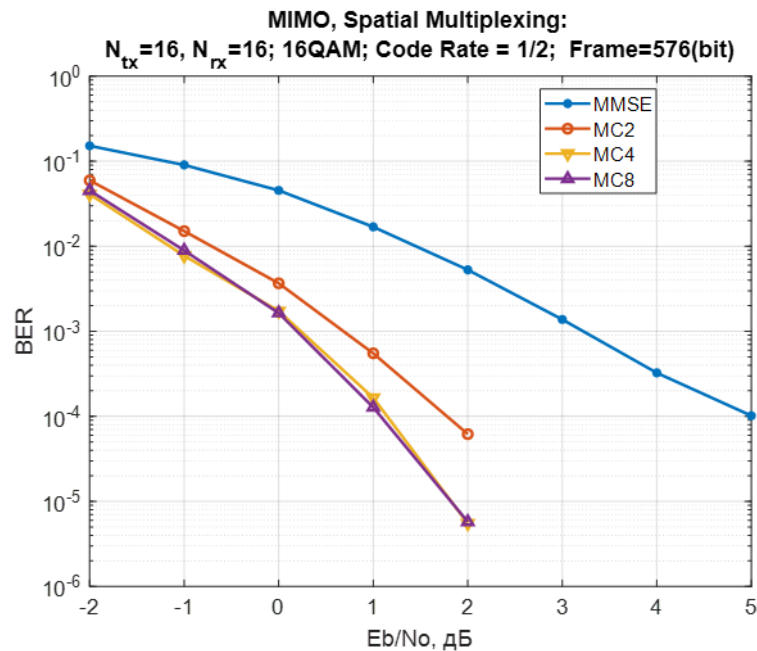


Рисунок 3.5 – Зависимости коэффициента битовых ошибок (BER) от отношения сигнал/шум для алгоритмов демодуляции с помехоустойчивым кодированием

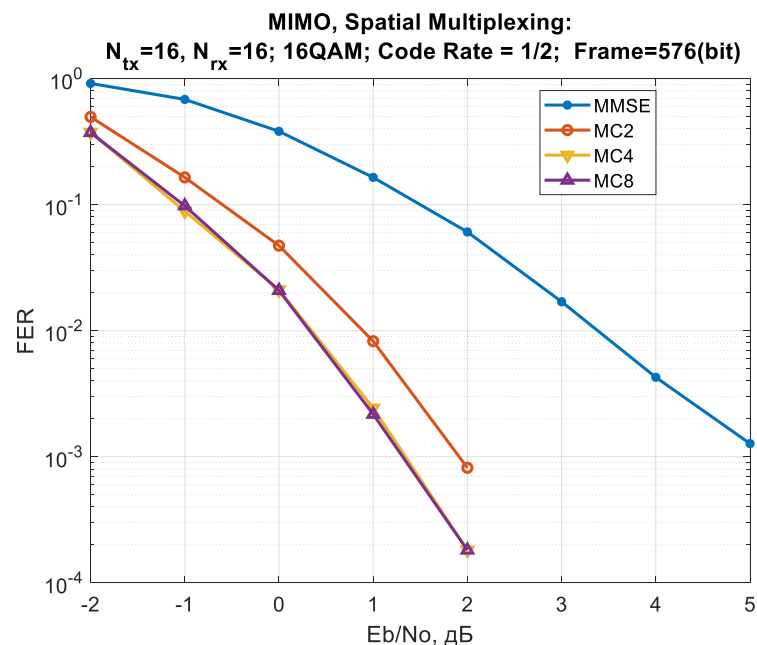


Рисунок 3.6 – Зависимости коэффициента ошибочных кадров (FER) от отношения сигнал/шум для алгоритмов демодуляции с помехоустойчивым кодированием

Для того чтобы получить более четкое представление о результатах помехоустойчивости, полученных с применением демодулятора NMMSE, было выполнено моделирование совместно с алгоритмом K-best при 1024 проверяемых

комбинациях, т.е. можно сказать, что характеристики помехоустойчивости NMMSE сравниваются с характеристиками близкими к значениям алгоритма ML. Результаты исследования приведены на графиках, где построены зависимости BER без кодирования (Рисунок 3.7) и зависимости вероятности ошибки BER (на бит) (Рисунок 3.8) и FER (на кадр) для системы с турбо кодированием. В предложенном алгоритме использовалась аппроксимация с параметром $i = 4$ [35, 113, 132, 139, 140].

На графиках введены следующие обозначения алгоритмов: MMSE–линейный алгоритм минимума среднеквадратической ошибки MMSE; MC4–нелинейный MMSE, предложенный алгоритм с негауссовской аппроксимацией с параметром $i = 4$; Kbest-1024– алгоритм K-Best с числом проверяемых комбинаций 1024.

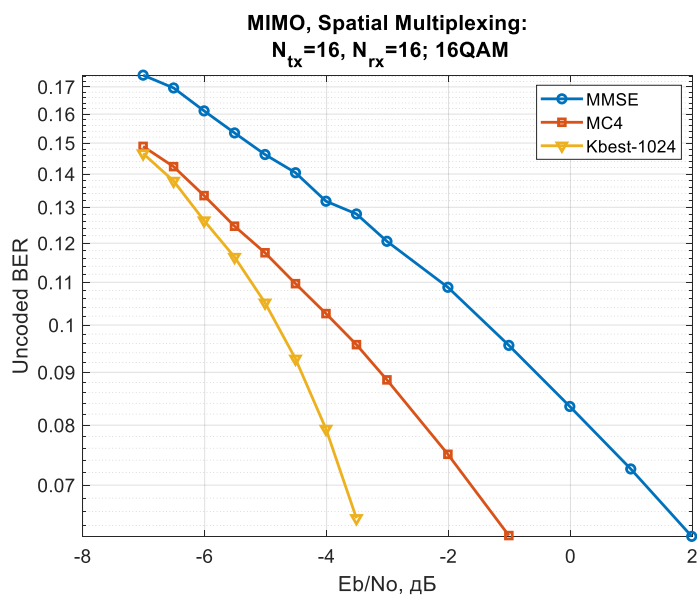


Рисунок 3.7 – Зависимости коэффициента битовых ошибок (BER) от отношения сигнал/шум для алгоритмов демодуляции без помехоустойчивого кодирования

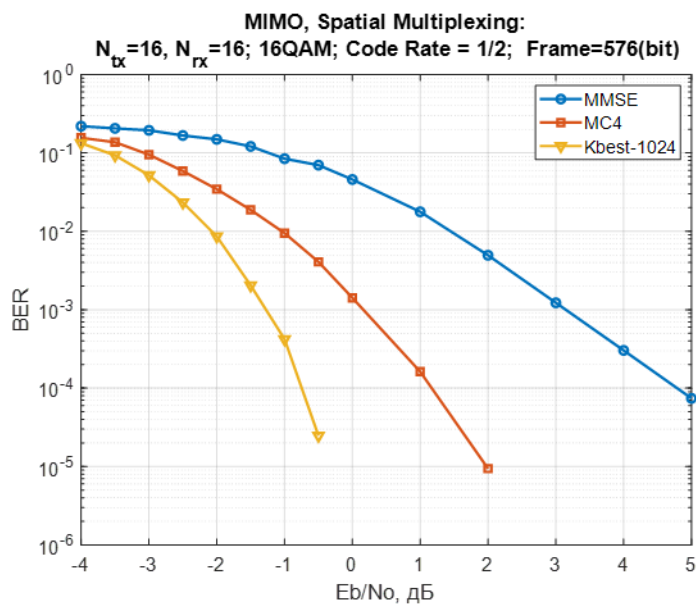


Рисунок 3.8 – Зависимости коэффициента битовых ошибок (BER) от отношения сигнал/шум для алгоритмов демодуляции с помехоустойчивым кодированием

На Рисунке 3.9 приведены характеристики FER (на кадр) для системы с турбо кодированием.

Из графиков видно, что энергетический выигрыш алгоритма NMMSE для варианта с кодированием по сравнению с линейным алгоритмом MMSE составляет более 3 дБ (при $FER = 0,01$). При этом алгоритм NMMSE проигрывает алгоритму K-best, близкому к алгоритму ML, всего порядка 1,5 дБ [35, 113, 132, 139, 140].

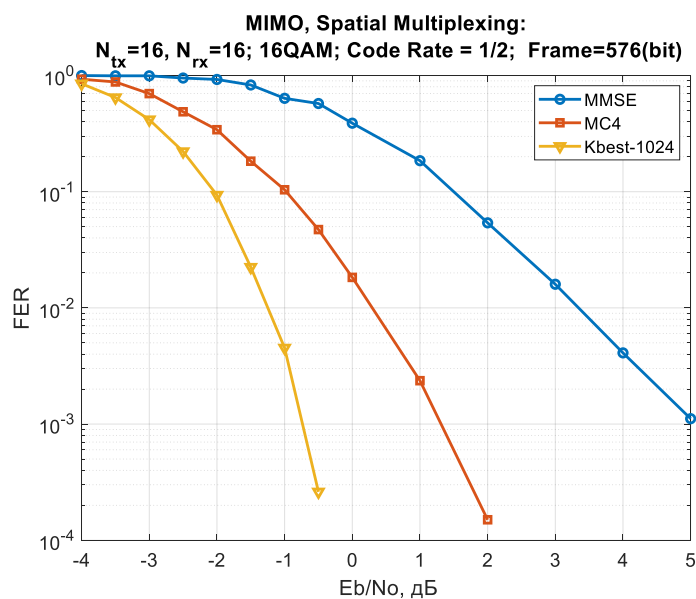


Рисунок 3.9 – Помехоустойчивость алгоритмов демодуляции с кодированием

В системах Massive MIMO с увеличением числа антенн сильно возрастает сложность алгоритмов демодуляции, поэтому для снижения сложности обоснованно и широко используются итерационные алгоритмы [5, 33, 38, 60]. Применяя эти алгоритмы, можно эффективно обращаться с операциями между векторами или матрицами.

Далее представлены характеристики помехоустойчивости итерационных алгоритмов на основе негауссовской аппроксимации априорного распределения с использованием метода Ньютона (3.61) и модифицированного метода Ньютона (3.71).

На Рисунке 3.10 приведены зависимости коэффициента ошибочных кадров (FER) от отношения сигнал/шум в дБ с учетом помехоустойчивого кодирования с применением следующих алгоритмов [35, 113, 139, 140]:

- MMSE – линейный алгоритм минимума среднеквадратической ошибки MMSE;
- MC2, MC4, MC8 – нелинейный MMSE, предложенный алгоритм с негауссовской аппроксимацией априорного распределения $p_{pr}(\mathbf{x})$ с помощью формулы (3.31) для случаев $i=[2; 4; 8]$;
- Kbest-4096, Kbest-256 – алгоритм K-Best [110] с числом проверяемых комбинаций 4096 и 256, соответственно;
- Nw 8it – алгоритм демодуляции, осуществляющий решение нелинейного уравнения (3.57) с использованием метода Ньютона (3.60) с 8 итерациями;
- mNw 8it – алгоритм демодуляции, осуществляющий решение нелинейного уравнения (3.57) с использованием нелинейного итерационного модифицированного метода Ньютона (3.71) с 8 итерациями [113].

Моделирование проводилось со следующими параметрами.

Параметр	Значение
Конфигурация системы MIMO (число передающих/приемных антенн)	32×32
Вид модуляции	256QAM
Режим передачи	пространственное мультиплексирование
Замирания в радиоканале MIMO	релеевские некоррелированные
Вид помехоустойчивого кодирования	турбокодирование (скорость 1/2; длина кадра 576 битов)
Алгоритм приема	демодулятор QAM и турбо-декодер, (стандарт LTE-Advanced [97])

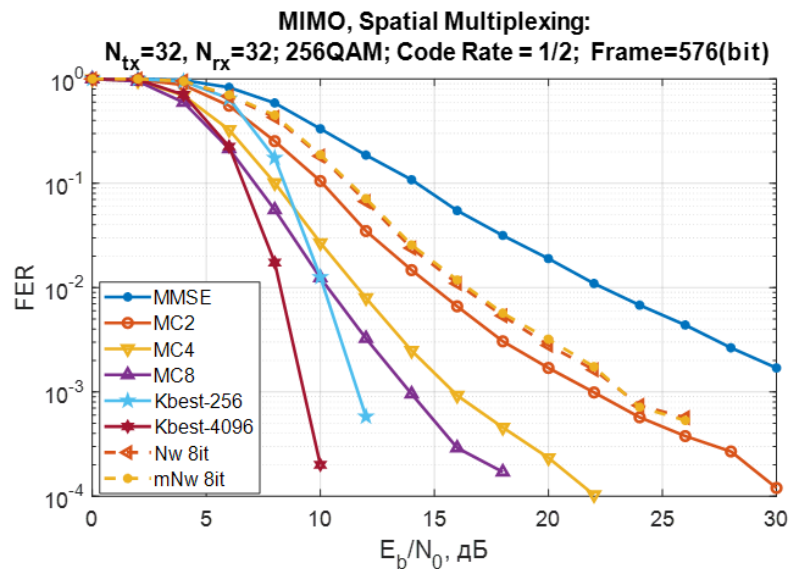


Рисунок 3.10 – График помехоустойчивости разных алгоритмов демодуляции с помехоустойчивым кодированием (характеристики FER) 32 антенны 256QAM

На Рисунке 3.10 видно что, применяя негауссовскую аппроксимацию априорного распределения и итерационные алгоритмы метода Ньютона и модифицированного метода Ньютона при 8 итерациях, получаем выигрыш по сравнению с линейным алгоритмом MMSE около 6 дБ при вероятности ошибки на кадр 10^{-2} в системе конфигурации антенн 32×32 , модуляцией 256QAM и помехоустойчивым кодированием [35, 113, 139, 140]. Этот результат на 1,3 дБ отличается от полученного с помощью метода Монте-Карло с параметром $i = 2$. Алгоритм K-best с параметром $K=256$ и метод Монте-Карло с параметром $i = 8$

имеют преимущество в помехоустойчивости над алгоритмом MMSE примерно 12 дБ. Схожесть характеристик помехоустойчивости уверенно подтверждает правомерность использования предложенных негауссовской аппроксимации и итерационных алгоритмов.

Для исследования эффективности алгоритмов в условиях различных антенных конфигураций далее приведены характеристики помехоустойчивости, полученные путем моделирования со следующими параметрами.

Параметр	Значение
Конфигурация системы MIMO (число передающих/приемных антенн)	32×32 ; 64×64 ; 96×96
Вид модуляции	256QAM
Режим передачи	пространственное мультиплексирование
Замирания в радиоканале MIMO	релеевские некоррелированные
Вид помехоустойчивого кодирования	турбокодирование (скорость 1/2; длина кадра 576 битов)
Алгоритм приема	демодулятор QAM и турбо-декодер, (стандарт LTE-Advanced [97])

На графиках используются обозначения:

- MMSE – алгоритм демодуляции, оптимальный по критерию минимума среднеквадратической ошибки (3.20),
- Nw, Nw-2it, Nw-4it, Nw-8it, Nw-16it – алгоритм демодуляции, осуществляющий решение нелинейного уравнения (3.35) с использованием нелинейного итерационного метода Ньютона (3.61) с различным числом итераций 2,4,8,16 соответственно [113].
- mNw, mNw-2it, mNw-4it, mNw-8it, mNw-16it – алгоритм демодуляции, осуществляющий решение нелинейного уравнения (3.35) с использованием нелинейного итерационного модифицированного метода Ньютона (3.71) с различным числом итераций 2,4,8,16 соответственно;

- N_{tx} – число передающих антенн;
- N_{rx} – число приемных антенн.

На Рисунке 3.11 представлены характеристики помехоустойчивости алгоритмов на основе модифицированного метода Ньютона (mNw) (3.71) и обычного метода Ньютона (Nw) (3.61) при различном числе итераций. Анализ рисунка показывает, что с ростом числа итераций помехоустойчивость алгоритмов mNw и Nw становится все лучше характеристик MMSE. При 8 итерациях оба метода показывают примерно одинаковый результат, расхождение составляет не более 0,05 дБ, при этом отличие алгоритмов в вычислительной сложности весьма существенное.

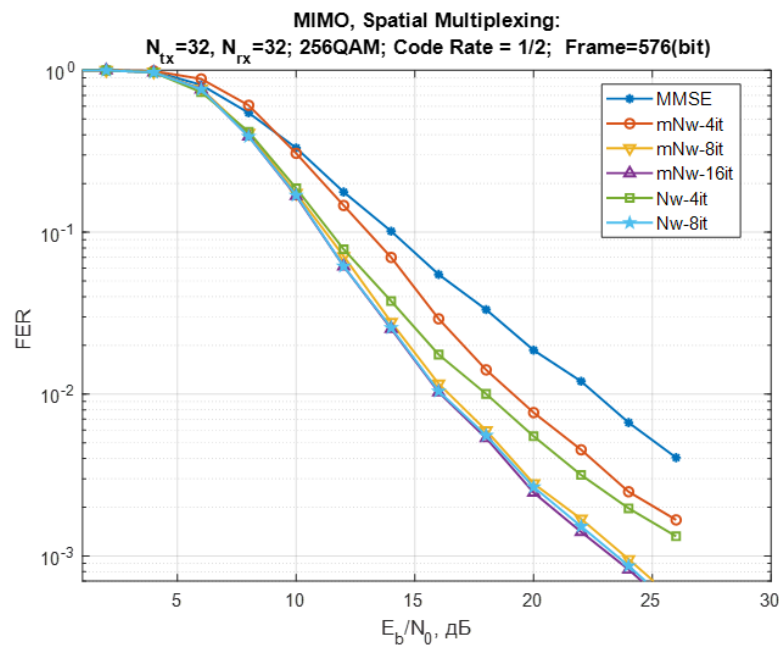


Рисунок 3.11 – Помехоустойчивость алгоритмов MMSE, метода Ньютона и модифицированного метода Ньютона в системе Massive MIMO конфигурации 32×32 256QAM

Для системы с конфигурацией антенн 32×32 , модуляцией 256QAM и помехоустойчивым кодированием использование алгоритмов mNw и Nw при 8 итерациях позволяет получить по отношению с алгоритмом MMSE выигрыш 6,2 дБ при вероятности ошибки на кадр 10^{-2} (FER).

С увеличением числа антенн тенденция роста выигрыша в помехоустойчивости по сравнению с алгоритмом MMSE у демодуляторов

модифицированного и обычного метода Ньютона сохраняется, например при 8 итерациях преимущество составляет около 6,4 дБ на уровне $FER = 0,01$.

На Рисунке 3.12 представлены графики зависимостей помехоустойчивости демодуляторов MMSE и метода Ньютона (Nw) для разного числа итераций в системе Massive MIMO с 64 антеннами, а на Рисунке 3.13 приведены аналогичные характеристики для алгоритма модифицированного метода Ньютона (mNw) [35, 113, 139, 140].

На Рисунке 3.14 отчетливо видно, что при 8 итерациях разница в помехоустойчивости у алгоритмов метода Ньютона и модифицированного метода Ньютона составляет всего 0,05 дБ при $FER = 0,05$. В 4 разделе будет показано, что вычислительные сложности этих алгоритмов отличаются весьма существенно.

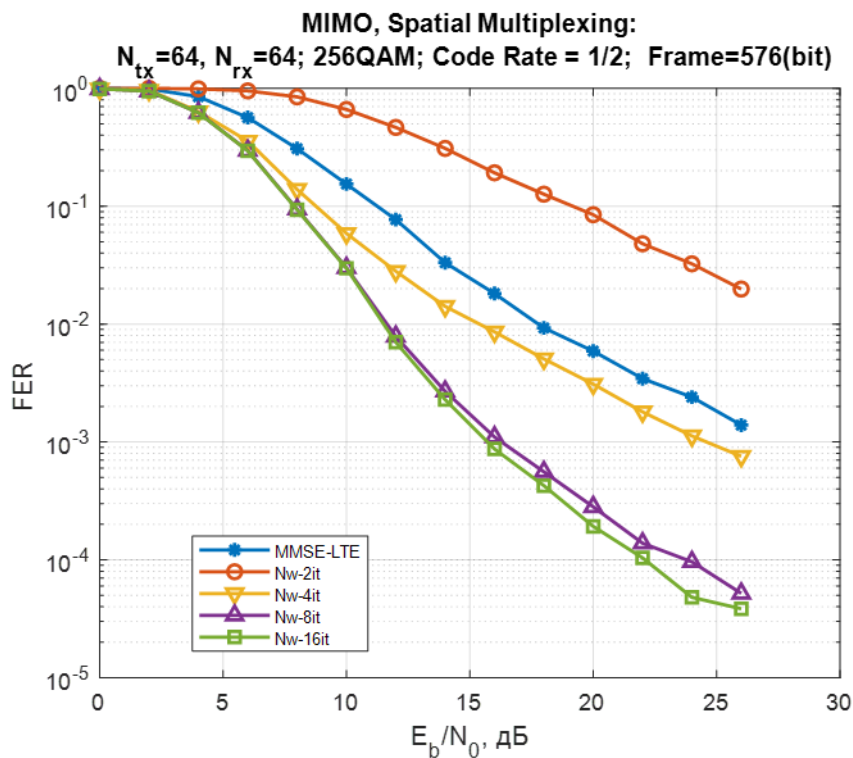


Рисунок 3.12 – График вероятности ошибки на кадр алгоритмов MMSE, метода Ньютона с различным числом итераций 64 антенны 256QAM

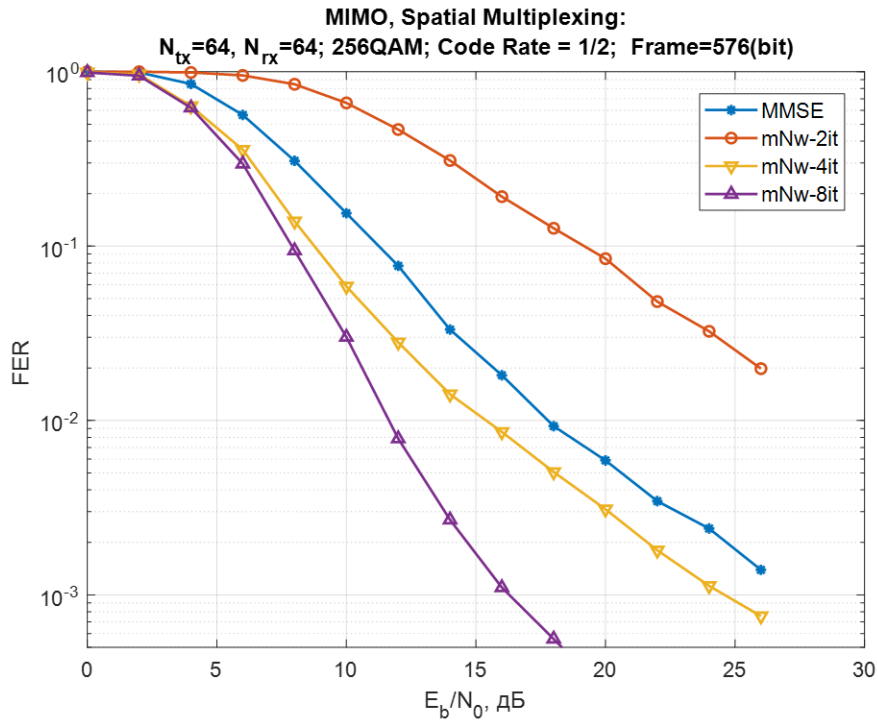


Рисунок 3.13 - График вероятности ошибки на кадр алгоритмов MMSE и модифицированного метода Ньютона с различным числом итераций 64 антенны 256QAM

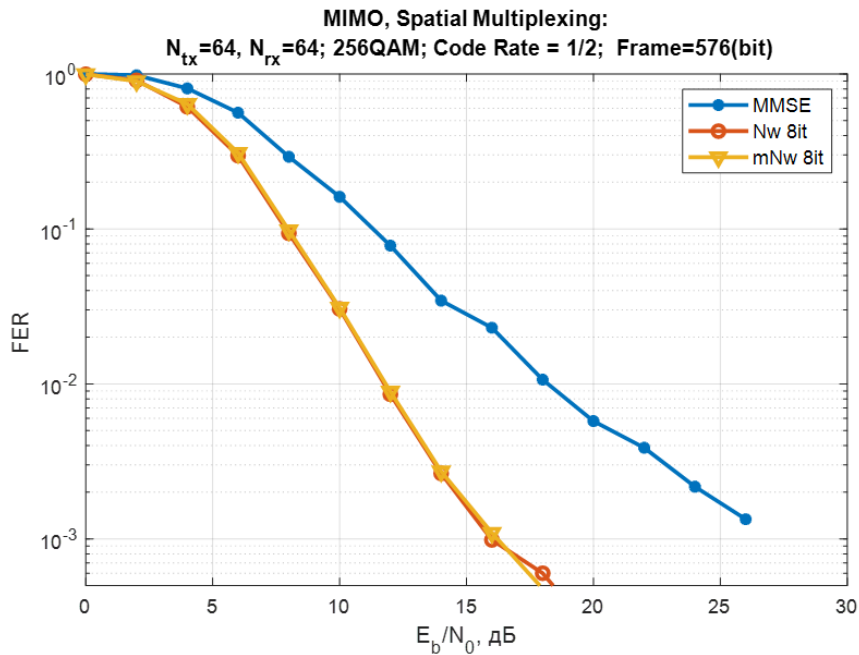


Рисунок 3.14 - График помехоустойчивости алгоритмов демодуляции MMSE, метода Ньютона и модифицированного метода Ньютона с помехоустойчивым кодированием, модуляцией 256QAM 8 итераций 64 антенны

Далее проводилось исследование работы алгоритма демодуляции, основанного на модифицированном методе Ньютона с порядком негауссовской аппроксимации $i=2$, в условиях системы Massive MIMO неизменной модуляции высокого порядка, но с переменным числом антенн в сравнении с результатами

помехоустойчивости алгоритма K-best [110] и алгоритма MMSE. На графиках кривые алгоритмов обозначены: mNw (6, 8,10,12,14,16) it, K-best(K=16, 32, 64,128, 256), MMSE, соответственно. Результаты моделирования получены для модуляции 256QAM для различных антенных конфигураций, 32×32 – Рисунок 3.15, 64×64 – Рисунок 3.16.

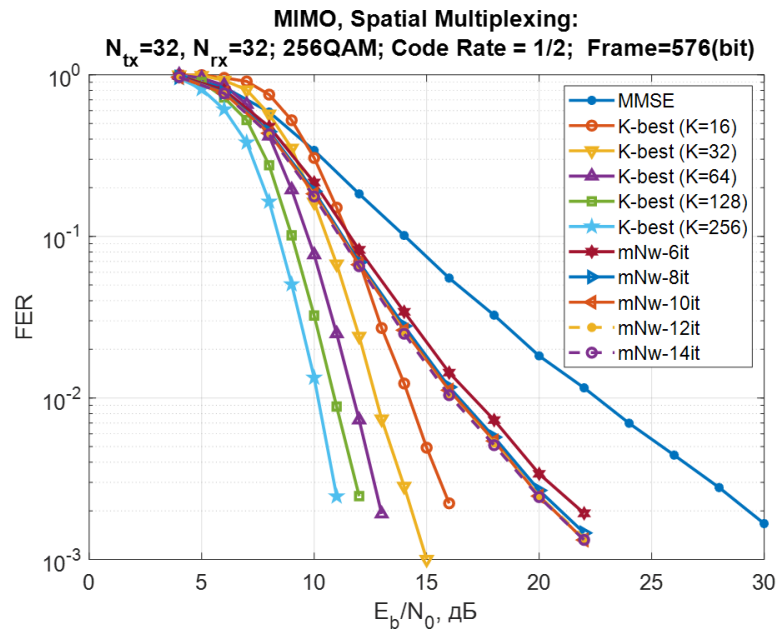


Рисунок 3.15 – График вероятности ошибки на кадр алгоритмов демодуляции MMSE, K-best и модифицированного метода Ньютона 32 антенны с помехоустойчивым кодированием и модуляцией 256QAM

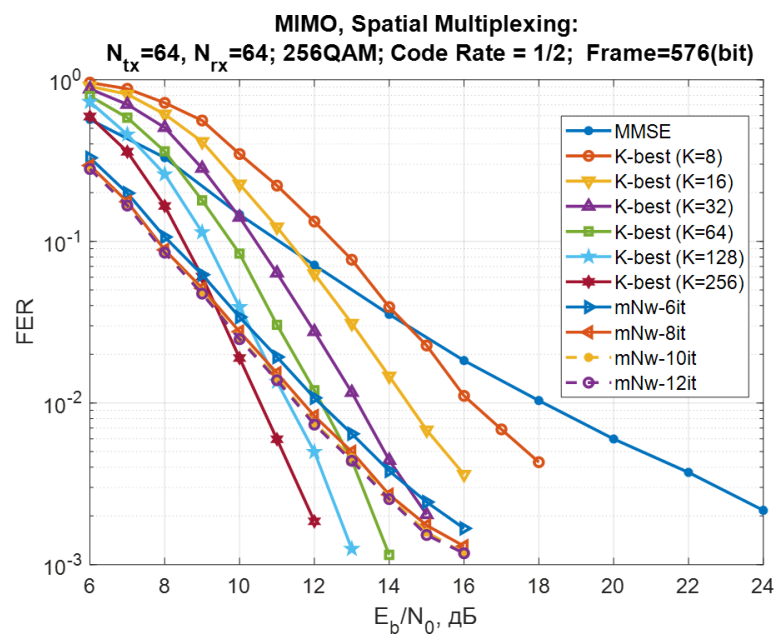


Рисунок 3.16 – График вероятности ошибки на кадр алгоритмов демодуляции MMSE, K-best и модифицированного метода Ньютона 64 антенны с помехоустойчивым кодированием и модуляцией 256QAM

На Рисунке 3.17 представлены результаты для антенной конфигурации 96×96 .

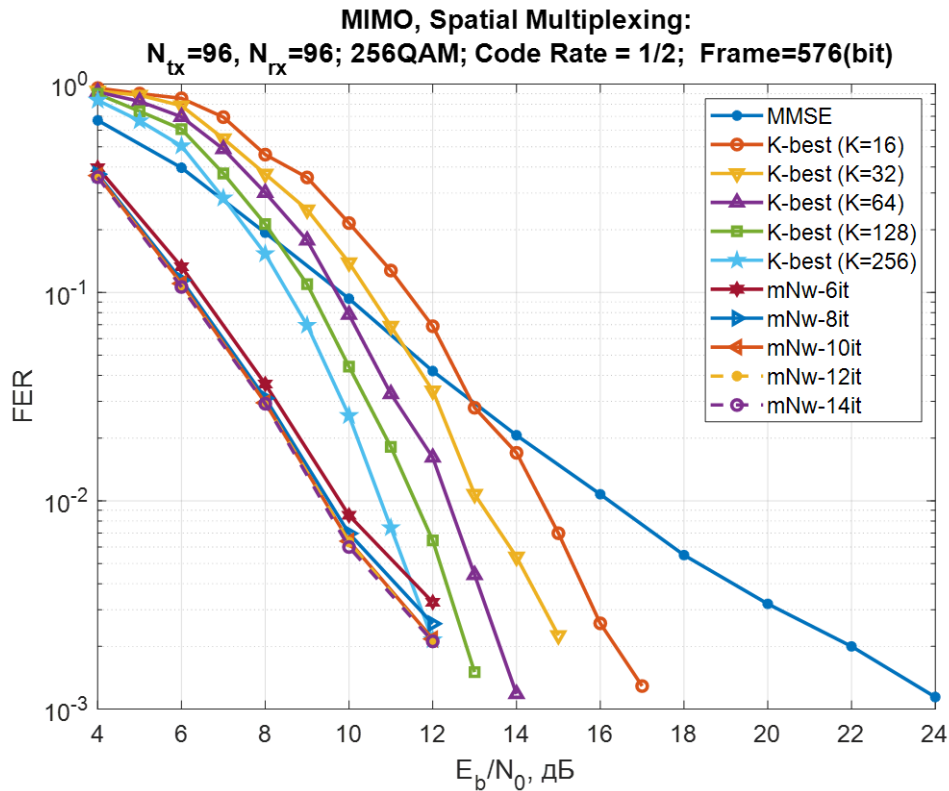


Рисунок 3.17 - График вероятности ошибки на кадр алгоритмов демодуляции MMSE, K-best и модифицированного метода Ньютона 96 антенн с помехоустойчивым кодированием и модуляцией 256QAM

Отчетливо видно, что преимущество в помехоустойчивости алгоритма модифицированного метода Ньютона по сравнению с MMSE для конфигурации антенн 32×32 составляет около 6,5 дБ при $FER = 0,01$, а для конфигурации антенн 96×96 получается уже почти 7 дБ для FER на уровне 0,01 [139].

На приведенных рисунках хорошо видно, что для того чтобы добиться определенного энергетического преимущества над MMSE при вероятности ошибки на кадр $FER = 10^{-2}$ с увеличением числа антенн алгоритму K-best требуется все большее значение параметра K .

С ростом числа антенн эффективность предложенного алгоритма модифицированного метода Ньютона с негауссовской аппроксимацией становится близкой значениям помехоустойчивости алгоритма K-best с большим числом перебираемых комбинаций ($K = 256$) [35]. Особо отметим, что разница в вычислительной сложности алгоритмов K-best и mNw весьма значительна,

вычислительная сложность последнего на порядки ниже сложности алгоритма K-best, что будет подтверждено в 4 разделе.

Для исследования эффективности алгоритма модифицированного метода Ньютона на основе негауссовской аппроксимации в системах Massive MIMO с конфигурацией 96×96 в условиях увеличения порядка модуляции было проведено моделирование со следующими параметрами [139]:

Параметр	Значение
Конфигурация системы MIMO (число передающих/приемных антенн)	96×96
Вид модуляции	64QAM, 1024QAM;
Режим передачи	пространственное мультиплексирование
Замирания в радиоканале MIMO	релеевские некоррелированные
Вид помехоустойчивого кодирования	турбокодирование (скорость 1/2; длина кадра 576 битов)
Алгоритм приема	демодулятор QAM и турбо-декодер, (стандарт LTE-Advanced [97])

На графиках введены следующие обозначения:

- MMSE – алгоритм демодуляции, оптимальный по критерию минимума среднеквадратической ошибки (3.20),
- mNw mNw-4it, mNw-6it, mNw-8it, mNw-12it – алгоритм демодуляции, осуществляющий решение нелинейного уравнения (3.35) с использованием нелинейного итерационного модифицированного метода Ньютона (3.71) с различным числом итераций 4,6,8,12 соответственно;
- N_{tx} – число передающих антенн;
- N_{rx} – число приемных антенн.

На Рисунке 3.18 представлены результаты с 64QAM, а на Рисунке 3.19 с 1024QAM.

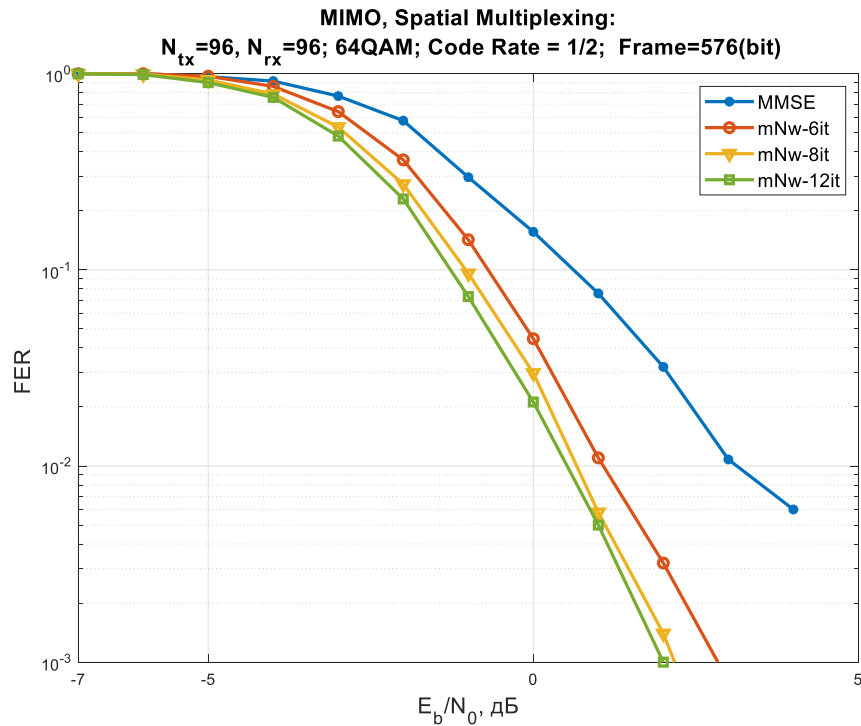


Рисунок 3.18 - График вероятности ошибки на кадр алгоритмов MMSE и модифицированного метода Ньютона

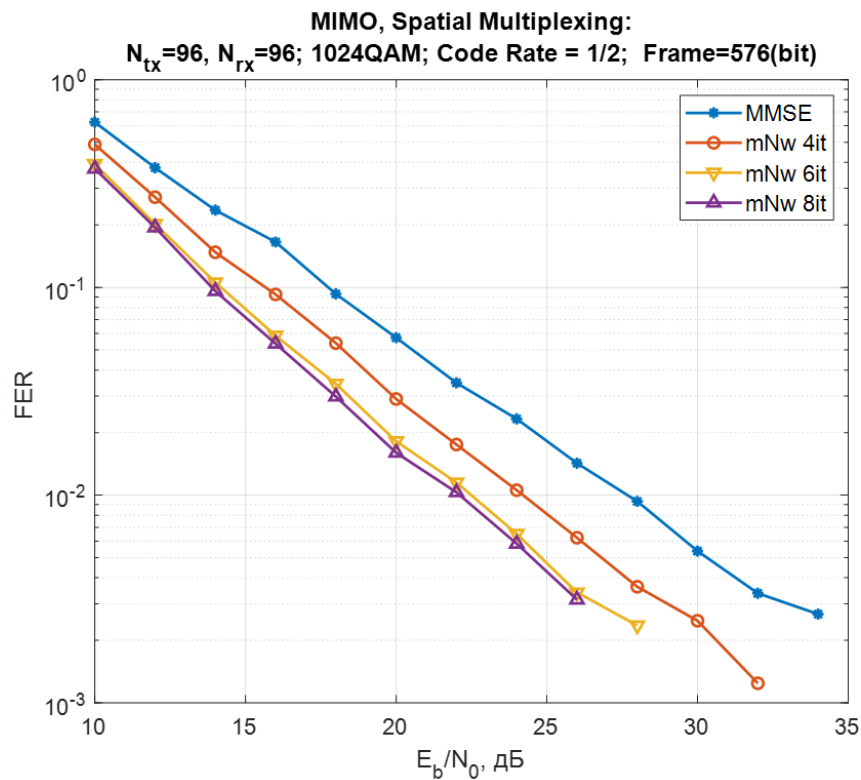


Рисунок 3.19 - Помехоустойчивость алгоритмов MMSE и модифицированного метода Ньютона

На Рисунке 3.18 видно, что для применяемой модуляции 64QAM энергетический выигрыш предложенного алгоритма с негауссовской аппроксимацией априорного распределения по сравнению с алгоритмом

линейной оценки MMSE при изменении числа итераций модифицированного метода Ньютона от 6 до 12 составляет от 2 дБ до 2,5 дБ на уровне $FER = 10^{-2}$.

При увеличении кратности модуляции до 1024QAM при 8 итерациях модифицированный метод Ньютона обеспечивает уже почти 5,6 дБ при $FER = 0,01$, что показано на Рисунке 3.19.

Таким образом, основанный на использовании негауссовской аппроксимации априорного распределения алгоритм модифицированного метода Ньютона при увеличении числа антенн и кратности модуляции обладает эффектом улучшения характеристик помехоустойчивости, и при этом имеет приемлемую вычислительную сложность.

Полученный результат открывает многообещающие перспективы для применения в системах Massive MIMO алгоритма модифицированного метода Ньютона с негауссовской аппроксимацией априорного распределения [35, 113, 132, 136, 139, 140, 142].

3.5. Выводы к разделу 3

1. Для демодуляции в системах Massive MIMO предложено использование семейства распределений с негауссовской аппроксимацией априорного распределения информационных символов, в котором гауссовское распределение и равномерное распределение являются крайними частными случаями. Использование этого семейства распределений позволяет синтезировать нелинейные алгоритмы демодуляции с характеристиками помехоустойчивости лучшими, чем у алгоритма MMSE.
2. Энергетический выигрыш NMMSE алгоритма на основе негауссовской аппроксимации априорного распределения (нелинейных оценок MMSE, полученных методом Монте-Карло) по сравнению с линейным

алгоритмом MMSE составляет более 3 дБ на уровне $FER = 0,01$ для систем MIMO конфигурации 16×16 с модуляцией 16QAM. При этом, алгоритм NMMSE проигрывает алгоритму K-best, близкому к алгоритму ML, не более 1,5 дБ. Что доказывает правильность предложенного вида негауссовской аппроксимации априорного распределения.

3. В результате применения негауссовской аппроксимации априорного распределения информационных символов в задаче демодуляции для систем MIMO возможно получение существенного выигрыша в помехоустойчивости по сравнению с алгоритмом MMSE. При этом задача демодуляции сводится к решению системы нелинейных (степенных) уравнений – решение можно искать с помощью итерационных методов.
4. Показано, что применяя негауссовскую аппроксимацию априорного распределения и итерационные методы Ньютона и модифицированного метода Ньютона при 8 итерациях, получаем выигрыш по сравнению с линейным алгоритмом MMSE около 6,4 дБ при вероятности ошибки на кадр 10^{-2} в системе MIMO конфигурации антенн 64×64 , модуляцией 256QAM и помехоустойчивым кодированием.
5. При использовании модифицированного метода Ньютона выигрыш составляет от 2 дБ до 7 дБ ($FER=0,01$) по сравнению с алгоритмом MMSE в зависимости от кратности модуляции, числа антенн в системе. Экспериментально было доказано, что для более сложных конфигураций систем Massive MIMO с увеличением порядка модуляции предложенный алгоритм с использованием негауссовской аппроксимации и модифицированного метода Ньютона становится более эффективным.

4. АНАЛИЗ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ И ПРАКТИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗУЕМОСТИ АЛГОРИТМОВ ДЕМОДУЛЯЦИИ ДЛЯ СИСТЕМ MASSIVE MIMO

4.1. Вычислительная сложность алгоритмов демодуляции

Технология Massive MIMO в сетях пятого поколения (5G) приведет к повышению производительности, энергоэффективности и спектральной эффективности, но, к сожалению, огромное количество антенн серьезно усложняют алгоритмы демодуляции. Поэтому оценка вычислительной сложности и возможность аппаратной реализации является необходимым элементом разработки новых алгоритмов демодуляции.

Алгоритмы демодуляции представляются в виде численных алгоритмов, т.е. последовательности арифметических операций, которые нужно выполнить, чтобы получить решение задачи.

Однако способность решить поставленную задачу с заданным качеством, не гарантирует, что этот алгоритм может быть практически использован в реальной системе связи, поскольку для реализации алгоритма требуется выполнить слишком большое количество арифметических операций или требуется слишком большой объем памяти для хранения промежуточных результатов вычислений. Как будет показано ниже, алгоритм максимального правдоподобия (ML) чрезмерно сложен из-за полного перебора, и, не смотря на самые лучшие характеристики помехоустойчивости, не подходит для применения в системах Massive MIMO.

Выполнение алгоритма за заданное время определяет эффективность алгоритма и непосредственно зависит от числа арифметических операций,

необходимых для выполнения алгоритма, а также от производительности вычислительного устройства [34, 80, 81].

Проведем сравнение различных алгоритмов, используя только число необходимых для их реализации арифметических операций, т.е. число элементарных математических операций умножения/деления, сложения/вычитания над действительными числами с плавающей точкой [35, 36], не привязываясь при этом к конкретной аппаратной реализации. Это число арифметических операций и будет определять вычислительную сложность алгоритма [6, 143].

Рассматриваемые алгоритмы по их вычислительной сложности можно отнести к одному из известных классов сложности:

- класс алгоритмов полиномиальной сложности;
- класс алгоритмов экспоненциальной сложности.

Алгоритм принадлежит классу полиномиальной сложности, если его асимптотическая вычислительная сложность $f(N)$ не превышает некоторого полинома $P(N) = \sum_{p=0}^m \alpha_p N^p$. Число m определяет порядок сложности алгоритма.

Если m равно 3, то алгоритм имеет кубическую сложность.

Алгоритм имеет экспоненциальную сложность, если его асимптотическая вычислительная сложность $f(N)$ не превышает некоторой экспоненциальной функции $f(N) < A\alpha^N$.

Известно, что скорость роста экспоненциальной функции всегда больше скорости роста полинома любой степени, поэтому при больших значениях размера входных данных N вычислительная сложность алгоритма экспоненциальной сложности всегда превышает вычислительную сложность алгоритма полиномиальной сложности [41, 42, 80, 81, 82, 83, 84, 144, 145, 146].

4.2. Вычислительная сложность известных алгоритмов демодуляции

Проведем подсчет числа арифметических операций, а именно умножения/деления, сложения/вычитания над действительными числами, необходимых для реализации алгоритмов демодуляции [36]. Будем использовать комплексную модель (3.1) и эквивалентную действительную модель (3.2), при этом будем полагать, что число антенн на передающей и приемной сторонах одинаково и равно M [36].

4.2.1. Вычислительная сложность алгоритма максимального правдоподобия (ML)

Выражение оценки демодулятора, оптимального по критерию максимального правдоподобия имеет следующий вид [5]:

$$\hat{\mathbf{x}}^{ML} = \arg \min_{\mathbf{x} \in S} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 \quad (4.1)$$

Введем обозначения квадрата нормы $norm^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})'(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) = \mathbf{r}'\mathbf{r}$; невязки $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}$.

Знаком $\| \cdot \|$ обозначена Евклидова норма.

Чтобы получить оценку ML необходимо выполнить перебор по всем возможным состояниям вектора информационных символов. Например, для BPSK нужно вычислить 2^M норм, для 64QAM надо вычислить 64^M норм [36], для антенной конфигурации 8×8 это составит $2,8 \cdot 10^{14}$ раз [36].

Проведем подсчет вычислительной сложности демодулятора ML в условиях применяемой модуляции BPSK и антенной конфигурации $M \times M$.

Сначала проведем анализ вычислительной сложности алгоритма (4.1) в предположении, что все вектора и матрицы являются действительными и будем называть этот случай - случай простой действительной модели.

Результат вычислений представим в виде таблицы. Выполнение алгоритма описано поэтапно, в первом столбце приводится действие с указанием размерности матриц и векторов. Далее указывается вид необходимых операций, при чем сложение будем обозначать знаком (Σ), а умножение знаком (\times). В последнем столбце указано число операций определенного вида [36].

Результаты расчета сложности демодулятора ML приведены в Таблице 4.1 [36].

Таблица 4.1 Вычислительная сложность алгоритма ML (простая действительная модель) [36, 107, 108]

Действие и необходимые операции		Число операций
$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}$	\times	M^2
умножение матрицы $M \times M$ на вектор $M \times 1$	Σ	$M \cdot (M - 1)$
$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$	\times	-
сумма вектора $M \times 1$ и вектора $M \times 1$	Σ	M
$\mathbf{r}'\mathbf{r}$	\times	M
умножение вектора $1 \times M$ на вектор $M \times 1$	Σ	$(M - 1)$
всего операций для вычисления 1 нормы	\times	$(M^2 + M)$
	Σ	$(M^2 + M - 1)$
всего операций для реализации демодулятора ML	\times	$(M^2 + M) \cdot 2^M$
	Σ	$(M^2 + M - 1) \cdot 2^M$

Далее получим вычислительную сложность для комплексной модели (3.1). Для сложения двух комплексных чисел используется две операции сложения действительных чисел, а для умножения двух комплексных чисел понадобится четыре операции умножения действительных чисел и две операции сложения действительных чисел [92, 36].

$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d) \text{ требует } 2(\Sigma). \quad (4.2)$$

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(ad + dc) \text{ требует } 4(\times) \text{ и } 2(\Sigma). \quad (4.3)$$

Однако, если числа комплексно-сопряженные, то получаем:

$$(a + jb) + (a - jb) = 2a \text{ требует } 1(\Sigma), \quad (4.4)$$

$$(a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 \text{ требует } 2(\times) \text{ и } 1(\Sigma). \quad (4.5)$$

Для наглядности приведем подробно подсчет числа операций при произведении комплексных строки и столбца размерности 1×2 и 2×1 соответственно,

$$\begin{aligned} & (h_{1r} + jh_{1i} \quad h_{2r} + jh_{2i}) \cdot \begin{pmatrix} a_{1r} + ja_{1i} \\ a_{2r} + ja_{2i} \end{pmatrix} = \\ & = ((h_{1r} + jh_{1i})(a_{1r} + ja_{1i}) + (h_{2r} + jh_{2i})(a_{2r} + ja_{2i})) = \quad . \quad (4.6) \\ & = (h_{1r}a_{1r} + jh_{1i}a_{1r} + h_{1r}ja_{1i} - h_{1i}a_{1i} + h_{2r}a_{2r} + jh_{2i}a_{2r} + h_{2r}ja_{2i} - h_{2i}a_{2i}) \end{aligned}$$

Как мы видим, нам потребуется сложений 6 и 8 умножений. Для размерности векторов $1 \times M$ требуется $4M$ умножений (\times) и $2M + 2(M - 1) = 4M - 2$ операций сложения (Σ) [36].

В случае комплексно-сопряженных векторов размерности $1 \times M$ число необходимых операций сокращается до $2M$ умножений (\times) и $2M - 1$ сложений (Σ).

Умножение матриц требует разного числа операций, в зависимости от свойств матриц.

Рассмотрим умножение двух действительных матриц размерности 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 + bc_1 & ab_1 + bd_1 \\ ca_1 + dc_1 & cb_1 + dd_1 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

требуется 8 умножений и 4 сложения [36].

Если матрицы разные, действительные размера $M \times M$ тогда требуется M^3 умножений (\times) и $(M^3 - M^2)$ операций сложения (Σ).

Рассмотрим случай умножения двух комплексных матриц размера 2×2 .

$$\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1C_1 + A_2C_3 & A_1C_2 + A_2C_4 \\ A_3C_1 + A_4C_3 & A_3C_2 + A_4C_4 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Если элементы матриц различные комплексные числа $A_i = a_i + jb_i$, $C_i = c_i + jd_i$, тогда требуется 32 умножения и 24 сложения [36]. Для матриц размерности $M \times M$ требуется $4M^3$ умножений (\times) и $(4M^3 - 2M^2)$ операций сложения (Σ). Если одна из матриц будет комплексно сопряженной матрице предыдущего примера, например, $A_i = a_i - jb_i$ и $C_i = c_i + jd_i$, то число требуемых операций будет такое же $4M^3$ умножений (\times) и $(4M^3 - 2M^2)$ операций сложения (Σ) [36].

Если умножаем комплексную и эрмитово сопряженную матрицы размера 2×2 :

$$\mathbf{A}'\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_3 \\ A'_2 & A'_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_1A_1 + A'_3A_3 & A'_1A_2 + A'_3A_4 \\ A'_2A_1 + A'_4A_3 & A'_2A_2 + A'_4A_4 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

где $A_i = a_i + jb_i$, $A'_i = a_i - jb_i$, то требуется 16 умножений и 12 сложений. В случае размерности матриц $M \times M$ понадобится $2M^3$ умножений (\times) и $(2M^3 - M^2)$ операций сложения (Σ) [36].

Полученные результаты занесем в Таблицу 4.2.

Таблица 4.2 – Вычислительная сложность умножения матриц

Умножение матриц $\mathbf{H}'\mathbf{H}$ размерности $M \times M$ \mathbf{H} —комплексная матрица; \mathbf{H}' — комплексная эрмитово сопряженная матрица	\times	$2M^3$
	Σ	$2M^3 - M^2$

Продолжение Таблицы 4.2

Умножение матриц НА размерности $M \times M$ Н —действительная матрица; А — действительная матрица	×	M^3
	Σ	$M^3 - M^2$
Умножение матриц НА размерности $M \times M$ Н —комплексная матрица; А — комплексная матрица	×	$4M^3$
	Σ	$4M^3 - 2M^2$

Рассмотрим умножение комплексной матрицы **А** размерности 2×2 и комплексного вектора **с** размерности 2×1

$$\mathbf{Ac} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1C_1 + A_2C_2 \\ A_3C_1 + A_4C_2 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

где $A_i = a_i + jb_i$ и $C_i = c_i + jd_i$, требуется 16 умножений и 12 сложений [36]. В случае умножения комплексных матрицы **А** ($M \times M$) и вектора **с** ($M \times 1$) понадобится ($4M^2$) умножений (\times) и ($4M^2 - 2M$) операций сложения (Σ) [36].

Теперь составим таблицу подсчета вычислительной сложности демодулятора (4.1) для случая комплексной модели (3.1), результаты занесены в Таблицу 4.3.

Таблица 4.3– Расчет вычислительной сложности алгоритма ML (комплексная модель(3.1)) [36].

$M = N$		1	2	3	M
умножение матрицы $M \times M$ на вектор $M \times 1$	×	4	16	36	$4M^2$
	Σ	2	12	30	$4M^2 - 2M$

Продолжение Таблицы 4.3

$M = N$		1	2	3	M
$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$	×				
сумма вектора $M \times 1$ и вектора $M \times 1$	Σ	2	4	6	$2M$
$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}$	×	2	4	6	$2M$
умножение вектора $1 \times M$ на вектор $M \times 1$	Σ	1	3	5	$2M - 1$
всего операций для вычисления 1 нормы	×	6	20	42	$4M^2 + 2M$
	Σ	5	19	41	$4M^2 + 2M - 1$
всего операций для реализации МП демодулятора	×	12	80	336	$(4M^2 + 2M) \cdot 2^M$
	Σ	10	76	328	$(4M^2 + 2M - 1) \cdot 2^M$

Составим сводную Таблицу 4.4 числа арифметических операций, необходимых для реализации алгоритма ML в системах MIMO различных антенных конфигураций.

Таблица 4.4 – Сложность алгоритма ML(комплексная модель) для различных конфигураций антенн

Операции\антенная конфигурация	$[1 \times 1]$	$[2 \times 2]$	$[3 \times 3]$	$[M \times M]$
Сложения	$5 \cdot 2$	$19 \cdot 4$	$41 \cdot 8$	$(4M^2 + 2M - 1) \cdot 2^M$
Умножения	$6 \cdot 2$	$20 \cdot 4$	$42 \cdot 8$	$(4M^2 + 2M) \cdot 2^M$

Продолжение Таблицы 4.4

Операции\антенная конфигурация	$[1 \times 1]$	$[2 \times 2]$	$[3 \times 3]$	$[M \times M]$
Общее число операций	22	156	664	$(8M^2 + 4M - 1) \cdot 2^M$

На основе полученных значений делаем вывод, что алгоритм ML имеет экспоненциальную сложность.

4.2.2. Вычислительная сложность алгоритма ZF

Демодулятор Zero Forcing (ZF) имеет описание следующего вида [5]:

$$\hat{\mathbf{x}}^{\text{ZF}} = (\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{y} \quad (4.11)$$

Подсчет сложности алгоритма проведем сначала для действительной, а потом для комплексной модели. Рассмотрим случай, когда $M = N = 1$. Тогда операция $\mathbf{H}'\mathbf{H}$ умножения двух матриц (размерности 1×1) требует 1 умножение. Операция $\mathbf{z} = \mathbf{H}'\mathbf{y}$ умножения \mathbf{H}' матрицы размера 1×1 и \mathbf{y} вектора размера 1×1 требует 1 умножение. Операцию в этом случае $(\mathbf{T}^{\text{ZF}})^{-1} = (\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}$ можно представить, как $1/\mathbf{T}^{\text{ZF}}$, то есть данная операция представляет собой 1 деление. Последняя операция $(\mathbf{T}^{\text{ZF}})^{-1}\mathbf{z}$ представляет собой 1 умножение.

В итоге, алгоритм ZF реализуется с помощью 3 умножений и одного деления ($/$) – всего 4 операции [36].

Рассмотрим случай, когда $M = N = 2$. При этом вектор \mathbf{y} имеет размерность 2×1 , матрица \mathbf{H} имеет размерность 2×2 . Операция $\mathbf{H}'\mathbf{H}$ представляет собой умножение двух матриц размерностью 2×2 :

$$\begin{pmatrix} A'_1 & A'_3 \\ A'_2 & A'_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_1 A_1 + A'_3 A_3 & A'_1 A_2 + A'_3 A_4 \\ A'_2 A_1 + A'_4 A_3 & A'_2 A_2 + A'_4 A_4 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Получается, что надо выполнить 3 сложения и 6 умножений. Если обобщить на случай M антенн, то понадобится $(\frac{M \cdot M - M}{2} + M) \cdot M$ умножений и $(\frac{M \cdot M - M}{2} + M) \cdot (M - 1)$ сложений. Результатом будет матрица $\mathbf{T}^{\text{ZF}} = \mathbf{H}'\mathbf{H}$ размера $M \times M$ [36].

Операция вычисления действительной обратной матрицы $(\mathbf{T}^{\text{ZF}})^{-1}$ может быть реализована с помощью $M^3/2 + M^2/2 - M$ умножений, $M^3/2 - M^2/2$ сложений и M делений [6], в нашем случае 4 умножения, 2 сложения, 2 деления.

Рассмотрим теперь операцию умножения матрицы на вектор, т.е. $\mathbf{H}'\mathbf{y}$.

$$\begin{pmatrix} H'_1 & H'_3 \\ H'_2 & H'_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H'_1 y_1 + H'_3 y_2 \\ H'_2 y_1 + H'_4 y_2 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

такая операция требует 2 сложения и 4 умножения.

Последняя операция умножения матрицы $(\mathbf{T}^{\text{ZF}})^{-1}$ размера 2×2 на вектор $\mathbf{H}'\mathbf{y}$ размера 2×1 представляет собой 2 сложения и 4 умножения.

Таким образом, для расчета сложности алгоритма ZF при $M = N = 2$, необходимо совершить 20 умножений, 2 деления и 10 сложений [36].

Составим Таблицу 4.5 вычислительной сложности алгоритма ZF для простой действительной модели.

Таблица 4.5 Вычислительная сложность алгоритма ZF (простая действительная модель) [36]

Действие и необходимые операции		Число операций
$\mathbf{H}'\mathbf{H} = \mathbf{T}^{\text{ZF}}$	×	$M^3/2 + M^2/2$
умножение матрицы $M \times M$ на матрицу $M \times M$	Σ	$M^3/2 - M/2$

Продолжение Таблицы 4.5

Действие и необходимые операции		Число операций
$(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1} = (\mathbf{T}^{\text{ZF}})^{-1}$ нахождение обратной матрицы $M \times M$	\times	$M^3/2 + M^2/2 - M$
	Σ	$M^3/2 - M^2/2$
	/	M
$\mathbf{H}'\mathbf{y}$ умножение матрицы $M \times M$ на вектор $M \times 1$	\times	M^2
	Σ	$M^2 - M$
$(\mathbf{T}^{\text{ZF}})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{y}$ умножение матрицы $M \times M$ на вектор $M \times 1$	\times	M^2
	Σ	$M^2 - M$
всего операций для реализации демодулятора ZF	\times	$M^3 + 3M^2 - M$
	/	M
	Σ	$M^3 + \frac{3M^2}{2} - \frac{5M}{2}$

Теперь составим таблицу расчета вычислительной сложности алгоритма ZF (4.11) для модели (3.1), результат в Таблице 4.6.

Таблица 4.6 Расчет вычислительной сложности алгоритма ZF (комплексная модель) [36]

$M = N$		1	2	3	M
$\mathbf{H}'\mathbf{H} = \mathbf{T}^{\text{ZF}}$ умножение матрицы $M \times M$ на матрицу $M \times M$	\times	2	16	54	$2M^3$
	Σ	1	12	45	$2M^3 - M^2$

Продолжение Таблицы 4.6

$M = N$		1	2	3	M
$(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1} = (\mathbf{T}^{\text{ZF}})^{-1}$ нахождение обратной матрицы $M \times M$	\times		8	36	$2M^3 - 2M^2$
	Σ		4	24	$2M^3 - 4M^2 + 2M$
	/	1	2	3	M
$\mathbf{H}'\mathbf{y}$ умножение матрицы $M \times M$ на вектор $M \times 1$	\times	4	16	36	$4M^2$
	Σ	2	12	30	$4M^2 - 2M$
$(\mathbf{T}^{\text{ZF}})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{y}$ умножение комплексной эрмитовой матрицы $M \times M$ на вектор $M \times 1$	\times	2	12	30	$4M^2 - 2M$
	Σ		8	24	$4M^2 - 4M$
всего операций для реализации ZF демодулятора	\times	8	52	156	$4M^3 + 6M^2 - 2M$
	/	1	2	3	M
	Σ	3	36	123	$4M^3 + 3M^2 - 4M$

Таким образом, для получения оценки алгоритма ZF в условиях матрицы канала размера $M=N$ (квадратной матрицы) потребуется $4M^3 + 6M^2 - 2M$ умножений, $4M^3 + 3M^2 - 4M$ сложений и M делений [36]. Всего $8M^3 + 9M^2 - 5M$ операций [36].

Составим Таблицу 4.7 сложности алгоритма ZF (4.11) для системы MIMO различных антенных конфигураций комплексной модели (3.1) [36].

Таблица 4.7 Сложность алгоритма ZF (комплексная модель) для различных конфигураций антенн [36]

Операции	$[1 \times 1]$	$[2 \times 2]$	$[3 \times 3]$	$[M \times M]$
Сложения	3	36	123	$4M^3 + 3M^2 - 4M$
Умножения	8	52	156	$4M^3 + 6M^2 - 2M$
Деления	1	2	3	M
Общее число операций	12	90	282	$8M^3 + 9M^2 - 5M$

Как мы видим, алгоритма ZF имеет кубический порядок вычислительной сложности.

4.2.3. Вычислительная сложность алгоритма MMSE

Оценка $\hat{\mathbf{x}}^{\text{MMSE}}$, оптимальная по критерию минимума среднеквадратической ошибки, находится из следующего соотношения [5]:

$$\hat{\mathbf{x}}^{\text{MMSE}} = (\mathbf{H}'\mathbf{H} + 2\sigma_{\eta}^2 \cdot \mathbf{1})^{-1} \mathbf{H}'\mathbf{y} = (\mathbf{T}^{\text{MMSE}})^{-1} \mathbf{z}, \quad (4.14)$$

где $2\sigma_{\eta}^2$ – дисперсия шума на входе каждой приемной антенны, $\mathbf{1}$ – единичная матрица; $\mathbf{T}^{\text{MMSE}} = \mathbf{H}'\mathbf{H} + 2\sigma_{\eta}^2 \cdot \mathbf{1}$ – эрмитова матрица размерности $M \times M$; $\mathbf{z} = \mathbf{H}'\mathbf{y}$ – M -мерный вектор-столбец; \mathbf{H}' – эрмитово сопряженная матрица по отношению к матрице \mathbf{H} [36].

При сравнении алгоритмов ZF (4.11) и MMSE (4.14) нетрудно заметить, что они отличаются только M операциями сложения. Это действие добавляется в алгоритм, оптимальный по критерию минимума среднеквадратичной ошибки (при этом операция $2\sigma_{\eta}^2 \cdot \mathbf{1}$ не учитывается).

Таким образом, для реализации алгоритма MMSE (4.14) в случае комплексной модели (3.1) системы MIMO с M передающими и M приемными антеннами потребуется $4M^3 + 6M^2 - 2M$ умножений, $4M^3 + 3M^2 - 3M$ сложений и M делений. В итоге, общее число операций составит $8M^3 + 9M^2 - 4M$ [36].

Составим Таблицу 4.8 сложности алгоритма MMSE (4.14) для системы MIMO различных антенных конфигураций комплексной модели (3.1).

Таблица 4.8 Сложность алгоритма MMSE (комплексная модель)

Операции	$[1 \times 1]$	$[2 \times 2]$	$[3 \times 3]$	$[M \times M]$
Сложения	4	38	126	$4M^3 + 3M^2 - 3M$
Умножения	8	52	156	$4M^3 + 6M^2 - 2M$
Деления	1	2	3	M
Общее число операций	13	92	285	$8M^3 + 9M^2 - 4M$

Алгоритм MMSE обладает кубической вычислительной сложностью.

4.2.4. Вычислительная сложность линейного итерационного алгоритма типа Чебышева

Двухслойная итерационная схема метода типа Чебышева имеет вид:

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_{i-1} + \tau_i (\mathbf{z} - \mathbf{T}^{\text{MMSE}} \hat{\mathbf{x}}_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, i_{\max}, \text{ или}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_{i-1} + \tau_i (\mathbf{H}'\mathbf{y} - (\mathbf{H}'\mathbf{H} + 2\sigma_{\eta}^2 \cdot \mathbf{1})\hat{\mathbf{x}}_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, i_{\max}, \quad (4.15)$$

где τ_i – переменные итерационные параметры метода типа Чебышева; i_{\max} – максимальное число итераций.

При использовании комплексной модели (3.1) умножение $(2\sigma_{\eta}^2 \cdot \mathbf{1}) \cdot \hat{\mathbf{x}}_{i-1}$, т.е. M -мерного вектора $\hat{\mathbf{x}}_{i-1}$ на $2\sigma_{\eta}^2 \cdot \mathbf{1}$ требует $2M$ умножений (при этом операция вычисления $2\sigma_{\eta}^2 \cdot \mathbf{1}$ не учитывается).

Умножение $\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{i-1}$, т.е. комплексной матрицы \mathbf{H} размером $M \times M$ на комплексный вектор $\hat{\mathbf{x}}_{i-1}$ размером $M \times 1$, требует, как было показано выше, $4M^2$ умножений и $4M^2 - 2M$ сложений. Далее, для вычисления $\mathbf{H}'\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{i-1}$, т.е. произведения эрмитово сопряженной матрицы \mathbf{H}' размерности $M \times M$ на вектор $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{i-1}$ размером $M \times 1$, необходимо $(4M^2)$ умножений и $4M^2 - 2M$ сложений. Сумма $\mathbf{H}'\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{i-1} + 2\sigma_{\eta}^2 \cdot \mathbf{1} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{i-1} = \mathbf{T}^{\text{MMSE}} \hat{\mathbf{x}}_{i-1}$ двух полученных выше M -мерных комплексных векторов требует $2M$ сложений [36].

Вычислительная сложность умножения комплексной матрицы \mathbf{H}' размерности $M \times M$ на комплексный вектор \mathbf{y} размером $M \times 1$, т.е. для получения вектора $\mathbf{z} = \mathbf{H}'\mathbf{y}$ была получена выше и составляет $4M^2$ умножений и $4M^2 - 2M$ сложений [36].

Разность M -мерных комплексных векторов $\mathbf{z} - \mathbf{T}^{\text{MMSE}} \hat{\mathbf{x}}_{i-1}$ требует $2M$ сложений. Далее для умножения полученной суммы на итерационный параметр, т.е. для вычисления произведения $\tau_i(\mathbf{z} - \mathbf{T}^{\text{MMSE}} \hat{\mathbf{x}}_{i-1})$, потребуется еще $2M$ умножений. При этом предполагается, что сами итерационные параметры заранее вычислены и хранятся в памяти.

Последняя сумма $\hat{\mathbf{x}}_{i-1} + \tau_i(\mathbf{z} - \mathbf{T}^{\text{MMSE}} \hat{\mathbf{x}}_{i-1})$ двух M -мерных комплексных векторов $\hat{\mathbf{x}}_{i-1}$ и $\tau_i(\mathbf{z} - \mathbf{T}^{\text{MMSE}} \hat{\mathbf{x}}_{i-1})$ потребует $2M$ сложений.

Таким образом, для реализации одной итерации линейного алгоритма Чебышева потребуется $(12M^2 + 4M)$ умножений и $(12M^2)$ сложений, т.е. всего $24M^2 + 4M$ операций. Всего необходимо сделать i_{\max} итераций, при этом будем полагать, что максимальное число итераций не должно превышать $M/2$. Таким образом, сложность линейного алгоритма по методу Чебышева зависит от числа

итераций и составляет $(12M^2 + 4M) \cdot i_{\max}$ умножений и $(12M^2) \cdot i_{\max}$ сложений, т.е. всего $(24M^2 + 4M) \cdot i_{\max}$ операций, и при ограничении числа итераций значением $M/2$ не превышает сложности алгоритма MMSE [36].

Составим Таблицу 4.9 вычислительной сложности одной итерации линейного демодулятора типа Чебышева (Cheb) для случая комплексной модели (3.1).

Таблица 4.9 Расчет вычислительной сложности алгоритма для реализации 1 итерации демодулятора на основе линейного метода Чебышева (комплексная модель) [36].

$M = N$		2	3	M
$(2\sigma_{\eta}^2 \cdot \mathbf{1}) \cdot \hat{\mathbf{x}}_{i-1}$	×	4	6	$2M$
умножение вектора $M \times 1$	Σ			
$\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{i-1}$	×	16	36	$4M^2$
умножение матрицы $M \times M$ на вектор $M \times 1$	Σ	12	30	$4M^2 - 2M$
$\mathbf{H}'\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{i-1}$	×	16	36	$4M^2$
умножение эрмитовой матрицы $M \times M$ на вектор $M \times 1$	Σ	12	30	$4M^2 - 2M$
$\mathbf{H}'\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{i-1} + 2\sigma_{\eta}^2 \cdot \mathbf{1} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{i-1}$	×			
сумма вектора $M \times 1$ и вектора $M \times 1$	Σ	4	6	$2M$
$\mathbf{z} = \mathbf{H}'\mathbf{y}$	×	16	36	$4M^2$
умножение эрмитовой матрицы $M \times M$ на вектор $M \times 1$	Σ	12	30	$4M^2 - 2M$

Продолжение Таблицы 4.9

$M = N$	2	3	M	$M = N$
$\mathbf{z} - \mathbf{T}^{\text{MMSE}} \hat{\mathbf{x}}_{i-1}$	×			
разность вектора $M \times 1$ и вектора $M \times 1$	Σ	4	6	$2M$
$\tau_i (\mathbf{z} - \mathbf{T}^{\text{MMSE}} \hat{\mathbf{x}}_{i-1})$	×	4	6	$2M$
умножение вектора $M \times 1$ на число	Σ			
$\hat{\mathbf{x}}_{i-1} + \tau_i (\mathbf{z} - \mathbf{T}^{\text{MMSE}} \hat{\mathbf{x}}_{i-1})$	×			
Сумма вектора $M \times 1$ и вектора $M \times 1$	Σ	4	6	$2M$
всего операций для выполнения 1 итерации демодулятора на основе линейного метода Чебышева	×	56	120	$12M^2 + 4M$
	Σ	48	108	$12M^2$

Составим итоговую Таблицу 4.10 сложности линейного алгоритма Чебышева (4.15) для различных антенных конфигураций комплексной модели (3.1).

Таблица 4.10 Сложность алгоритма демодулятора на основе линейного метода Чебышева (комплексная модель) [36]

Операции	$[2 \times 2]$ $i_{\max} = 1$	$[3 \times 3]$ $i_{\max} = 1$	$[M \times M]$ $i_{\max} = i_{\max}$
Сложения	$48 \cdot 1$	$108 \cdot 1$	$(12M^2) \cdot i_{\max}$
Умножения	$56 \cdot 1$	$120 \cdot 1$	$(12M^2 + 4M) \cdot i_{\max}$
Общее число операций	$104 \cdot 1$	$228 \cdot 1$	$(24M^2 + 4M) \cdot i_{\max}$

Линейный итерационный алгоритм демодуляции на основе метода Чебышева обладает вычислительной сложностью, которая регулируется максимальным числом итераций i_{\max} , его сложность меньше, чем у алгоритма MMSE. В системах, когда число антенн на базовой станции намного больше, чем число антенн у пользователей линейный алгоритм типа Чебышева имеет отличные характеристики сходимости даже при малом числе итераций [33]. Однако в системах с большим числом антенн конфигурации $M \times M$, линейный алгоритм типа Чебышева требует большого числа итераций для обеспечения удовлетворительных значений помехоустойчивости, поэтому для увеличения скорости сходимости был предложен нелинейный алгоритм типа Чебышева.

4.2.5. Вычислительная сложность алгоритма K-best

Вычислительная сложность алгоритма K-best согласно исследованиям, представленным в работе [112] может быть получена из числа операций умножения, сложения и сравнения, требуемых для реализации основных блоков структурной схемы алгоритма K-best LSD.

В Таблице 4.11 приведем результат суммирования числа элементарных операций, необходимых для выполнения алгоритма K-best. В таблице приняты следующие обозначения:

- K_{bit} – число бит на символ;
- M — число антенн;
- K — параметр алгоритма K-best.

Как было сказано в первом разделе, сложность алгоритма регулируется параметром K . При разных значениях параметра алгоритм K-best показывает разные результаты помехоустойчивости и вычислительной сложности.

Таблица 4.11 Сложность алгоритма K-best

Вид элементарной операции	Число операций
×	$8M^3 - M + MK2^{\frac{K_{bit}}{2}}(2M - 1) + K$
Σ	$MK2^{\frac{K_{bit}}{2}}(2M - 1)K + 8M^3 - 2M^2 + 93M + K_{bit}M + 32$
Сравнение	$MK2^{\frac{K_{bit}}{2}}(2M - 1)K + KK_{bit}M$
ВСЕГО	$16M^3 - 2M^2 + 92M + K + K_{bit}(M + KM) + 32 +$ $+MK2^{\frac{K_{bit}}{2}}(2M - 1)(2K + 1)$

Из таблицы можем видеть, что сложность алгоритма K-best зависит не только от параметра K , но еще числа антенн и порядка модуляции. При модуляциях высокого порядка для достижения приемлемой помехоустойчивости значение параметра K требуется выбирать большим, что приводит к росту числа арифметических операций, необходимых алгоритму для получения оценок. Поэтому для систем Massive MIMO с высокой кратностью модуляции алгоритм K-best становится слишком сложным и его применение на практике весьма затруднительно.

4.3. Анализ вычислительной сложности разработанных итерационных алгоритмов демодуляции для систем Massive MIMO

4.3.1. Нелинейный итерационный демодулятор типа Чебышева

Нелинейный итерационный демодулятор, основанный на методе Чебышева, описывается с помощью следующего соотношения:

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_{i-1} + \tau_i (\mathbf{z} - \mathbf{T}^{\text{MMSE}} f(\hat{\mathbf{x}}_{i-1}/D)), \quad i=1,2,\dots,i_{\max} \quad (4.16)$$

где D – параметр нелинейного итерационного алгоритма Чебышева, нелинейная функции $f(\hat{\mathbf{x}}_{i-1}/D)$ определяемая видом модуляции.

Для сигналов двоичной фазовой модуляции (BPSK) $x^m = \pm 1, m=1,2$ выражение нелинейной функции принимает следующий вид:

$$f(\hat{x}) = th\left(\frac{\hat{x}}{\sigma_\xi^2}\right). \quad (4.17)$$

Для комплексного случая при прочих равных условиях к общему числу операций линейного алгоритма Чебышева (4.15) надо добавить в нелинейный алгоритм $2M$ умножений на D и M вычислений $th(\frac{\hat{x}_{i-1}}{D})$.

На основе расчетов полученных в пункте 4.2.4, с учетом обозначенных усложнений составим Таблицу 4.12 расчета вычислительной сложности алгоритма нелинейного метода Чебышева (4.16) для модели (3.1).

Таблица 4.12 Сложность нелинейного демодулятора типа Чебышева (BPSK) (комплексная модель) [36]

Операции	$[2 \times 2]$ $i_{\max} = 1$	$[3 \times 3]$ $i_{\max} = 1$	$[M \times M]$ $i_{\max} = i_{\max}$
Сложения	$48 \cdot 1$	$108 \cdot 1$	$(12M^2) \cdot i_{\max}$
Умножения	$60 \cdot 1$	$126 \cdot 1$	$(12M^2 + 6M) \cdot i_{\max}$
Общее число операций	$108 \cdot 1$	$234 \cdot 1$	$(24M^2 + 6M) \cdot i_{\max}$

В итерационном алгоритме типа Чебышева часть операций — это расчет итерационных параметров и значений нелинейной функции. Из-за фиксированного размера системы Massive MIMO параметры τ_i (2.13) достаточно

вычислить только один раз и сохранить в памяти как константы при вычислении нескольких наборов данных. Также сохраняется заранее вычисленная таблица значений $th(\cdot)$ для расчета нелинейной функции (2.14), (2.15) [131]. Отметим, что для модуляции 16QAM надо вычислить $6M$ раз нелинейную функцию. Поэтому увеличение сложности нелинейного алгоритма Чебышева незначительно превышает сложность линейного метода Чебышева.

4.3.2. Вычислительная сложность алгоритма на основе метода Ньютона

Применяя негауссовскую аппроксимацию априорного распределения и итерационный метод Ньютона при нелинейной демодуляции [113] мы получили выражение для оценки вида (3.61). Найдем вычислительную сложность этого алгоритма при $i=2$ – параметра негауссовской аппроксимации априорного распределения вектора \mathbf{x} модели (3.2).

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{MAP} + \frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{y} - \frac{2i}{(2d^2)^i} [\hat{\mathbf{x}}_{MAP}]^{2i-1} &= 0, \\
 -\frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{MAP} + \frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{y} - \frac{2 \cdot 2}{(2d^2)^2} [\hat{\mathbf{x}}_{MAP}]^{2 \cdot 2 - 1} &= 0, \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

$$F(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}) = \mathbf{B} \hat{\mathbf{x}}_{MAP} + \mathbf{A} \mathbf{y} + C [\hat{\mathbf{x}}_{MAP}]^3 = 0,$$

$$F(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}) = [f_1(\hat{\mathbf{x}}_1), \dots, f_{2M}(\hat{\mathbf{x}}_{2M})]^T = 0,$$

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T, \quad C = -\frac{2i}{(2d^2)^i}, \quad d^2 = \frac{1}{2} \sigma_x^2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2i}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2i}\right)},$$

$$C = -\frac{2i}{(2d^2)^i} = -\frac{2 \cdot 2}{\left(2 \left(\frac{1}{2} \sigma_x^2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2 \cdot 2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2 \cdot 2}\right)} \right)^2\right)^2}.$$

Итерационное уравнение алгоритма Ньютона:

$$\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^p = \hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1} - F(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1}) \cdot (F'(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1}))^{-1}, \quad (4.19)$$

$$F(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1}) = \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1} + \mathbf{A}\mathbf{y} + C[\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1}]^3,$$

$$F'(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1}) = \mathbf{B} + 3C[\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1}]^2,$$

где p номер текущей итерации.

Для первой итерации при нулевом начальном значении $\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^0 = 0$ получим:

$$\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^1 = -F(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^0) \cdot (F'(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^0))^{-1} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{y} = \hat{\mathbf{x}}_{ZF}. \quad (4.20)$$

Алгоритм (4.19) был получен при использовании эквивалентной действительной модели (3.2) [35].

Несмотря на то, что размерность увеличивается вдвое (размерность матрицы \mathbf{H} коэффициентов радиоканала ММО с действительными значениями становится $2N \times 2M$, $\boldsymbol{\eta}$ - вектора шума действительных гауссовских случайных величин – $2N \times 1$ и вектора \mathbf{x} оцениваемых действительных квадратурных составляющих информационных символов – $2M \times 1$), число арифметических операций, необходимых при выполнении одного и того же действия, что с комплексной, что с эквивалентной действительной моделью не меняется [35, 112]. Переход от комплексной модели с ортогональными квадратурными составляющими к эквивалентной действительной модели широко используется [110, 134, 147].

О представлении комплексного числа ($\dot{h}_1 = h_{1r} + jh_{1i}$) в виде действительной матрицы $H_1 = \begin{pmatrix} h_{1r} & -h_{1i} \\ h_{1i} & h_{1r} \end{pmatrix}$ подробно написано в [92].

Покажем на простых примерах, что изменений в вычислительной сложности нет при переходе комплексной к эквивалентной действительной модели.

Рассмотрим случай умножения двух комплекснозначных матриц размерности 2×2 .

$$\dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \dot{A}_1 & \dot{A}_2 \\ \dot{A}_3 & \dot{A}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{C}_1 & \dot{C}_2 \\ \dot{C}_3 & \dot{C}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{A}_1\dot{C}_1 + \dot{A}_2\dot{C}_3 & \dot{A}_1\dot{C}_2 + \dot{A}_2\dot{C}_4 \\ \dot{A}_3\dot{C}_1 + \dot{A}_4\dot{C}_3 & \dot{A}_3\dot{C}_2 + \dot{A}_4\dot{C}_4 \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

где элементы матриц различные комплексные числа $\dot{A}_k = a_{kr} + ja_{ki}$, $\dot{C}_k = c_{kr} + jc_{ki}$, как было показано выше, для этого требуется 32 умножения и 24 сложения [36].

Теперь рассмотрим эквивалентную действительную модель, пользуясь записью в виде блочных матриц.

$$\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1C_1 + A_2C_3 & A_1C_2 + A_2C_4 \\ A_3C_1 + A_4C_3 & A_3C_2 + A_4C_4 \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

где $A_k = \begin{pmatrix} a_{kr} & -a_{ki} \\ a_{ki} & a_{kr} \end{pmatrix}$ – эквивалентное представление элемента $\dot{A}_k = a_{kr} + ja_{ki}$;

$C_k = \begin{pmatrix} c_{kr} & -c_{ki} \\ c_{ki} & c_{kr} \end{pmatrix}$ – эквивалентное представление элемента $\dot{C}_k = c_{kr} + jc_{ki}$

соответственно [36].

Умножение:

$$A_k C_k = \begin{pmatrix} a_{kr} & -a_{ki} \\ a_{ki} & a_{kr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{kr} & -c_{ki} \\ c_{ki} & c_{kr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{kr}c_{kr} - a_{ki}c_{ki} & a_{kr}(-c_{ki}) - a_{ki}c_{kr} \\ a_{ki}c_{kr} + a_{kr}c_{ki} & a_{ki}(-c_{ki}) + a_{kr}c_{kr} \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

требует 4 умножений (\times) и 2 операций сложения (Σ) [36].

Сложение:

$$D = \begin{pmatrix} a_{kr} & -a_{ki} \\ a_{ki} & a_{kr} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{kr} & -c_{ki} \\ c_{ki} & c_{kr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{kr} + c_{kr} & -a_{ki} - c_{ki} \\ a_{ki} + c_{ki} & a_{kr} + c_{kr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & -d_2 \\ d_2 & d_1 \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

требует 2 операции сложения (Σ).

Таким образом, умножение блочных матриц $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$ потребует всего 32 операции умножения (\times) и 24 операции сложения (Σ), что совпадает с числом необходимых операций при использовании комплексной модели [36].

Если рассматривать умножение с комплексно-сопряженными числами

$$\begin{aligned} A_1' \cdot A_1 &= \begin{pmatrix} a_{1r} & a_{1i} \\ -a_{1i} & a_{1r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1r} & -a_{1i} \\ a_{1i} & a_{1r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1r}a_{1r} + a_{1i}a_{1i} & a_{1r}(-a_{1i}) + a_{1i}a_{1r} \\ -a_{1i}a_{1r} + a_{1i}a_{1i} & (-a_{1i})(-a_{1i}) + a_{1r}a_{1r} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{1r}^2 + a_{1i}^2 & 0 \\ 0 & a_{1r}^2 + a_{1i}^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

то требуется 2 умножения (\times) и 1 сложение (Σ) и число необходимых операций при умножении блочных матриц $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ составит 16 умножений (\times) и 12 сложений (Σ), что совпадает с полученным ранее числом операций для комплексной модели [36]. Исходя из этого, получим вычислительную сложность алгоритма метода Ньютона (4.19) при использовании эквивалентной действительной модели (3.2), результат занесем в Таблицу 4.13.

Таблица 4.13 Расчет вычислительной сложности алгоритма Ньютона (эквивалентная действительная модель) [35].

$\mathbf{B} = -\frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H}$ умножение матрицы $2M \times 2M$ на матрицу $2M \times 2M$ эквивалентной действительной модели операцию $-\frac{1}{\sigma_\eta^2}$ не учитываем	\times	$2M^3$
	Σ	$2M^3 - M^2$
$\mathbf{A} = \frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T$	\times	M^2
$F'(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1}) = \mathbf{B} + \text{diag } 3C \left[\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1} \right]^2$	\times	$2 \cdot 2M$
	Σ	$2M$

Продолжение Таблицы 4.13

Ay умножение матрицы $2M \times 2M$ на вектор $2M \times 1$ эквивалентной действительной модели	\times	$4M^2$
	Σ	$4M^2 - 2M$
$C[\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1}]^3$ с учетом, того, что квадрат и умножение на C уже считали	\times	$2M$
Bx $_{MAP}^{p-1}$ умножение матрицы $2M \times 2M$ на вектор $2M \times 1$ эквивалентной действительной модели	\times	$4M^2$
	Σ	$4M^2 - 2M$
$F(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1}) =$ $= \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1} + \mathbf{A}\mathbf{y} + C[\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1}]^3$ сложение векторов	Σ	$2 \cdot 2M$
$(F'(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1}))^{-1}$ нахождение обратной матрицы $2M \times 2M$ эквивалентной действительной модели	\times	$2M^3 - 2M^2$
	Σ	$2M^3 - 4M^2 + 2M$
	/	M
$F(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1}) \cdot (F'(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1}))^{-1}$ умножение матрицы $2M \times 2M$ на вектор $2M \times 1$ эквивалентной действительной модели	\times	$4M^2$
	Σ	$4M^2 - 2M$
$\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1} - F(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1}) \cdot (F'(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1}))^{-1}$ разность векторов	Σ	$2M$
всего операций для реализации 1 итерации демодулятора Ньютона	\times	$4M^3 + 7M^2 + 6M$
	/	M
	Σ	$4M^3 + 7 \cdot M^2 + 2M$
ВСЕГО 1 итерация		$(8M^3 + 14M^2 + 8M)$

Вычислительная сложность алгоритма зависит от p_{\max} максимального числа итераций и получается умножением полученного в Таблице 4.13 значения на число итераций.

4.3.3. Вычислительная сложность алгоритма модифицированного метода Ньютона

Итерационное уравнение модифицированного метода Ньютона имеет вид [35, 139]:

$$\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p)} = \hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)} - (\mathbf{B} + C(2i-1)\mathbf{I}_{2M})^{-1} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)}) \quad (4.26)$$

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}) \triangleq \mathbf{A} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}_{MAP} + C[\hat{\mathbf{x}}_{MAP}]^{2i-1}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{y}, \quad \mathbf{B} = -\frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H}, \quad C = -\frac{2i}{(2d^2)^i}$$

где \mathbf{I}_{2M} - единичная матрица, (p) - номер итерации, d, i - значение параметров негауссовского априорного распределения (3.31).

Представим расчет вычислительной сложности алгоритма модифицированного метода Ньютона (4.26) при использовании эквивалентной действительной модели (3.2) в виде Таблицы 4.14[35].

Таблица 4.14 Расчет вычислительной сложности алгоритма модифицированного метода Ньютона (случай $i=2$) $2M \times 2M$ (эквивалентная действительная модель)[35]

Действия для первой итерации		
$\mathbf{A} = \frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T$	\times	M^2

Продолжение Таблицы 4.14

$\mathbf{B} = -\frac{1}{\sigma_\eta^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H}$ умножение матрицы $2M \times 2M$ на матрицу $2M \times 2M$ с учетом эрмитового сопряжения эквивалентной действительной модели	\times	$2M^3$
	Σ	$2M^3 - M^2$
$(\mathbf{B} + C(2i - 1)\mathbf{I}_M)$	\times	M
	Σ	M
$(\mathbf{B} + C(2i - 1)\mathbf{I}_M)^{-1}$ обращение матрицы $2M \times 2M$ эквивалентной действительной модели	\times	$2M^3 - 2M^2$
	Σ	$2M^3 - 4M^2 + 2M$
	/	M
$\mathbf{A}\mathbf{u}$ умножение матрицы $2M \times 2M$ на вектор $2M \times 1$ эквивалентной действительной модели	\times	$4M^2$
	Σ	$4M^2 - 2M$
всего операций для реализации одной итерации демодулятора модифицированного метода Ньютона	\times	$4M^3 + 7M^2 + M$
	/	M
	Σ	$4M^3 + 3 \cdot M^2 - M$
ВСЕГО для первой итерации		$8 \cdot M^3 + 10 \cdot M^2 + M$
Действия для второй и последующих итераций		
$\hat{\mathbf{v}}_{MAP}^{p-1}$ умножение матрицы $2M \times 2M$ на вектор $2M \times 1$ эквивалентной действительной модели	\times	$4M^2$
	Σ	$4M^2 - 2M$

Продолжение Таблицы 4.14

$C[\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1}]^3$	\times	$3 \cdot 2M$
$f(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1}) =$ $= \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1} + \mathbf{A}\mathbf{y} + C[\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{p-1}]^3$	Σ	$2 \cdot 2M$
$(\mathbf{B} + C(2i - 1)\mathbf{I}_{2M})^{-1}\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)})$	\times	$4M^2$
умножение матрицы $2M \times 2M$ на вектор $2M \times 1$ эквивалентной действительной модели	Σ	$4M^2 - 2M$
$\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p)} =$ $= \hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)} -$ $-(\mathbf{B} + C(2i - 1)\mathbf{I}_{2M})^{-1}\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{MAP}^{(p-1)})$	Σ	$2M$
разность двух векторов эквивалентной действительной модели $2M \times 1$		
ВСЕГО вторая итерация		$16 \cdot M^2 + 8 \cdot M$
ВСЕГО для p_{\max} итераций		$(8 \cdot M^3 + 10 \cdot M^2 + M) +$ $+(16 \cdot M^2 + 8 \cdot M)(p_{\max} - 1)$

Вычислительная сложность алгоритма модифицированного метода Ньютона зависит от числа итераций и имеет примерно кубический порядок.

4.3.4. Оценка возможности практической реализации разработанного нелинейного алгоритма в системах беспроводной связи

Приведем общую Таблицу 4.15 вычислительной сложности рассмотренных алгоритмов для системы ММО с M передающими и M приемными антеннами. Для итерационных алгоритмов максимальное число итераций обозначим i_{\max} .

Таблица 4.15 Вычислительная сложность алгоритмов демодуляции для систем ММО с разным числом антенн [35, 36]

Алгоритм	Общее число операций
ML	$(8M^2 + 4M - 1) \cdot 2^M$
ZF	$8M^3 + 9M^2 - 5M$
MMSE	$8M^3 + 9M^2 - 4M$
Линейный метод Чебышева	$(24M^2 + 4M) \cdot i_{\max}$
Нелинейный метод Чебышева	$(24M^2 + 6M) \cdot i_{\max}$
Модифицированный метод Ньютона	$(8 \cdot M^3 + 10 \cdot M^2 + M) + (16 \cdot M^2 + 8 \cdot M)(i_{\max} - 1)$

Для наглядного анализа полученных результатов построим графики зависимости вычислительной сложности (общего числа арифметических операций) от числа антенн M .

На графиках используются обозначения:

- ML – алгоритм (1.4);
- ZF – алгоритм (1.5);
- MMSE – (1.6);
- Cheb – линейный итерационный демодулятор Чебышева (2.1);
- ChebNL – нелинейный демодулятор типа Чебышева (2.12);

- mNw – алгоритм модифицированного метода Ньютона (3.71)
- Kbest– алгоритм K-Best с разным числом проверяемых комбинаций;
- K – значения параметра алгоритма K-best [110];
- it – число итераций для итерационных алгоритмов.

Если на графике нет уточнения числа итераций, то для алгоритмов типа Чебышева число итераций составляет $M/2$, а для алгоритмов Ньютона 8 итераций. Из Рисунка 4.1 видим, что алгоритмы типа Чебышева имеют примерно одинаковую с алгоритмом MMSE вычислительную сложность, при этом предложенный нелинейный алгоритм типа Чебышева обладает лучшей помехоустойчивостью.

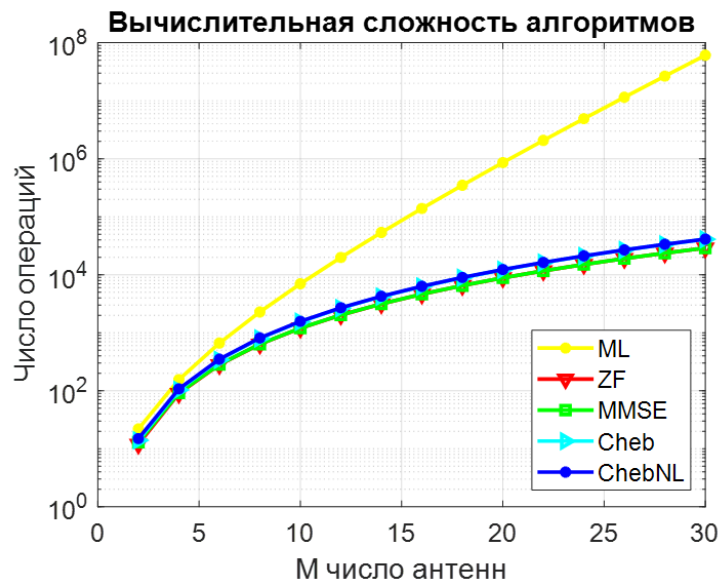


Рисунок 4.1 – Зависимости вычислительной сложности демодуляторов от числа антенн

На Рисунке 4.2 хорошо видно, что алгоритмы ZF, MMSE, линейного и нелинейного методов Чебышева, а также модифицированного метода Ньютона имеют примерно одинаковый порядок сложности, а вот алгоритмы с перебором (K-best, ML) существенно сложнее. Алгоритм максимального правдоподобия (ML) имеет экспоненциальную сложность.

Далее будут представлены результаты исследования, которые представляют собой совместную визуализацию графиков на плоскости «эффективность-сложность». Такой вид представления характеристик алгоритмов, позволяет сразу

оценить и сравнить как эффективность, так и вычислительную сложность демодуляторов. Данные помехоустойчивости сравнивались на уровне $FER = 0,01$.

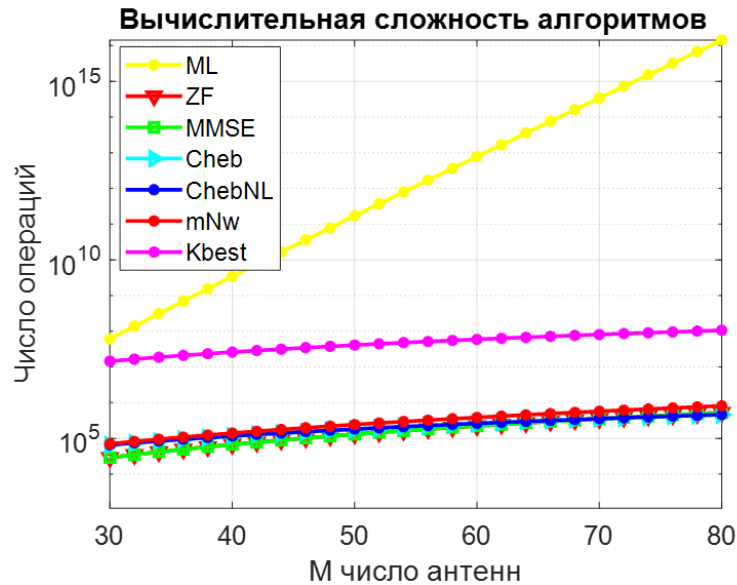


Рисунок 4.2 – Вычислительная сложность алгоритмов демодуляции для системы Massive MIMO

Вычислительная сложность и помехоустойчивость алгоритмов демодуляции сравнивались с алгоритмом MMSE, в результате чего получались относительные значения вычислительной сложности отраженной по оси абсцисс и выигрыш по помехоустойчивости, отмеченный по оси ординат. Относительная сложность на графике измеряется в разгах, а выигрыш в помехоустойчивости в дБ. На плоскости «эффективность-сложность» точка с координатами (1, 0) отражает положение алгоритма MMSE.

Значения относительной сложности демодуляторов были получены по следующему правилу:

- для демодулятора типа Чебышева – $\frac{\text{сложность Chev}}{\text{сложность MMSE}}$;
- для нелинейного метода Чебышева – $\frac{\text{сложность ChevNL}}{\text{сложность MMSE}}$;
- для модифицированного метода Ньютона – $\frac{\text{сложность mNw}}{\text{сложность MMSE}}$;
- для алгоритма K-best – $\frac{\text{сложность Kbest}}{\text{сложность MMSE}}$ [35].

По оси ординат показан выигрыш по помехоустойчивости в дБ, определяемый следующим образом:

- для линейного метода Чебышева – $(SNR_{MMSE} - SNR_{Cheb})$;
- для нелинейного метода Чебышева – $(SNR_{MMSE} - SNR_{ChebNL})$;
- для модифицированного метода Ньютона – $(SNR_{MMSE} - SNR_{mNw})$,
- для алгоритма K-best – $(SNR_{MMSE} - SNR_{Kbest})$ [35].

На Рисунке 4.3 представлены результаты демодуляторов линейного, нелинейного типа Чебышева, модифицированного метода Ньютона и MMSE в условиях работы в системе Massive MIMO конфигурации 64×64 с 16QAM. Полученная плоскость «эффективность-сложность» имеет разделения на области выигрыша относительно значений алгоритма MMSE по вычислительной сложности (слева относительно 1 по оси абсцисс), по помехоустойчивости (выше нуля по оси ординат), а также область совместного выигрыша и по сложности и по помехоустойчивости (левый верхний квадрат).

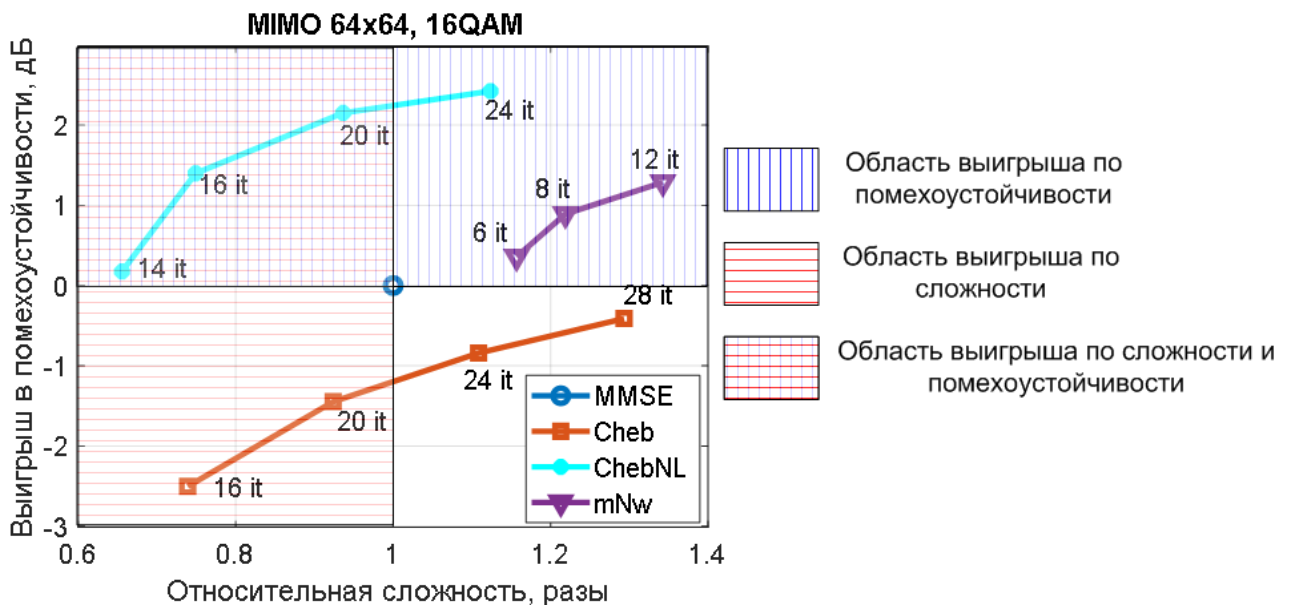


Рисунок 4.3 - Плоскость «эффективность-сложность» демодуляторов для системы Massive MIMO 64×64 , 16QAM

Из рисунка хорошо видно, что для всех итерационных алгоритмов увеличение числа итераций приводит к улучшению характеристик помехоустойчивости, но при этом происходит рост вычислительной сложности.

Алгоритм нелинейного метода Чебышева превосходит (лучше) алгоритм MMSE не только в помехоустойчивости, но и в сложности. Например, нелинейный метод Чебышева при 16 итерациях обеспечивает выигрыш в помехоустойчивости 1,4 дБ, при этом его сложность составляет 73% (на 27% меньше) сложности алгоритма MMSE [36], а при 20 итерациях сложность составляет 90% (на 10% меньше) сложности алгоритма MMSE при выигрыше в помехоустойчивости порядка 2,2 дБ [35]. Хотя, основная область применения алгоритма модифицированного метода Ньютона это, системы Massive MIMO с высокой кратностью модуляции, но и для малого порядка модуляции (16 QAM) при 8 итерациях он обладает выигрышем в помехоустойчивости около 1 дБ при усложнении не более чем на 20% относительно алгоритма MMSE.

Рисунок 4.4 представляет собой плоскость «эффективность-сложность» и показывает относительные результаты помехоустойчивости и вычислительной сложности демодуляторов в условиях более высокой кратности модуляции 256QAM в системе Massive MIMO 64×64 .

Сравнение алгоритма модифицированного метода Ньютона было выполнено с известным оптимальным алгоритмом минимизирующим среднеквадратическое отклонение MMSE и с алгоритмом K-best, обладающего наиболее близкими характеристиками помехоустойчивости к другому оптимальному алгоритму максимального правдоподобия (ML).

На Рисунке 4.4 хорошо видно, что разработанный демодулятор mNw обладает выигрышем в помехоустойчивости около 6 дБ относительно MMSE, при этом усложнение обработки происходит всего на 17% (в 1,17 раза). А в сравнении с K-best при одинаковом результате помехоустойчивости демодулятор mNw в 500 раз проще [35, 142].

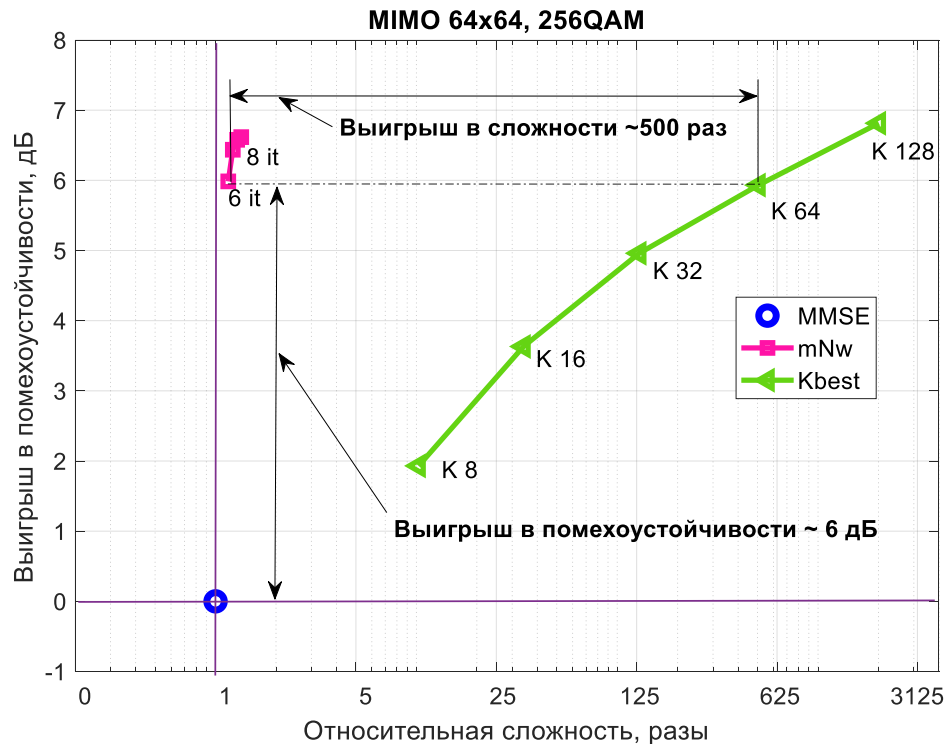


Рисунок 4.4 – Сравнение алгоритмов MMSE, K-best и модифицированного метода Ньютона в системе MIMO антенной конфигурации 64×64 (модуляция 256QAM) [35]

При сравнении рисунков можно заметить, что увеличение порядка модуляции с 16QAM до 256QAM для антенной конфигурации с 64 приемными и 64 передающими антеннами модифицированный метод Ньютона увеличивает преимущество перед алгоритмом MMSE по помехоустойчивости более чем на 5 дБ (с 1дБ до более 6 дБ), т.е. с увеличением порядка модуляции характеристики помехоустойчивости алгоритма mNw становятся все лучше характеристик алгоритма MMSE [35].

Проверим возможность реализации предложенных алгоритмов с применением цифровых сигнальных процессоров (ЦСП). Для цифровой обработки сигналов в реальном времени применяются специальные сигнальные процессоры, которые позволяют обрабатывать данные без прерывания выполнения внутренних математических операций [21, 22, 23, 24, 34, 148].

Возможность практической реализации алгоритмов рассмотрим на примере высокопроизводительного многоядерного процессора TMS320C6678 [149, 150], который обрабатывает данные с фиксированной и с плавающей точкой.

Цифровой сигнальный процессор TMS320C6678 имеет следующие характеристики производительности, которые были взяты из [149]:

- количество ядер процессора - 8;
- 44800 миллионов умножений в секунду на ядро процессора;
- 22400 миллионов операций с плавающей точкой в секунду (MFLOPS) на ядро процессора, при этом максимальная производительность составляет 160 GFLOPS [27, 149].

Проведем расчет времени на демодуляцию сигнала для систем MIMO с M приемными и M передающими антеннами по формуле:

$$t_{\text{алгоритм}} = \frac{\text{сложность}_{\text{алгоритм}}(M)}{\text{производительность}_{\text{процессора}}}, \quad (4.27)$$

где $\text{сложность}_{\text{алгоритм}}(M)$ — означает число операций, необходимых для реализации алгоритма демодуляции; $\text{производительность}_{\text{процессора}}$ — производительность цифрового сигнального процессора в MFLOPS.

Рассмотрим случай антенной конфигурации с 64 приемными и 64 передающими антеннами при использовании модуляции 16QAM.

Для алгоритма нелинейного метода Чебышева с 20 итерациями время необходимое для получения оценки символа будет составлять

$$t_{\text{ChebNL}} = \frac{1998080}{160000} = 12,488 \text{ мкс.}$$

Для алгоритма модифицированного метода Ньютона при 8 итерациях

$$t_{\text{mNw}} = \frac{2600512}{160000} = 16,2532 \text{ мкс.}$$

Длительность одного информационного символа найдем по формуле:

$$\tau_{\text{симв}} = \frac{MK_{\text{bit}}}{rC_{\text{max}}}, \quad (4.28)$$

где M — число антенн; $K_{\text{bit}} = \log_2(\text{порядок модуляции})$ — число бит на символ; r — скорость кодирования; C_{max} — максимальная скорость передачи информации.

Для системы Massive MIMO с 64 приемными и 64 передающими антеннами при использовании модуляции 16QAM при помехоустойчивом кодировании со скоростью $r = \frac{1}{2}$ с максимальной скоростью передачи информации равной 1 Гбит/с значение длительности информационного символа будет:

$$\tau_{\text{симв}} = \frac{64 \cdot 4}{0,5 \cdot 1024 \cdot 10^6} = 0,5 \text{ мкс.}$$

Таким образом, в системах Massive MIMO для скоростей передачи информации 1 Гбит/с реализация предложенных алгоритмов на одном ЦСП TMS320C6678 невозможна, из-за высокой вычислительной сложности, т.к. выполнение всех операций требует больше времени, чем длительность одного информационного символа. Потребуется параллельная обработка данных на нескольких ЦСП [33].

Проверим возможность реализации предложенных алгоритмов демодуляции с помощью программируемых логических интегральных схем (FPGA).

Будем использовать FPGA модели Virtex-7 производства Xilinx. Эта модель обладает следующими техническими характеристиками [151, 152, 153]:

- число логических ячеек ρ составляет 1955 тысяч;
- максимальная тактовая частота FPGA равна 741 МГц;
- число процессорных секций составляет 3600;
- пиковая производительность цифровой обработки сигналов составляет 5335 миллиард операций умножения с накоплением в секунду (GMAC/c).

Для этой модели FPGA за интервал времени (один такт) $\Delta_{\text{Virtex-7}} = \frac{1}{F_{CL}} = \frac{1}{741 \cdot 10^6} = 0,0013 \cdot 10^{-6}$ может быть выполнено 1955 тысяч операций.

Время, необходимое для демодуляции сигнала с использованием FPGA рассчитывается по формуле:

$$t_{FPGA_{\text{Алгоритм}}} = \frac{\text{СЛОЖНОСТЬ}_{\text{алгоритм}}(M)}{\rho} \cdot \Delta_{FPGA} \quad (4.29)$$

Найдем затрачиваемое время для демодуляции в системах Massive MIMO с 64 приемными и 64 передающими антеннами модуляции 16QAM.

Для алгоритма нелинейного метода Чебышева с 20 итерациями время необходимое на демодуляцию сигнала будет составлять

$$t_{Virtex-7_{ChebNL}} = \frac{1998080}{1955 \cdot 10^3} \cdot \Delta_{Virtex-7} = 0,001379 \text{ мкс.}$$

Для алгоритма модифицированного метода Ньютона при 8 итерациях

$$t_{Virtex-7_{mNw}} = \frac{2600512}{1955 \cdot 10^3} \cdot \Delta_{Virtex-7} = 0,001795 \text{ мкс.}$$

Также оценим время работы алгоритма модифицированного метода Ньютона для 256QAM при антенной конфигурации с 64 приемными и 64 передающими антеннами.

$$t_{Virtex-7_{mNw256QAM}} = \frac{2600512}{1955 \cdot 10^3} \cdot \Delta_{Virtex-7} = 0,001795 \text{ мкс.}$$

Поскольку сложность алгоритма модифицированного метода Ньютона не зависит от порядка модуляции, то для одной и той же антенной конфигурации время оценки символа на FPGA модели Virtex-7 имеет одно значение, что для 16QAM, что для 256QAM, однако, стоит отметить, что выигрыш в помехоустойчивости при увеличении порядка модуляции весьма заметный.

Итак, в системах беспроводной связи, использующих технологию Massive MIMO со скоростью передачи информации 1 Гбит/с использование предложенных демодуляторов выполненных на FPGA возможно, поскольку время счета алгоритма, не превышает длительности одного информационного символа.

4.4. Выводы к разделу 4

1. Алгоритмы MMSE, линейного и нелинейного методов Чебышева, а также модифицированного метода Ньютона имеют примерно одинаковый порядок сложности, а алгоритмы с перебором (K-best, ML) существенно сложнее.
2. Для системы Massive MIMO 64×64 с модуляцией 16QAM алгоритм нелинейного метода Чебышева превосходит алгоритм MMSE не только в помехоустойчивости, но и в сложности. Например, алгоритм нелинейного метода Чебышева при 16 итерациях обеспечивает выигрыш в помехоустойчивости 1,4 дБ, при этом его сложность составляет 73% (на 27% меньше) сложности алгоритма MMSE, а при 20 итерациях сложность составляет 90% (на 10% меньше) сложности алгоритма MMSE при выигрыше в помехоустойчивости порядка 2,2 дБ.
3. Для систем Massive MIMO с кратностью модуляции 256QAM и выше использование предложенной негауссовской аппроксимации априорного распределения совместно с модифицированным методом Ньютона позволяет обеспечить выигрыш в помехоустойчивости примерно 6 дБ по сравнению с алгоритмом MMSE при увеличении сложности обработки в 1,17 раза (всего на 17%), а по сравнению с алгоритмом K-best при равной помехоустойчивости выигрыш в сложности составляет около 500 раз.
4. Предложенные алгоритмы нелинейного метода Чебышева, модифицированного метода Ньютона, реализованные на FPGA можно использовать для демодуляции в системах Massive MIMO.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в диссертационной работе решения представляют собой предложения по демодуляции сигналов в системах MIMO с большим числом антенн при использовании модуляции разной кратности, в том числе и очень высокой.

Основные результаты проведенных исследований и разработок, сводятся к следующему:

1. Для систем MIMO с большим числом антенн с модуляцией до 16QAM разработан нелинейный итерационный алгоритм демодуляции на основе метода Чебышева с оценками собственных значений, вычислительная сложность которого меньше или имеет тот же порядок что и у алгоритма MMSE, при этом характеристики помехоустойчивости лучше, чем у алгоритма MMSE более 2дБ.
2. Для систем Massive MIMO с высокой кратностью QAM-модуляции разработан новый алгоритм демодуляции с применением негауссовской аппроксимации априорного распределения и итерационного модифицированного метода Ньютона, обеспечивающего улучшение (около 6дБ) характеристик помехоустойчивости по сравнению с линейным алгоритмом MMSE, при сохранении того же порядка сложности.
3. Показано, что предложенные алгоритмы могут быть реализованы и использованы для демодуляции в системах Massive MIMO.

Таким образом, цель диссертационной работы достигнута, и поставленная научная задача разработки итерационных алгоритмов демодуляции в системах беспроводной связи, использующих технологию MIMO с большим числом антенн, вычислительная сложность которых имеет тот же порядок, что и у

алгоритма MMSE, при этом характеристики помехоустойчивости лучше, чем у алгоритма MMSE решена.

Список сокращений и условных обозначений

BER	–	Bit error rate	коэффициент ошибок на бит
BPSK	–	Binary Phase Shift Keying	Двоичная фазовая модуляция
FER		Frame Error Rate	Коэффициента ошибок на кадр
FPGA		Field-Programmable Gate Array	Программируемая логическая интегральная схема, ПЛИС
LTE	–	Long Term Evolution	Сети беспроводного доступа в долгосрочной перспективе
MAP	–	Maximum Posterior Probability	Максимум апостериорной плотности вероятности
MIMO	–	Multiple-Input-Multiple-Output	Системы с несколькими антеннами на передающей и приёмной сторонах
ML	–	Maximum likelihood	Максимум правдоподобия
MMSE	–	Minimum Mean squared error	Минимальная среднеквадратическая ошибка
QAM	–	Quadrature Amplitude	Квадратурная амплитудная

		Modulation		модуляция
QPSK	–	Quadrature Phase Shift Keying		Квадратурная фазовая модуляция
SNR	–	Signal-to-noise ratio		Отношение сигнал/шум
SM	–	Spatial Multiplexing		Пространственное мультиплексирование
ZF	–	Zero Forcing		Метод обнуления
КАМ	–	Квадратурная амплитудная модуляция		
МП	–	Метод максимального правдоподобия		
МСКО	–	Метод минимума среднеквадратической ошибки		
ОСШ	–	Отношение сигнал/шум		
ЦСП	–	цифровой сигнальный процессор		

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Распоряжение Правительства Российской Федерации от 28 июля 2017 г. № 1632-р. Национальная программа "Цифровая экономика Российской Федерации" - Режим доступа: <http://government.ru/docs/28653/>
2. Holma, H. WCDMA for UMTS HSPA Evolution and LTE / H. Holma, A. Toskala. – Chichester, UK, John Wiley & Sons Ltd, 2010. – 618 p.
3. Holma, H. 5G Technology: 3GPP New Radio / H. Holma, A. Toskala, T. Nakamura. – John Wiley & Sons, 2020. – 536 p.
4. Albreem, M.A. Comparative Analysis of Data Detection Techniques for 5G Massive MIMO Systems./ Albreem, M.A.; Kumar, A.; Alsharif, M.H.; Khan, I.; Choi, V.J.; Sustainability 2020, 12(21), 9281. Режим доступа: <https://doi.org/10.3390/su12219281>
5. Бакулин, М.Г. Технология ММО: принципы и алгоритмы / М.Г. Бакулин, Л.А. Варукина, В.Б. Крейнделин.– М.: Горячая линия-Телеком, 2014. – 244с.
6. Бакулин, М.Г. Технологии в системах радиосвязи на пути к 5G / М.Г. Бакулин, В.Б. Крейнделин, Д.Ю. Панкратов. – М.: Горячая линия - Телеком, 2018. – 280 с.
7. Бакулин, М.Г. Проблема повышения спектральной эффективности и емкости в перспективных системах связи 6G / М.Г. Бакулин, В.Б. Крейнделин //Т-Сотт: Телекоммуникации и транспорт. 2020. Т. 14, №2. – С. 25-31.
8. Abu-Rgheff. 5G physical layer technologies/ Abu-Rgheff, Mosa Ali – UK: JohnWiley & Sons, 2020. – 579 p.
9. Jamil Y. Khan. Internet of Things (IoT): Systems and Applications/ Jamil Y. Khan, Mehmet R. Yuce. – USA, Jenny Stanford Publishing, 2019. – 350 p.
10. Боккуци, Д. Обработка сигналов для беспроводной связи/ Д. Бокуци. – М.: Техносфера, 2012. – 672 с.

11. Прокис, Д. Цифровая связь/ Д. Прокис. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.
12. Foschini, G.J. On Limits of Wireless Communications in a Fading Environment When Using Multiple Antennas/ G. J. Foschini, M. J. Gans // *Wireless Personal Communication*, 1998. – Vol. 6, № 3. – P. 311-335.
<https://doi.org/10.1023/a:1008889222784>
13. Скляр, Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Б. Скляр. – М.: Издательский дом Вильямс, 2003. – 1104 с.
14. Ali, Zaidi. 5G Physical Layer Principles, Models and Technology Components / Ali Zaidi, Frederik Athley, Jonas Medbo, Ulf Gustavsson, Giuseppe Durisi, Xiaoming Chen // Elsevier Ltd. — 2018. — P. 314.
15. Anwer, Al-Dulaimi. 5G Networks: Fundamental Requirements, Enabling Technologies, and Operations Management / Anwer Al-Dulaimi // Wiley–IEEE Press. — 2018. — P. 784.
16. Mosa, Ali Abu-Rgheff. 5G Physical Layer Technologies / Mosa Ali Abu-Rgheff // Wiley–IEEE Press. — 2019. — P. 592.
17. Manish, Mandloi. 5G and Beyond Wireless Systems. PHY Layer Perspective/ Manish Mandloi, Devendra Gurjar, Prabina Pattanayak, Ha Nguyen. — Singapore: Springer, 2021. — 425 p. <https://doi.org/10.1007/978-981-15-6390-4>
18. Бакулин, М.Г. Применение технологии ММО в современных системах беспроводной связи разных поколений/ М.Г. Бакулин, В.Б. Крейнделин, Д.Ю. Панкратов // *T-Comm: Телекоммуникации и транспорт*. — 2021. Т. 15, №4. — С. 4-12.
19. Панкратов, Д.Ю. Моделирование системы ММО/Д.Ю. Панкратов, А.Г. Степанова // *Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения*. — 2017. Т. 17, № 4. — С. 1052-1056.
20. Панкратов Д.Ю. Алгоритм демодуляции на основе метода Чебышева для систем ММО / Д.Ю. Панкратов, А.Г. Степанова // *Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения*. — 2018. — Т.18, №4. — С.1057-1061.

21. Иванова, В.Г. Цифровая обработка сигналов и сигнальные процессоры: учебное пособие / В.Г. Иванова, А.И. Тяжев. – 2-ое изд. – Самара: ПГУТИ, 2017. – 252 с.
22. Гребешков, А.Ю. Микропроцессорные системы и программное обеспечение в средствах связи: учебное пособие. Гриф УМО/ А.Ю. Гребешков. – Самара: ПГАТИ, 2011. – 223 с.
23. Smith, S.W. The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing / S.W. Smith. – Second Edition. – California Technical Publishing, 1999. – 664 p.
24. Витязев, В.В. Цифровые процессоры обработки сигналов и их применение в технике связи/ В.В. Витязев, А.Н. Соловьев // Электросвязь. – 1994. – № 12.
25. Bakulin, M. G. Analysis of the capacity of MIMO channel in fading conditions / M. G. Bakulin, V. B. Kreindelin and D. Y. Pankratov// 2018 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO) . – Minsk, 2018. – P. 1-6.
26. Крейнделин, В.Б. Разработка эффективных методов и алгоритмов обработки сигналов для высокоскоростных систем беспроводной связи: дис. ... д-ра техн. наук: 05.12.13 / Виталий Борисович Крейнделин; Моск. техн. ун-т связи и информатики. – М., 2009. – 290 л.
27. Смирнов, А. Э. Исследование и разработка алгоритмов обработки сигналов в системах беспроводной связи с большим количеством антенн: дис. ... канд. техн. наук: 05.12.13 / Алексей Эдуардович Смирнов; Моск. техн. ун-т связи и информатики. – М., 2019. – 159 л.
28. IEEE 802.11be Extremely High Throughput: The Next Generation of Wi-Fi Technology Beyond 802.11ax/ D. Lopez-Perez, A. Garcia-Rodriguez, L. Galati-Giordano, M. Kasslin and K. Doppler. // IEEE Communications Magazine. – 2019. – Vol. 57(9). – P. 113-119.
29. Massive MIMO for next generation wireless systems/ E.G. Larsson, O. Edfors, F.Tufvesson, T.L. Martezza // Communications Magazine, IEEE. – 2014. – Vol. 52, Issue 2. – P. 186-195.

30. MIMO Techniques in WiMAX and LTE: A Feature Overview / Li Qinghua, Li Guangjie, Lee Wookbong, Lee Moon il, Mazzaresse David, Clerckx Bruno, Li Zexian // Communications Magazine, IEEE. – 2010. – P. 86-92.
31. Bai, L. Complexity MIMO Detection / L. Bai, L., J. Choi. – N.Y.: Springer, 2012. – 230 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8583-5>
32. Low-complexity near-optimal signal detection for uplink large-scale MIMO systems / Xinyu Gao, Linglong Dai, Yongkui Ma and Zhaocheng Wang // Electron Lett. – 2014. – Vol. 50, № 18. – P.1326–1328. doi:[10.1049/el.2014.0713](https://doi.org/10.1049/el.2014.0713)
33. Leibo, Liu. Massive MIMO Detection Algorithm and VLSI Architecture/ Leibo, Liu, Guiqiang Peng, Shaojun Wei. – Springer Nature Singapore Pte Ltd. and Science Press, Beijing, China 2019. – 348p. <https://doi.org/10.1007/978-981-13-6362-7> .
34. Косичкина, Т.П. Цифровые сигнальные процессоры и их применение в системах телекоммуникаций и электроники: учебное пособие для вузов/ Т.П. Косичкина, В.С. Сперанский – М.: Горячая линия-Телеком, 2022. – 316 с.
35. Анализ эффективности и сложности демодуляции с использованием негауссовской аппроксимации в системах massive MIMO/ М.Г. Бакулин, В.Б. Крейнделин, Д.Ю. Панкратов, А.Г. Степанова // Информационные процессы. – 2022. – Т. 22. № 2. – С. 77-92.
36. Панкратов, Д.Ю. Вычислительная сложность алгоритмов демодуляции систем MIMO с большим числом антенн/ Д.Ю. Панкратов, А.Г. Степанова // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. – 2021. – Т. 11, № 1. – С. 11-20.
37. Verdu, S. Multiuser Detection/ S. Verdu – Cambridge: Univ. Press, 1998. – 451 p.
38. Крейнделин, В.Б. Новые методы обработки сигналов в системах беспроводной связи/ В.Б. Крейнделин. – СПб.: Линк, 2009. – 272 с.
39. Тихонов, В.И. Оптимальный прием сигналов / В.И. Тихонов. –М.: Радио и связь, 1983. – 320 с.

40. Damen, M.O. On Maximum-Likelihood Detection and the Search for the Closest Lattice Point / M. O. Damen, H. El Gamal, and G. Caire // IEEE Trans. Info. Theory. – Vol. 49, №. 10 . – 2003. – P. 2389–2402. doi:10.1109/tit.2003.817444.
41. Fackler, P.L. Notes of Matrix Calculus/ P.L. Fackler. – North Carolina State Univeristy, 2005. – 14 p. <https://studyres.com/doc/15927579/notes-on-matrix-calculus?page=14>
42. Ахо, А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов/А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман ; пер. с англ. А.О. Слисенко под ред.Ю.В. Матиясевича. — М.: Мир, 1979. — 536 с.
43. Панкратов, Д.Ю. Исследование и разработка алгоритмов многопользовательской демодуляции для систем сотовой подвижной связи : дис. ... канд. техн. наук: 05.12.13 / Денис Юрьевич Панкратов; Моск. техн. ун-т связи и информатики. – М., 2006. – 145 л.
44. Сейдж, Э. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении/ Э. Сейдж, Дж. Мелс; пер. с англ. под ред. проф. Б.Р. Левина. – М.: Связь, 1976. – 496 с.
45. Байесовское оценивание с последовательным отказом и учетом априорных знаний/ М. Г. Бакулин, В. Б. Крейнделин, В. А. Григорьев, В. О. Аксенов, А. С. Щесняк // Радиотехника и Электроника – 2020. – №3, Т. 65. – С. 257-266.
46. An Introduction to the Multi-User MIMO Downlink/ Quentin H. Spencer, Christian B. Peel, A. Lee Swindlehurst, Martin Haardt // IEEE Commun. Mag. – 2004. – Vol. 42, № 10. – P. 60–67. doi:[10.1109/mcom.2004.1341262](https://doi.org/10.1109/mcom.2004.1341262)
47. Новые алгоритмы формирования и обработки сигналов в системах подвижной связи/ Зубарев Ю.Б., Трофимов Ю.К., Шлома А.М., Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б.// Электросвязь. 2004. – № 3. – С. 11-13.
48. Multiple Access Techniques for 5G Wireless Networks and beyond / Mojtaba Vaezi, Zhiguo Ding , Vincent Poor. – USA: Springer, 2019 – 670 p.
49. Clerckx, B. MIMO Wireless Networks: Channels, Techniques and Standards for Multi-Antenna, Multi-User and Multi-Cell Systems/ Bruno Clerckx, Claude Oestges. – UK: Elsevier, 2013. – 733 p.

50. Comparative Analysis of Data Detection Techniques for 5G Massive MIMO Systems/ Mahmoud A. Albreem, Arun Kumar, Mohammed H. Alsharif, Imran Khan and Bong Jun Choi// Sustainability. – 2020. – №12, 9281 – P. 1-12. doi:[10.3390/su12219281](https://doi.org/10.3390/su12219281)
51. MIMO-OFDM for LTE, WiFi and WiMAX: Coherent versus Non-coherent and Cooperative Turbo-Tranceivers / Lajos Hanzo, Yosef (Jos) Akhtman, Li Wang, Ming Jiang. – John Wiley Sons, 2010. – 658 p. doi:[10.1002/9780470711750](https://doi.org/10.1002/9780470711750)
52. Крейнделин, В.Б. Эффективность методов обработки сигналов в системах MU-MIMO высоких порядков / В.Б. Крейнделин, А.Э. Смирнов, Т.Б.К. Бен Режеб // Т-Comm – Телекоммуникации и транспорт. – 2016. – №12. – С. 24-30.
53. Kreyndelin, V.B. Nonlinear iterative precoding algorithm for MIMO multiuser systems / V.B. Kreyndelin, T.B.K. Ben Rejeb // Radioelectronics and Communications Systems. — 2017. — Vol. 60, № 10. — P. 449-457.
54. Shaoshi, Yang. Fifty Years of MIMO Detection: The Road to Large-Scale MIMOs/ Shaoshi Yang. Lajos Hanzo // IEEE Communications Surveys & Tutorials. – 2015. – P. 1941-1988. <https://arxiv.org/pdf/1507.05138.pdf> doi:10.1109/comst.2015.2475242
55. Волчков, В.П. Линейное прекодирование как одна из форм пространственно-временного кодирования для систем MIMO / В.П. Волчков, А.А. Шурахов // Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения. – 2014. – Т. 14, № 5. – С. 210-213.
56. Волчков, В.П. Исследование эффективности алгоритмов линейного прекодирования в системах MIMO / В.П. Волчков, А.А. Шурахов // Электросвязь. – 2012. – № 5. – С. 15-16.
57. Поборчая, Н.Е. Синтез и анализ алгоритмов оценки искажений сигнала в системе с MIMO в условиях априорной неопределенности / Н.Е. Поборчая Н.Е., А.В. Пестряков // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. – 2019. – Т. 13, № 10. – С. 13-20.

58. Поборчая, Н.Е. Оценка и компенсация искажений сигнала в приемном тракте систем с ММО / Н.Е. Поборчая Н.Е., А.В. Пестряков // Электросвязь.. – 2017. – № 12. – С. 42-48.
59. Wang, X. Wireless Communication Systems: Advanced Techniques for Signal Reception/ X. Wang and H. V. Poor. — USA: Prentice Hall, 2009. — 682 p.
60. Grant, Alex. Iterative Implementations for Linear Multiuser Detectors / Alex Grant, Christian Schlegel. — 1999. — 37 p. https://www.researchgate.net/publication/2506664_iterative_implementations_for_linear_multiuser_detectors
61. Тихонов, В.И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем/ В.И. Тихонов, В.Н. Харисов — М.: Радио и связь, 1991. — 608 с.
62. Перов, А.И. Статистическая теория радиотехнических систем: учеб. пособие для вузов / А.И. Перов — М.: Радиотехника, 2003. — 398 с.
63. Новые алгоритмы формирования и обработки сигналов в системах подвижной связи / А.М. Шлома, М.Г. Бакулин, В.Б. Крейнделин, А.П. Шумов; под ред. А.М. Шломы. — М.: Горячая линия-Телеком, 2008. — 344с.
64. Левин, Б.Р. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике / Б.Р. Левин. – М.: Советское радио, 1960. – 663 с.
65. Тихонов, В.И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
66. Аджемов, А.С. Общая теория связи: учебник для вузов /А.С. Аджемов, В.Г. Санников. – М.: Горячая — Телеком, 2018. – 624 с.
67. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1990. — 614 с.
68. Самарский, А.А. Численные методы : учеб. пособие для вузов / А.А. Самарский, А.В. Гулин. — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989.— 432 с.
69. Березин, И.С. Методы вычислений / И.С. Березин, Н.П. Жидков. — М.: Физматгиз, 1962.— 464 с.

70. Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. — СПб. : Лань, 2007.— 664 с.
71. Van der Vorst, H.A. Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems / H.A. Van der Vorst. — Cambridge University Press, 2003. — 237 p.
<https://doi.org/10.1017/cbo9780511615115>
72. Saad, Y. Conjugate gradient-like algorithms for solving nonsymmetric linear systems / Y. Saad, M.H. Schultz // Mathematics of computation. — 1985. — Vol. 44, № 170. — P. 417-424.
73. James E. Gentle. Matrix Algebra: Theory, Computations, and Applications in Statistics/ James E. Gentle. — Springer New York, NY, 2007, 536 p.
<https://doi.org/10.1007/978-0-387-70873-7>
74. Ивченко, Г.И. Математическая статистика: учебное пособие для вузов / Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. — М.: Высш. шк., 1992. — 303 с.
75. Кульбак, С. Теория информации и статистика/ Соломон Кульбак ; перевод с англ. Д. И. Гордеева и А. В. Прохорова под ред. и с предисл. акад. А. Н. Колмогорова. — М: Наука, 1967. — 408 с.
76. Соболев, И. М. Метод Монте-Карло / И.М. Соболев — М.: Наука, 1968. — 64с.
77. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. учеб. пособие для вузов /Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. — М.: Высш. Шк.,2000. — 480с.
78. Пугачев, В.С. Теория вероятностей и математическая статистика / В.С. Пугачев. — М.: Наука, 1979 — 495с.
79. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под редакцией А.А. Свешникова. — М.: Наука, 1965. — 656с.
80. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, Р. Штайн. — М.: Издательский дом Вильямс, 2005. — 1296 с.

81. Ахо Альфред, В. Структуры данных и алгоритмы : учеб. пособие / Альфред В. Ахо, Джон Э. Хопкрофт, Джеффри Д. Ульман ; пер. с англ. и ред. А. А. Минько. — М.: Вильямс, 2010. — 391 с.
82. Макконелл, Дж. Основы современных алгоритмов / Джеффри Макконелл ; пер. с англ. под ред. С.К. Ландо; дополнение М.В. Ульянова. — М.: Техносфера, 2004. — 368 с.
83. Кнут, Д.Э. Искусство программирования. Том 1. Основные алгоритмы / Дональд Эрвин Кнут. — М.: Издательский дом Вильямс, 2002. — 720 с.
84. Petersen, K.V. The Matrix Cookbook / Kaare Brandt Petersen, Michael Syskind Pedersen — <http://matrixcookbook.com>. — Version: November 15, 2012. — P.72.
85. Gentle, James E. Matrix Algebra: Theory, Computations, and Applications in Statistics/ James E. Gentle — Springer New York, NY, 2007. — 536 p.
<https://doi.org/10.1007/978-0-387-70873-7>
86. Тыртышников, Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра/ Е. Е. Тыртышников. — М.: Физматлит, 2007. — 476 с.
87. Мальцев, И.А. Линейная алгебра: учебное пособие / И.А. Мальцев. — СПб.: Издательство Лань, 2010. — 384 с.
88. Ланкастер, П. Теория матриц / П. Ланкастер. — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1973. — 280 с.
89. Fam, A.T. Efficient complex matrix multiplication / A.T. Fam // IEEE Transactions on Computers. — 1988. — Vol. 37, Issue: 7. — P. 877-879.
doi:[10.1109/12.2236](https://doi.org/10.1109/12.2236).
90. Голуб, Дж. Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. — М.: Мир, 1999. — 548 с.
91. Horn, R. A. Matrix analysis / R.A. Horn, C.R. Johnson. — Cambridge University Press, 2013. — 662 p.
92. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. — М.: Наука, 1975. — 432 с.

93. 3GPP TS 36.871 v.11.0.0. Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Downlink Multiple Input Multiple Output (MIMO) enhancement for LTE-Advanced (Release 11), 2011.
94. IEEE 802.11n Standard for Information Technology - Telecommunications and Information Exchange Between Systems - Local and Metropolitan Area Networks - Specific Requirements Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications Amendment 5: Enhancements for Higher Throughput, 2009.
95. IEEE 802.11ac Standard for Information Technology - Telecommunications and Information Exchange Between Systems - Local and Metropolitan Area Networks - Specific Requirements Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications Amendment 4: Enhancements for Very High Throughput for Operation in Bands below 6 GHz, 2013.
96. IEEE 802.11ax Draft Standard for Information Technology - Telecommunications and Information Exchange Between Systems Local and Metropolitan Area Networks - Specific Requirements Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications Amendment Enhancements for High Efficiency WLAN, 2019
97. Правила применения оборудования радиодоступа. Часть I. Правила применения оборудования радиодоступа для беспроводной передачи данных в диапазоне от 30 МГц до 66 ГГц, утвержденные приказом Министерства связи и массовых коммуникаций Российской Федерации от 14.09.2010 №124 со всеми изменениями, 2020.
98. ETSI TS 136 211 V10.0.0 (2011-01). LTE; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Physical channels and modulation (3GPP TS 36.211 version 10.0.0 Release 10), 2011.
99. ETSI TS 136 201 V15.1.0 (2018-07) LTE; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); LTE physical layer; General description (3GPP TS 36.201 version 15.1.0 Release 15), 2018

100. 3GPP TS 36.211 V15.10.0 (2020-06) 3rd Generation Partnership Project; Technical Specification Group Radio Access Network; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Physical channels and modulation (Release 15), 2020.
101. ETSI TS 138 101-1 5G; NR; User Equipment (UE) radio transmission and reception; Part 1: Range 1 Standalone. (3GPP TS 38.101-1 version 15.3.0 Release 15), 2018
102. ITU-R Rec. M.1457-8, “Detailed Specifications of the Radio Interfaces of International Mobile Telecommunications-2000 (IMT-2000),” May 2009.
103. Telecom Advisory Services, LLC, “The Economic Value of Wi-Fi: A Global View (2018 and 2023),” Aug. 2018.
104. Md Ruhul, Amin. In-Band Full Duplex Wireless LANs: Medium Access Control Protocols, Design Issues and Their Challenges / Md Ruhul Amin, Md Shohrab Hossain, Mohammed Atiquzzaman – Information 11(4):216 , 2020. –P. 26. doi:[10.3390/info11040216](https://doi.org/10.3390/info11040216)
105. Yokota, Y. Complexity reduction for higher order MIMO decoder using block diagonalization / Y. Yokota, H. Ochi // 2013 International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communication Systems. – 2013. – P. 235-239. doi:[10.1109/ispacs.2013.6704553](https://doi.org/10.1109/ispacs.2013.6704553)
106. Панкратов, Д.Ю. Компьютерное моделирование технологии MIMO для систем радиосвязи / Д.Ю. Панкратов, А.Г. Степанова // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. – 2018. – Том12. №12. – С.33-37.
107. Комаров, М.И. Анализ сложности алгоритмов демодуляции для систем MIMO с различным числом антенн / М.И. Комаров, Д.Ю. Панкратов, А.Г. Степанова // Всероссийская конференция Радиоэлектронные устройства и системы для инфокоммуникационных технологий - РЭУС-2021. – Москва, 2021. – С. 222-226.
108. Помехоустойчивость и вычислительная сложность алгоритмов демодуляции для систем MIMO с разным числом антенн / М.И. Комаров,

- Д.Ю. Панкратов, А.Е. Чуманов, А.Г. Степанова // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. – 2022. – Т. 12, № 1. – С. 39-47.
109. Shirly, Edward A. Modified K-best detection algorithm for MIMO systems/ Shirly Edward A. and Malarvizhi S.// ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. – 2015. – Vol. 10, № 5. – P. 2284-2288.
110. MMSE Based K-best Algorithm for Efficient MIMO Detection/ M. Bakulin, V. Kreyndelin, A. Rog, D. Petrov, S. Melnik // in 9th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT) – Munich, Germany, 4-6 November, 2017. – P.358-363.
doi:[10.1109/icumt.2017.8255198](https://doi.org/10.1109/icumt.2017.8255198)
111. VLSI Implementation of a Fully-Pipelined K-Best MIMO Detector with Successive Interference Cancellation / Ibrahim A. Bello, Basel Halak, ·Mohammed El-Hajjar, ·Mark Zwolinski // Circuits, Systems, and Signal Processing. – 2019.– P. 4739–4761. <https://doi.org/10.1007/s00034-019-01079-0>
112. Johanna, Ketonen. Performance-complexity comparison of receivers for a LTE MIMO-OFDM system/ Johanna Ketonen, Markku J. Juntti, Joseph R. Cavallaro // Article in IEEE Transactions on Signal Processing. – 2010. – P. 3360-3370.
doi:[10.1109/tsp.2010.2044290](https://doi.org/10.1109/tsp.2010.2044290)
113. Итерационный метод демодуляции MASSIVE MIMO при негауссовской аппроксимации / М.Г. Бакулин, В.Б. Крейнделин, Д.Ю. Панкратов, А.Г. Степанова // Информационные процессы. – 2021. – Т. 21. № 3. – С. 137-148.
114. Панкратов, Д.Ю. Нелинейный итерационный демодулятор систем MIMO для различных видов модуляции / Д.Ю. Панкратов, А.Г. Степанова // В сборнике: Современные технологии обработки сигналов. 2-я Всероссийская конференция: доклады конференции. – 2019. – С. 82-86.
115. Nuebauer, A. Coding Theory Algorithms, Architectures and Applications / A. Nuebauer, J. Freudenberger, V. Kuhn. – Chichester, U.K.: John Wiley & Sons, 2007. – 340 p.

116. Ballard, G. Communication Costs of Strassen's Matrix Multiplication / G. Ballard, J. Demmel, O. Holtz, O. Schwartz // Communications of the ACM. – 2014. – Vol. 57, № 2. – P. 107-114.
117. Boehnke, R. Reduced complexity MMSE detection for BLAST architectures / R. Boehnke, D. Wuebben, V. Kuehn, K.D. Kammeyer // in proc. IEEE 2003 Global Communications Conference – Globecom'2003, San Francisco, California, USA), 2003. – P. 2258–2262.
118. Смирнов, А.Э. Исследование эффективности методов демодуляции сигналов в системах связи с большим количеством антенн / А.Э.Смирнов, Т.Б.К. Бен Режеб // Труды 70-й международной конференции «Радиоэлектронные устройства и системы для инфокоммуникационных технологий – РЭУС-2015», посвященной дню Радио. Выпуск LXX. – М.: Брис-М, 2015. – С. 251-255.
119. Kreyndelin, V. Effective precoding and demodulation techniques for 5G communication systems / V. Kreyndelin, A. Smirnov, T. Ben Rejeb // in proc. Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications. – 2018. – P. 1-6
120. Kreyndelin, V.B. Decreasing of computational complexity of demodulation algorithms in multi-antenna systems due to application of fast algorithms / V.B. Kreyndelin, A.E. Smirnov // Telecommunications and Radio Engineering. – 2016. – Vol.75, Issue: 19. – P. 1757-1773.
121. Крейнделин, В.Б. Методы снижения вычислительной сложности алгоритмов демодуляции без потерь в помехоустойчивости в системах связи с большим количеством антенн / В.Б. Крейнделин, А.Э. Смирнов // Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения: материалы международной научно-технической конференции INTERMATIC-2016. – М.: Галлея-Принт, 2016. – Т.: 16, №5. – С. 305-308.
122. Крейнделин, В.Б. Перспективы использования систем Massive MIMO в системах беспроводной связи / В.Б. Крейнделин, А.Э. Смирнов, Т.Б.К. Бен Режеб // Перспективные технологии в средствах передачи информации:

- материалы 11-ой международной научно-технической конференции. – Владимир: ВлГУ, 2015. – С. 113-116.
123. Ермолаев, В.Т. Теоретические основы обработки сигналов в беспроводных системах связи: Монография. / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флакман. – Нижний Новгород: Издательство ННГУ им. Н.И. Лобачевского. — 2011. — С. 368.
124. Технология OFDM : учеб. пособие для вузов / М. Г. Бакулин, В. Б. Крейнделин, А. М. Шлома, А. П. Шумов. – Горячая линия -Телеком, 2017. – 352 с.
125. Варукина, Л. А. Исследование и разработка алгоритмов обработки сигналов для систем связи с пространственно-временным кодированием: дис. ... канд. техн. наук: 05.12.13 / Варукина Лидия Александровна; Моск. техн. ун-т связи и информатики. – М., 2009. – 127 л.
126. Pankratov, D. Linear and Nonlinear Chebyshev Iterative Demodulation Algorithms for MIMO Systems with Large Number of Antennas/ D. Pankratov, A. Stepanova // 2019, 24th Conference of Open Innovations Association FRUCT, – Moscow, Russia, 2019. – P. 307-312.
127. Pankratov, D.Y. Linear iterative demodulation algorithm for MIMO systems with large number of antennas/ D. Y. Pankratov, A.G.Stepanova // В сборнике: Proceedings of the International Conference Technology & Entrepreneurship in Digital Society TEDS. Proceedings of the International Conference. – 2019. – P. 61-64.
128. Kreindelin, V.B. Analysis of Iterative Demodulation Algorithm for MIMO System with Different Number of Antennas /V.B. Kreindelin, D. Y. Pankratov, A.G.Stepanova // Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems, 2018. – P.1-4.
129. Pankratov, D.Y. Nonlinear Iterative Chebyshev Based Demodulation Algorithm With Eigenvalues Estimates Of The Channel Matrix For Massive MIMO Systems/ D. Y. Pankratov, A. G. Stepanova // Systems of Signal Synchronization

- Generating and Processing in Telecommunications SYNCHROINFO – 2020. – P. 1-5.
130. Kreyndelin, V.B. Chebyshev type nonlinear iterative demodulation algorithm for MIMO systems with large number of antennas/ V. B. Kreyndelin, D. Yu. Pankratov, A. G. Stepanova // Telecommunications and Radio Engineering – 2020. – № 79. Vol.13. – P. 1109-1119. doi:[10.1615/telecomradeng.v79.i13.10](https://doi.org/10.1615/telecomradeng.v79.i13.10)
131. Крейнделин, В.Б. Нелинейный итерационный демодулятор систем ММО с большим числом антенн для различных видов модуляции / В.Б. Крейнделин, Д.Ю. Панкратов, А.Г. Степанова // В сборнике: Радиоэлектронные устройства и системы для инфокоммуникационных технологий РЭУС-2020. – Москва, 2020. – С. 26-30.
132. Новый подход к задачам ММО-детектирования и многопользовательской демодуляции / М.Г. Бакулин, В.Б. Крейнделин, Д.Ю. Панкратов, А.Г. Степанова // Информационные процессы. – 2021. – Т. 21. № 2. – С. 93-107.
133. Honig, M.L. Advances in Multiuser Detection / M.L. Honig. – Hoboken: John Wiley-Sons, Inc., 2009. – 512 p.
134. Effective signal detection for the spatial multiplexing MIMO systems/ M.G. Bakulin, V.V. Vityazev, A.P. Shumov, V.B. Kreyndelin // Telecommunications and Radio Engineering. – 2018. – Vol. 77, № 13. – P. 1141-1158.
135. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Элементарные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.:Наука, 1981. – 798 с.
136. Applying a new approximation to demodulation in MASSIVE MIMO systems / M.G. Bakulin, V.B. Kreindelin, D.Y. Pankratov, A.G. Stepanova // В сборнике: 2021 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems, WECONF 2021. – Conference Proceedings. 2021. – P. 9470589. doi:[10.1109/weconf51603.2021.9470589](https://doi.org/10.1109/weconf51603.2021.9470589)
137. Fishman, G. S. Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications / George S. Fishman. – New Yrk: Springer, 1996. – 698 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2553-7>

138. Математический энциклопедический словарь. – М.: Сов. энциклопедия, 1988. –847с.
139. Modified newton's method in massive MIMO demodulation with Non-Gaussian approximation / M.G. Bakulin, V.B. Kreindelin, D.Y. Pankratov, A.G. Stepanova // В сборнике: 2022 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications, SOSG 2022 - Conference Proceedings, 2022. doi:[10.1109/ieeeeconf53456.2022.9744360](https://doi.org/10.1109/ieeeeconf53456.2022.9744360)
140. Iterative massive MIMO demodulation method with Non-Gaussian approximation / M.G. Bakulin, V.B. Kreindelin, D.Y. Pankratov, A.G. Stepanova // Journal of Communications Technology and Electronics. – 2022. – Vol.. 67, № 6. – P. 740-746.
141. Kreindelin, V.B. A multiuser demodulator with reduced enumeration / V.B. Kreindelin, D.Yu. Pankratov, A.M. Shloma // Radioelectronics and Communications Systems. – 2005. – Vol.. 48, № 1. – P. 6-9.
142. Analysis of Demodulation Efficiency and Complexity Using Non-Gaussian Approximation in Massive MIMO Systems / M.G. Bakulin, V.B. Kreindelin, D.Y. Pankratov, A.G. Stepanova // Journal of Communications Technology and Electronicsthis . – 2022 . – № 67(12). – P. 1542–1551.
143. Алиев, Ф.К. Курс лекций по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие/ Ф.К. Алиев, И.А. Юров. — М.: МИФИ, 2003. — 199 с.
144. Поляков, В.И. Основы теории алгоритмов / В.И. Поляков, В.И. Скорубский. – СПб.: СПб НИУ ИТМО, 2012. — 51 с.
145. Мальцев, А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции / А.И. Мальцев.— М.: Наука, 1986. — 368 с.
146. Карпов, Ю.Г. Сложность алгоритмов и программ/ Ю.Г. Карпов, П.В. Трифонов // Компьютерные инструменты в образовании. 2007. № 6. . — С. 3–10.
147. K-best MIMO detection VLSI architectures achieving up to 424 Mbps / M. Wenk, M. Zellweger, A. Burg, N. Felber, W. Fichtner // 2006 IEEE International

- Symposium on Circuits and Systems, 2006.— P. 4.
doi:[10.1109/iscas.2006.1692794](https://doi.org/10.1109/iscas.2006.1692794)
148. Солонина, А. И. Алгоритмы и процессоры цифровой обработки сигналов / А.И. Солонина, Д.А. Улахович, Л.А. Яковлев. – СПб: БХВ-Петербург, 2001. – 464 с.
149. TMS320C6678 Multicore Fixed and Floating Point Digital Signal Processor datasheet (Rev.E) <http://www.ti.com/lit/ds/symlink/tms320c6678.pdf>
150. TI's new TMS320C66x fixed- and floating-point DSP core conquers the Need for Speed. – <http://www.ti.com/lit/wp/spr147/spr147.pdf>
151. Series FPGAs Data Sheet: Overview. – https://www.xilinx.com/support/documentation/data_sheets/ds180_7Series_Overview.pdf
152. VIRTEX-7 FPGA Product Brief. – <https://www.xilinx.com/support/documentation/product-briefs/virtex7-product-brief.pdf>
153. All Programmable 7 series Product selection guide. – <https://www.xilinx.com/support/documentation/selection-guides/7-series-product-selection-guide.pdf>

Приложение 1. Акты о внедрении и использовании результатов диссертационной работы



АКТ

об использовании результатов диссертационной работы Степановой А.Г.
«Исследование и разработка итерационных алгоритмов демодуляции в системах беспроводной связи, использующих технологию MIMO с большим числом антенн».

Научно-техническая комиссия в составе начальника НИО МТУСИ «Перспективные технологии связи» д.т.н. проф. Крейнделина В.Б., и старшего научного сотрудника НИО МТУСИ «Перспективные технологии связи» к.т.н. Бакулина М.Г. составила настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы

- разработка нелинейного итерационного алгоритма демодуляции для систем MIMO с большим числом антенн на основе метода Чебышева с оценками собственных значений, вычислительная сложность которого имеет тот же порядок что и у алгоритма MMSE,
- разработка нового алгоритма демодуляции для систем Massive MIMO с высокой кратностью модуляции QAM с применением негауссовской аппроксимации априорного распределения передаваемых информационных символов и модифицированного метода Ньютона, обеспечивающего лучшие характеристики помехоустойчивости по сравнению с алгоритмом MMSE, при том же порядке вычислительной сложности,

были использованы при разработке алгоритмов демодуляции на базовой станции с большим числом антенн систем радиосвязи 5G по теме «Развитие новой технологии неортогонального доступа (NOMA) и ее использование совместно с технологией MIMO для перспективных систем связи 6G». Применение разработанного алгоритма на основе негауссовской аппроксимации и модифицированного метода Ньютона позволило получить энергетический выигрыш порядка 6 дБ для конфигурации антенн 32×32 модуляцией 256QAM по сравнению с известным алгоритмом MMSE. При использовании для демодуляции в системе MIMO с конфигурацией 64×64 и модуляцией 16QAM нелинейного алгоритма на основе метода Чебышева получен выигрыш порядка 2 дБ с сокращением времени обработки на 7 % по сравнению с алгоритмом MMSE.

Начальник НИО МТУСИ «Перспективные технологии связи», д.т.н., проф.

В.Б. Крейнделин

Старший научный сотрудник НИО МТУСИ «Перспективные технологии связи», к.т.н.

М.Г. Бакулин

«Утверждаю»

Заместитель проректора по учебной работе
Московского технического университета
связи и информатики

А. С. Аджикова

« 16 » 09 2023 г.



Акт об использовании в учебном процессе научных результатов
диссертационной работы Степановой А.Г. «Исследование и разработка
итерационных алгоритмов демодуляции в системах беспроводной связи,
использующих технологию MIMO с большим числом антенн»

Настоящим актом подтверждается, что результаты исследований и разработки итерационных алгоритмов демодуляции в системах беспроводной связи, использующих технологию MIMO с большим числом антенн, выполненных Степановой А.Г. в диссертационной работе, используются в учебном процессе кафедры «Системы и сети радиосвязи и телерадиовещания (СиСРТ)» и отражены в учебном пособии для студентов по направлениям подготовки 11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи по дисциплине Б1.В.24 «Сети и системы мобильной связи» (б.з.е), 11.04.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи по дисциплинам Б1.О.04 «Математическое моделирование устройств и систем» (б.з.е) и Б1.В.02 «Компьютерное моделирование систем радиосвязи, мобильной связи и радиодоступа»: – Бакулин М.Г., Панкратов Д.Ю., Степанова А.Г., Моделирование системы радиосвязи с разным числом передающих антенн. Учебное пособие 2022г., 52стр. ЭБС МТУСИ

Заведующий кафедрой СиСРТ

Т.П. Косичкина



«Утверждаю»
Заместитель проректора по учебной работе
Московского технического университета
связи и информатики

А. С. Аджикова А. С. Аджикова

« 16 » 01 2023 г.

Акт об использовании в учебном процессе научных результатов
диссертационной работы Степановой А.Г. «Исследование и разработка
итерационных алгоритмов демодуляции в системах беспроводной связи,
использующих технологию MIMO с большим числом антенн»

Комиссия в составе:

- директора Департамента организации и управления учебным процессом
МТУСИ О.Г. Вандиной
- начальника Отдела планирования и организации учебного процесса
В.А. Кузнецовой
- зав. кафедрой «Системы и сети радиосвязи и телерадиовещания»
Т.П. Косичкиной

удостоверяет, что в учебном процессе кафедры «Системы и сети радиосвязи и телерадиовещания (СиСРТ)» при чтении лекций для студентов по направлениям подготовки 11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи по дисциплине Б1.В.24 «Сети и системы мобильной связи» (б.з.е), 11.04.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи по дисциплинам Б1.О.04 «Математическое моделирование устройств и систем» (б.з.е) и Б1.В.02 «Компьютерное моделирование систем радиосвязи, мобильной связи и радиодоступа» используются результаты диссертационной работы Степановой А.Г., а именно: проведенный диссертантом анализ сложности и эффективности алгоритмов, в том числе и итерационных алгоритмов демодуляции сигналов на приемной стороне в системах беспроводной связи, использующих технологию MIMO с большим числом антенн.

Директор департамента организации
и управления учебным процессом
МТУСИ

О.Г. Вандина

Начальник отдела планирования и
организации учебного процесса

В.А. Кузнецова

Заведующий кафедрой «Системы и
сети радиосвязи и телерадиовещания
(СиСРТ)»

Т.П. Косичкина